

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

**ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ Π. ΨΩΝΗΣ**

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ  
ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗ ΣΚΕΔΑΣΗ  
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ  
2010**



Στους γονείς μου



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς όλους όσους βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας διατριβής και ιδιαίτερα το Δρ. κ. Κ. Χατζησάββα για την άψογη συνεργασία.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και στα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής: Καθηγητή κ. Ι. Αντωνίου, Αναπλ. Καθηγητή κ. Ν. Βλάχο, Καθηγητή κ. Γ. Λαζαρίδη και Αναπλ. Καθηγήτρια κα. Ε. Μαυρομάτη-Φούντου, τα οποία με βοήθησαν στην ορθή συγγραφή της παρούσας διατριβής με τις παρατηρήσεις και υποδείξεις τους.

Ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής: Καθηγητή κ. Γ. Λαλαζήση και Αναπλ. Καθηγητή κ. Χ. Πάνο για την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και για την πολύτιμη καθοδήγηση στην πραγματοποίηση της παρούσας διατριβής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το Λέκτορα κ. Χ. Μουστακίδη που με την υποστήριξη, τη συμπαράσταση, τις συμβουλές και την υπομονή του, κατέσπει δυνατή η ολοκλήρωση της διατριβής αυτής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες ανήκουν δικαιωματικά στον επιβλέπων Καθηγητή κ. Σ. Μάσεν, που από τα φοιτητικά μου ακόμα χρόνια ήταν δίπλα μου όποτε τον χρειάστηκα, βοηθώντας, με τις πολλές εύστοχες παρατηρήσεις, υποδείξεις και συμβουλές του, τόσο σε επιστημονικό όσο και κοινωνικό επίπεδο, δίνοντας μου τα απαραίτητα εφόδια για να συνεχίσω την πορεία μου στη ζωή.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Παναγιώτη και Βασιλική Ψώνη και την αδερφή μου Λευκή για τη συνολική και ουσιαστική υποστήριξη τους και τη γυναίκα μου, Βαλένα, η οποία ήταν η δύναμή μου όλο αυτό το χρονικό διάστημα.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διατριβή αυτή γίνεται εφαρμογή τριών πληροφοριακών μεγεθών, της πληροφοριακής εντροπίας κατά Shannon  $S$ , της “ανισορροπίας”  $D$  και της πολυπλοκότητας  $C$  στην πυρηνική φυσική και στη σκέδαση.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των πληροφοριακών μεγεθών που χρησιμοποιήθηκαν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετήθηκε η πληροφοριακή εντροπία  $S$  των πυρήνων στο χώρο των θέσεων και στο χώρο των ορμών καθώς και το άθροισμα αυτών. Η μελέτη έγινε με τη βοήθεια τριών προσεγγίσεων χρησιμοποιώντας φαινομενολογικές κατανομές πυκνότητας και ορμής των πυρήνων που προκύπτουν από πειράματα σκέδασης ηλεκτρονίων και από το CDFM (Coherence Density Fluctuation Model). Βρέθηκε ότι οι πληροφοριακές εντροπίες και στις τρεις προσεγγίσεις εξαρτώνται γραμμικά από το λογάριθμο του μαζικού αριθμού των πυρήνων. Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι η αύξηση της ποιότητας των κατανομών της πυκνότητας και της ορμής οδηγεί σε αύξηση του πληροφοριακού αθροίσματος στο χώρο των θέσεων και στο χώρο των ορμών, σύμφωνα με την αρχή της μέγιστης εντροπίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίστηκε η πληροφοριακή εντροπία των αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$ , αναδιατάσσοντας την έκφραση της ολικής ενεργού διατομής και εξετάστηκε η εξάρτηση της από την ενέργεια σκέδασης και το μαζικό αριθμό των πυρήνων. Η ολική ενεργός διατομή της αντίδρασης και οι ολικές ενεργές διατομές των μερικών κυμάτων βρέθηκαν αριθμητικά για διάφορα δυναμικά νουκλεονίου-νουκλεονίου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του πίνακα  $G$  και τη μέθοδο του πίνακα μεταφοράς  $T$ . Βρέθηκε ότι η πληροφοριακή εντροπία εξαρτάται γραμμικά από το λογάριθμο του μαζικού αριθμού  $A$  των πυρήνων και από το λογάριθμο της ενέργειας σκέδασης. Επειδή διαπιστώθηκε ότι υπάρχει σύνδεση της πληροφοριακής εντροπίας με την ακτίνα της πυρηνικής ύλης των πυρήνων, η μελέτη αυτή μπορεί να βοηθήσει στην εξαγωγή πληροφοριών για αυτήν την ακτίνα, για την οποία

δεν υπάρχουν πολλά πειραματικά δεδομένα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, έγινε μια συστηματική μελέτη της επίδρασης του δυναμικού όρου της ενέργειας συμμετρίας στις ιδιότητες των αστέρων νετρονίων (μάζα, ακτίνα). Για το λόγο αυτό, ο δυναμικός όρος της ενέργειας συμμετρίας παραμετροποιήθηκε με δύο διαφορετικούς τρόπους, με στόχο την επιτυχή αναπαραγωγή αποτελεσμάτων μικροσκοπικών υπολογισμών πυκνής πυρηνικής ύλης. Με τη βοήθεια των προτεινόμενων παραμετροποιήσεων κατασκευάστηκαν οι αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις. Για να υπολογιστεί η μάζα και η ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων επιλύθηκαν οι διαφορικές εξισώσεις των Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Έχοντας υπολογίσει τη μάζα και την ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων, έγινε μελέτη με βάση το πληροφοριακό περιεχόμενό τους. Τέλος μελετήθηκε η επίδραση της δυναμικής παραμέτρου της ενέργειας συμμετρίας και της βαρυτικής σταθεράς  $G$  στην πληροφοριακή εντροπία  $S$  και την πολυπλοκότητα  $C$ .

Στο πέμπτο κεφάλαιο υπολογίστηκαν η πληροφοριακή εντροπία, η “ανισοροπία” και η πολυπλοκότητα  $C$  στο χώρο των ορμών, για ρεαλιστικά συστήματα Fermi, δηλαδή την πυρηνική ύλη, το αέριο ηλεκτρονίων και το υγρό  ${}^3\text{He}$ . Αναλύθηκε η εξάρτηση των παραπάνω μεγεθών από την ένταση των συσχετίσεων και έγινε σαφές ότι οι παραπάνω ποσότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέτρο των συσχετίσεων των σωματιδίων για ένα σύστημα Fermi. Για καλύτερη σύγκριση, χρησιμοποιήθηκε και το χάσμα ασυνέχειας  $(1 - Z_F)$ . Για τις ίδιες τιμές του  $(1 - Z_F)$  τόσο οι τιμές όσο και η συμπεριφορά των παραπάνω πληροφοριακών μεγεθών ήταν διαφορετικές στα συστήματα Fermi που μελετήθηκαν. Τέλος, μελετήθηκε η εξάρτηση της πολυπλοκότητας  $C$  από τη θερμοκρασία στην περίπτωση αερίου ηλεκτρονίων. Βρέθηκε ότι είναι παρόμοια με εκείνη της ειδικής θερμότητας  $C_V$  σε ιδανικό αέριο Fermi, κάτι που δίνει μια ένδειξη ότι μπορεί να γίνει σύνδεση της  $C$  με πειραματικά μετρούμενα μεγέθη.

Συνοψίζοντας, η διατριβή συμβάλει στην προσπάθεια εύρεσης εφαρμογών της θεωρίας της πληροφορίας και της πολυπλοκότητας σε προβλήματα του μικρόκοσμου και του μεγάκοσμου με τη βοήθεια της Κβαντικής Φυσικής.



## SUMMARY

In this thesis, Shannon information entropy  $S$ , disequilibrium  $D$  and LMC complexity  $C$ , were calculated and applied to nuclear physics and scattering.

In the first chapter we presented a short review of various information measures.

In the second chapter we studied information entropy  $S$  in conjugate position and momentum spaces and their sum for various nuclei. We employed phenomenological density and momentum distributions following three approaches. In all cases we obtained the empirical property  $S = \alpha + b \ln A$ , where  $A$  is the mass number. The various cases can be classified either according to the quantity of “experimental” data used in our research or the value of  $S$  of the nuclei.

In the third chapter, we defined and calculated information entropy  $S$  in various  $(n, A)$  and  $(p, A)$  reactions, by rearranging the expression for the total cross section. It turned out that  $S$  depends linearly on  $\ln A$  and the logarithm of the scattering energy. That dependence could be useful to extract information for the matter radius of the nuclei, for which there is little “experimental” data.

The fourth chapter contains a systematic study of the impact of the symmetry energy on the properties of neutron stars (mass, radius). For this reason, the dynamic part of the symmetry energy was parameterized in two different ways to successfully reproduce the results of microscopic calculations of dense nuclear matter. Using the proposed configuration we built the corresponding equations of state and solved the Tolman-Oppenheimer-Volkoff differential equations in order to calculate the mass and radius of a neutron star. Having calculated the mass and radius, we performed a study based on the information content of a neutron star. Finally, we investigated the effect of the dynamic parameter of the symmetry energy and the gravitational constant  $G$  on the information entropy  $S$  and complexity  $C$ .

In the fifth chapter we calculated information entropy  $S$ , disequilibrium  $D$  and complexity  $C$  in momentum space for three realistic Fermi systems (nuclear matter, electron gas and liquid helium). We analyzed the dependence of these quantities on the correlation parameter and it became clear that these quantities could

be used as a measure of particle correlations in a Fermi system. For better comparison, we also used the discontinuity parameter  $(1 - Z_F)$ . Finally, we studied the dependence of  $C$  on the temperature of an electron gas.

In summary, this thesis contributes towards information theoretic application to specific problems of the microcosm and macrocosm employing quantum physics.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Πληροφοριακά μεγέθη</b>	<b>3</b>
1.1	Πληροφοριακή Εντροπία κατά Shannon . . . . .	4
1.2	Ανισορροπία . . . . .	6
1.3	Πολυπλοκότητα . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Πληροφοριακή εντροπία και συσχετίσεις νουκλεονίων στους πυρήνες</b>	<b>9</b>
2.1	Η πληροφοριακή εντροπία μιας δοσμένης κατανομής . . . . .	11
2.1.1	CDFM . . . . .	12
2.2	Αριθμητικά αποτελέσματα και ανάλυση . . . . .	16
2.2.1	Σύγκριση πειραμάτων διαφορετικού εύρους μεταφε- ρόμενης ορμής . . . . .	23
2.3	Η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από το μέσο όγ- κο ενός πυρήνα . . . . .	26
2.4	Συμπεράσματα . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Η πληροφοριακή εντροπία των αντιδράσεων <math>(n, A)</math> και <math>(p, A)</math></b>	<b>31</b>
3.1	Στοιχεία σκέδασης - πληροφοριακή εντροπία . . . . .	32
3.2	Η πληροφοριακή εντροπία των αντιδράσεων $(n, A)$ , $(p, A)$ . .	34
3.2.1	Η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από την ενέργεια . . . . .	35
3.2.2	Η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από το μαζικό αριθμό . . . . .	37

3.2.3	Η σύνδεση της πληροφοριακής εντροπίας με την ακτίνα της πυρηνικής ύλης των πυρήνων . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Αστέρες νετρονίων και πληροφορία</b>	<b>43</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	43
4.2	Πληροφορικά μεγέθη και αστέρες νετρονίων . . . . .	47
4.3	Το μαθηματικό πρότυπο . . . . .	49
4.4	Αποτελέσματα I . . . . .	57
4.5	Αποτελέσματα II . . . . .	75
4.6	Συμπεράσματα . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Στατιστικό μέτρο της πολυπλοκότητας και συσχετισμένη συμπεριφορά συστημάτων Fermi</b>	<b>91</b>
5.1	Κατανομή της ορμής, πληροφοριακή εντροπία και πολυπλοκότητα . . . . .	93
5.1.1	Πυρηνική ύλη . . . . .	97
5.1.2	Αέριο ηλεκτρονίων . . . . .	102
5.1.3	Υγρό $^3\text{He}$ . . . . .	105
5.2	Επίδραση της θερμοκρασίας στην πολυπλοκότητα ενός αερίου ηλεκτρονίων . . . . .	107
5.2.1	Κβαντική περιοχή ( $T \ll T_F$ ) . . . . .	108
5.2.2	Κλασική περιοχή ( $T \gg T_F$ ) . . . . .	111
5.3	Συμπεράσματα . . . . .	114

# Κεφάλαιο 1

## Πληροφοριακά μεγέθη

Οι μέθοδοι της θεωρίας της πληροφορίας άρχισαν τα τελευταία χρόνια να βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη κβαντομηχανικών συστημάτων. Ένα παράδειγμα είναι η εφαρμογή της αρχής της μέγιστης εντροπίας [1] για τον υπολογισμό της κυματοσυνάρτησης σε ένα δυναμικό [2] χρησιμοποιώντας ως περιορισμούς τις αναμενόμενες τιμές απλών παρατηρήσιμων μεγεθών και κατασκευάζοντας την κυματοσυνάρτηση με τη βοήθεια ενός περιορισμένου αριθμού αναμενόμενων τιμών των μεγεθών αυτών. Η ιδέα πίσω από την αρχή της μέγιστης εντροπίας είναι να επιλέξουμε το πιο ανεπηρέαστο αποτέλεσμα, το οποίο όμως είναι συμβατό με τους περιορισμούς του προβλήματος μας. Έτσι η αρχή της μέγιστης εντροπίας δίνει την πιο ανεπηρέαστη περιγραφή η οποία όμως συμφωνεί με τη διαθέσιμη σχετική πληροφορία. Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή μιας κατάλληλα ορισμένης πληροφοριακής εντροπίας, η οποία υπολογίζει την έλλειψη πληροφορίας που σχετίζεται με την κατανομή μιας κβαντικής κατάστασης.

Στη διατριβή αυτή θα χρησιμοποιηθούν τρία πληροφοριακά μεγέθη. Η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon  $S$ , η “ανισορροπία”  $D$  (disequilibrium) και η πολυπλοκότητα  $C_{LMC}$  που εισήγαγαν οι López-Ruiz, Calbet και Mancini (LMC). Τα μεγέθη αυτά θα εφαρμοστούν σε μια σειρά από πυρηνικά συστήματα με σκοπό την καλύτερη κατανόηση τους.

## 1.1 Πληροφοριακή Εντροπία κατά Shannon

Για μια διακριτή κατανομή η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon [3] ορίζεται ως εξής

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (1.1)$$

Η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon μετριέται σε nats εφόσον χρησιμοποιηθεί ο φυσικός λογάριθμος  $\log_e = \ln$ , ενώ σε bits αν στον ορισμό χρησιμοποιηθεί ο δυαδικός λογάριθμος  $\log_2 = \log$ . Για μια διακριτή κατανομή πιθανοτήτων  $\{p_i\} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ , η πληροφοριακή εντροπία  $S$  είναι ελάχιστη ( $S_{\min} = 0$ ) για την κατανομή ενός συστήματος, όπου μία από τις πιθανότητες  $p_i$  γίνεται ίση με την μονάδα ενώ οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Η μέγιστη τιμή ( $S_{\max} = \ln N$ ) επιτυγχάνεται για μια ομοιόμορφη κατανομή πιθανοτήτων, όπου  $p_i = 1/N, i = 1, \dots, N$ .

Για μια συνεχή κατανομή πιθανοτήτων  $p(x)$ , κανονικοποιημένη στη μονάδα ( $\int p(x)dx = 1$ ), η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon παίρνει τη μορφή

$$S = - \int p(x) \ln p(x) dx. \quad (1.2)$$

Η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη κβαντομηχανικών συστημάτων, βοηθώντας στην επεξήγηση βασικών αρχών της κβαντικής μηχανικής και στη σύνθεση πυκνοτήτων πιθανότητας στο χώρο των θέσεων και στο χώρο των ορμών [4]-[16]. Ένα σημαντικό βήμα είναι η δημιουργία μιας εντροπικής σχέσης αβεβαιότητας [4]. Στις τρεις διαστάσεις η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή

$$S = S_r + S_k \geq 3(1 + \ln \pi) \simeq 6.434 \quad (k = p/\hbar), \quad (1.3)$$

όπου

$$S_r = - \int \rho(\mathbf{r}) \ln \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad S_k = - \int n(\mathbf{k}) \ln n(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (1.4)$$

είναι οι πληροφοριακές εντροπίες κατά Shannon στο χώρο των θέσεων και στο χώρο των ορμών και  $\rho(\mathbf{r})$  και  $n(\mathbf{k})$  οι κανονικοποιημένες στη μονάδα κατανομές της πυκνότητας και της ορμής αντιστοίχως.

Η ανισότητα (1.3) είναι μια θεωρητική σχέση αβεβαιότητας πιο ισχυρή από την αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg [4] και είναι ανεξάρτητη των μονάδων μέτρησης κατά τον υπολογισμό των  $\rho(\mathbf{r})$  και  $n(\mathbf{k})$ . Για παράδειγμα το άθροισμα  $S = S_r + S_k$  παραμένει αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό κλίμακας των συντεταγμένων ενώ οι εντροπίες  $S_r$  και  $S_k$  μεταβάλλονται. Η φυσική σημασία της  $S$  είναι ότι αποτελεί ένα μέτρο της κβαντομηχανικής αβεβαιότητας και αναπαριστά το πληροφοριακό περιεχόμενο μιας κατανομής πιθανοτήτων που στην περίπτωση μας είναι οι πυρηνικές κατανομές πυκνότητας και ορμής. Η ανισότητα (1.3) δίνει και το ελάχιστο όριο για την  $S$  που αντιστοιχεί στη γκαουσιανή κατανομή.

Όπως λέει και ο March “Χρειάζεται περαιτέρω δουλειά για να μπορέσει να εκτιμηθεί η σημασία των  $S_r$  και  $S_k$  στην ατομική θεωρία” [17, 18]. Η πρόταση αυτή μπορεί να επεκταθεί εν γένει για τα φερμιονικά συστήματα και τα συζευγμένα μποζονικά συστήματα.

Η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon,  $S_r$  και  $S_k$ , έχει μελετηθεί πρόσφατα για πυκνότητες διαφόρων συστημάτων [9, 11, 12], όπως είναι η κατανομή πυκνότητας νουκλεονίων σε πυρήνες, ηλεκτρονίων σθένους σε μεταλλικά συσσωματώματα και συσχετισμένων μποζονίων σε αλκαλικά άτομα. Βρέθηκε ότι η ίδια συναρτησιακή σχέση

$$S = \alpha + b \ln A,$$

όπου το άθροισμα της εντροπίας είναι συνάρτηση του μαζικού αριθμού  $A$ , ισχύει για τα παραπάνω συστήματα και είναι σε συμφωνία με τα ατομικά συστήματα της αναφοράς [5]. Στις αναφορές [14, 15] βρέθηκε η εξάρτηση της  $S$  από την παράμετρο συσχέτισεων μικρής εμβέλειας (short range correlations ή SRC) των νουκλεονίων σε ένα πυρήνα και από την αλληλεπίδραση σωματιδίων σε διάφορα ομογενή συστήματα φερμιονίων (πυρηνική ύλη, υγρό  $^4\text{He}$  και αέριο ηλεκτρονίων). Η εξάρτηση αυτή καθώς και η γραμμική εξάρτηση της  $S$  από το λογάριθμο του μαζικού αριθμού χρησιμοποιήθηκε στην αναφορά [14] για τον προσδιορισμό της παραμέτρου των SRC των πυρήνων σε s-, p-, και sd-φλοιούς στην περίπτωση που δεν υπάρχουν

πειραματικά δεδομένα.

## 1.2 Ανισορροπία

Την “ανισορροπία” εισήγαγε ο Onicescu [20] ως ένα πιο ευαίσθητο μέτρο της διασποράς των κατανομών σε σχέση με την πληροφοριακή εντροπία  $S$  του Shannon.

Η “ανισορροπία”  $D$  για μια συνεχή κατανομή πιθανοτήτων  $p(x)$ , κανονικοποιημένη στη μονάδα ( $\int p(x)dx = 1$ ), ορίζεται ως εξής

$$D(p) = \int p^2(x)dx. \quad (1.5)$$

Στην περίπτωση διακριτής κατανομής η “ανισορροπία” γράφεται

$$D = \sum_{i=1}^N (1/N - p_i)^2 \quad (1.6)$$

και γίνεται μέγιστη  $D_{\max} = 1 - 1/N \rightarrow 1$  για ένα σύστημα όπου μία από τις πιθανότητες  $p_i$  γίνεται ίση με τη μονάδα ενώ όλες οι υπόλοιπες μηδενίζονται και ελάχιστη  $D_{\min} = 0$  για μια ομοιόμορφη κατανομή.

Η (1.5) γράφεται στο χώρο των θέσεων και το χώρο των ορμών, ως εξής

$$D_r = \int \rho^2(\mathbf{r}) 4\pi r^2 d\mathbf{r} \quad (1.7)$$

και

$$D_k = \int n^2(\mathbf{k}) 4\pi k^2 d\mathbf{k}. \quad (1.8)$$

όπου  $\rho(\mathbf{r})$  και  $n(\mathbf{k})$  οι κανονικοποιημένες στη μονάδα κατανομές της πυκνότητας και της ορμής αντιστοίχως.

Η  $D_r$  (1.7) έχει διαστάσεις αντίστροφου όγκου, ενώ η  $D_k$  (1.8) έχει διαστάσεις όγκου. Επομένως το γινόμενο  $D_r D_k$  είναι αδιάστατο.



### 1.3 Πολυπλοκότητα

Το στατιστικό μέτρο της πολυπλοκότητας  $C_{LMC}$ , που εισήγαγαν οι López-Ruiz, Calbet και Mancini (LMC) [21], ορίζεται ως το γινόμενο της πληροφοριακής εντροπίας  $S$  ή της πληροφορίας που είναι αποθηκευμένη σε ένα σύστημα επί την “απόσταση” της κατανομής πιθανοτήτων από την κατάσταση ισορροπίας. Έχουν προταθεί αρκετοί ορισμοί της πολυπλοκότητας ως δείκτες της πολύπλοκης συμπεριφοράς διάφορων συστημάτων, οι οποίοι, ως επί το πλείστον, προέρχονται από τη φυσική και κυρίως τις υπολογιστικές επιστήμες. Το μέτρο  $C_{LMC}$  της στατιστικής πολυπλοκότητας μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα (σε σύγκριση με τους άλλους ορισμούς όπως του Kolmogorov), και ορίζεται με τη σχέση

$$C_{LMC} = SD \quad (1.9)$$

συνδυάζοντας την πληροφοριακή εντροπία  $S$  και την “ανισορροπία”  $D$ . Η πολυπλοκότητα  $C_{LMC}$  παρουσιάζει κάποια διαισθητικά αναμενόμενα χαρακτηριστικά, αφού μηδενίζεται εντελώς στις δύο ακραίες περιπτώσεις, του τέλειου κρυστάλλου (απόλυτη τάξη) και του ιδανικού αερίου (απόλυτη αταξία). Ο αρχικός ορισμός της  $C_{LMC}$  έχει ελαφρώς τροποποιηθεί με τον κατάλληλο τρόπο από τους Catalan et al [22], φτάνοντας έτσι στη μορφή

$$C = e^S D = HD, \quad (1.10)$$

η οποία εφαρμόζεται σε συστήματα που περιγράφονται είτε με διακριτή είτε με συνεχή κατανομή πιθανότητας. Αποδείχθηκε ότι τα αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά: Ακραίες τιμές της  $C$  παρατηρήθηκαν για κατανομές που χαρακτηρίζονται από ένα έντονο μέγιστο που βρίσκεται σε ένα ομογενές υπόβαθρο. Επιπλέον, η  $C$  ελαττώνεται, όταν το σύστημα φτάνει σε ισορροπία και η ελάχιστη τιμή της  $C$  επιτυγχάνεται για ομοιόμορφη κατανομή πιθανοτήτων με τιμή  $C = 1$ . Τέλος, η  $C$  δεν είναι άνω φραγμένη με αποτέλεσμα να μπορεί να γίνει απείρως μεγάλη.

Η πολυπλοκότητα  $C_{LMC}$  αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως πολυπλοκότητα σχήματος (shape complexity), δεδομένου ότι οι τιμές της είναι ανάλογες του πόσο σύνθετη είναι η κυματομορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Η πρώτη έρευνα της  $C_{LMC}$  σε κβαντικά συστήματα πολλών σωμάτων έγινε στα άτομα, σε συνεχείς [25]-[28] και διακριτές κατανομές [29]. Ένας εναλλακτικός ορισμός της πολυπλοκότητας είναι το μέτρο SDL (Shiner, Davison, Landsberg)  $\Gamma_{\alpha\beta}$  [23], που ορίζεται και υπολογίζεται με ένα ανάλογο τρόπο όπως και η  $C_{LMC}$ . Σε γενικές γραμμές, εάν κάποιος μεταβάλει κάποιες από τις παραμέτρους του συστήματος ή εισάγει συσχετίσεις και αυτό οδηγεί σε αύξηση του χρησιμοποιούμενου μέτρου της πολυπλοκότητας, τότε θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι το μέτρο αυτό περιγράφει σωστά την πολυπλοκότητα του συστήματος [25]-[28].

Η τροποποιημένη εκδοχή  $C = e^S D$  της πολυπλοκότητας, πληρεί ορισμένα πρόσθετα και επιθυμητά μαθηματικά χαρακτηριστικά, όπως η θετικότητα και η διατήρηση σε μετασχηματισμούς μεταφοράς (translations), μετατοπίσεις κλίμακας (rescaling transformations) και αναπαραγωγή (replication). Η χρησιμότητα αυτής της βελτιωμένης έκδοσης έχει αποδειχθεί σε πολλούς τομείς [24]-[40]. Επιπλέον, το μέγεθος αυτό είναι κατάλληλα προσαρμοσμένο για τα συστήματα κβαντικής μηχανικής, τα οποία περιγράφονται από την ίδια τους τη φύση με τη βοήθεια πιθανοτήτων, μέσω της πυκνότητας πιθανότητας στο χώρο των θέσεων και στο χώρο των ορμών.

## Κεφάλαιο 2

# Πληροφοριακή εντροπία και συσχετίσεις νουκλεονίων στους πυρήνες

Το κίνητρο για την παρούσα μελέτη [41] είναι να επεκταθούν οι προηγούμενες εργασίες που έχουν γίνει στη μελέτη της πληροφοριακής εντροπίας στους πυρήνες, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν περισσότερα πειραματικά δεδομένα υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να μελετηθούν σημαντικές ιδιότητες πυρηνικών συστημάτων, για παράδειγμα η επίδραση των συσχετίσεων μεταξύ των νουκλεονίων στους πυρήνες και βασικά πυρηνικά χαρακτηριστικά όπως οι κατανομές της πυκνότητας και της ορμής των νουκλεονίων. Για το λόγο αυτό αντί να γίνει η μελέτη με ένα συγκεκριμένο πυρηνικό δυναμικό, ξεκινήσαμε από “πειραματικές” κατανομές πυκνότητας πιθανότητας που είναι γνωστές από σκέδαση ηλεκτρονίων από πυρήνες και μιονικά άτομα [42, 43]. Η μελέτη μπορεί να ξεκινήσει επίσης χρησιμοποιώντας “πειραματικές” εκτιμήσεις της κατανομής των νουκλεονίων [44, 45] από superscaling ανάλυση σκέδασης ηλεκτρονίων [46] που βασίζεται στο πρότυπο διακύμανσης της πυκνότητας συνοχής (Coherence Density Fluctuation Model - CDFM) [47, 48, 49, 50]. Το πρότυπο αυτό παρέχει

επίσης τη δυνατότητα υπολογισμού της κατανομής της πυκνότητας από την κατανομή της ορμής και αντιστρόφως.

Η μελέτη αυτή μπορεί να βοηθήσει με διάφορους τρόπους: Πρώτον, στο να χαρακτηριστεί η εμπειρική σχέση

$$S = \alpha + b \ln A, \quad (2.1)$$

όπου  $A$  ο αριθμός των φερμιονίων, που βρέθηκε στις αναφορές [5, 9, 11, 12] ότι ισχύει για φερμιονικά συστήματα ως ανεξάρτητη του προτύπου αφού θα έχει επαληθευθεί με τη χρήση διαφόρων μεθόδων και προτύπων. Επιπλέον να ενισχύσει το συμπέρασμα της αναφοράς [10], σύμφωνα με την οποία όσο περισσότερα πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιήσουμε σε μια θεωρία, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της πληροφοριακής εντροπίας. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της πληροφοριακής εντροπίας τόσο καλύτερη είναι η ποιότητα της κατανομής της πυκνότητας και της ορμής των νουκλεονίων. Στις πέντε μεθόδους-πρότυπα που χρησιμοποιήθηκαν σε διάφορους πυρήνες από το  ${}^4\text{He}$  μέχρι το  ${}^{238}\text{U}$  βρέθηκε ότι ισχύει η ίδια συναρτησιακή εξάρτηση για την  $S$ , ενώ οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $b$  εξαρτώνται από τη μέθοδο.

Τα αποτελέσματα με το πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή [9] είναι πιο κοντά στο κατώτερο όριο της ανισότητας (1.3) που λαμβάνεται μόνο για τον πυρήνα  ${}^4\text{He}$ . Τα αποτελέσματα των άλλων πιο ρεαλιστικών προτύπων αποκλίνουν αρκετά από αυτά του αρμονικού ταλαντωτή. Η διαφορά αυτή μεγαλώνει στα πρότυπα που γίνεται χρήση περισσότερων πειραματικών δεδομένων. Δηλαδή οι διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με την ποσότητα των πειραματικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν ή ανάλογα με τις τιμές της  $S$ . Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι ρεαλιστικότερες κατανομές της πυκνότητας και της ορμής οδηγούν σε μεγαλύτερες τιμές της  $S$ . Επειδή οι κατανομές της πυκνότητας και της ορμής που βασίζονται σε πολλά πειραματικά δεδομένα θεωρούνται πιο ρεαλιστικές, τα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με την αρχή της μέγιστης εντροπίας. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των αποτελεσμάτων είναι ότι οι ευθείες  $S_{\text{model}} = \alpha_{\text{model}} + b_{\text{model}} \ln A$  είναι περίπου παράλληλες

μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχει ένα είδος κλιμάκωσης (scaling) μεταξύ των τιμών της  $S$  για τα διάφορα πρότυπα που καθορίζεται από τις τιμές της παραμέτρου  $\alpha_{\text{model}}$ .

Δεύτερον, επιτυγχάνεται η σύνδεση της πληροφοριακή εντροπίας με άλλες φυσικές ποσότητες όπως τη μέση τετραγωνική ακτίνα (RMS) ενός πυρήνα ή το μέσο όγκο στον οποίο εντοπίζονται τα νουκλεόνια σε ένα πυρήνα.

Τέλος η παρούσα μεθοδολογία μπορεί να βοηθήσει στην επιλογή της πιο “αξιόπιστης” ανάλυσης διαφόρων πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από τον ίδιο πυρήνα.

## 2.1 Η πληροφοριακή εντροπία μιας δοσμένης κατανομής

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τον υπολογισμό της πληροφοριακής εντροπίας των πυρήνων πρέπει να είναι γνωστές οι κατανομές της πυκνότητας και της ορμής των νουκλεονίων. Οι κατανομές αυτές μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια διαφόρων προτύπων. Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι η χρησιμοποίηση φαινομενολογικών κατανομών πυκνότητας και κατανομών της ορμής των νουκλεονίων.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν φαινομενολογικές κατανομές πυκνότητας από την ανάλυση πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από πυρήνες και τη μελέτη μιονικών ατόμων [42, 43]. Για μερικούς πυρήνες υπάρχουν φαινομενολογικές κατανομές της ορμής των νουκλεονίων που βασίζονται τόσο στην superscaling ανάλυση πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από πυρήνες [44, 45, 46], όσο και στο CDFM. Επειδή το πρότυπο αυτό βοηθάει και στην εύρεση της κατανομής της ορμής από την κατανομή της πυκνότητας και αντίστροφα θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση του.

### 2.1.1 CDFM

Το CDFM [47, 48, 49, 50] συνδέεται τη μέθοδο των γεννητριών συντεταγμένων (generator coordinate method - GCM), στην οποία η κυματοσυνάρτηση των  $A$  νουκλεονίων ενός πυρήνα γράφεται με τη μορφή

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \int F(x_1, x_2, \dots) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A; x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots, \quad (2.2)$$

όπου η συνάρτηση  $\Phi(\{\mathbf{r}_i\}; x_1, x_2, \dots)$  εξαρτάται από τις συντεταγμένες των νουκλεονίων (διανύσματα θέσης, σπιν και ισοσπίν) και από τις γεννήτριες συντεταγμένες  $x_1, x_2, \dots$  και μια συνάρτηση βάρους  $F(x_1, x_2, \dots)$ . Η  $\Phi$  εκλέγεται ως η ορίζουσα Slater κυματοσυναρτήσεων ανεξάρτητων σωματιδίων, που προκύπτει από ένα μονοσωματιδιακό δυναμικό που εξαρτάται από έναν αριθμό παραμέτρων  $x_1, x_2, \dots$  (όπως το μέγεθος, το σχήμα κ.λ.π), τις γεννήτριες συντεταγμένες. Η κυματοσυνάρτηση (2.2) μπορεί να εκφραστεί ως μια επαλληλία οριζουσών Slater και επομένως περιγράφει τον πυρήνα πέρα από την προσέγγιση μέσου πεδίου.

Η συνάρτηση βάρους  $F(x_1, x_2, \dots)$  μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της αρχής των μεταβολών. Με τη βοήθεια της (2.2) το συναρτησοειδές της ενέργειας

$$E[\Psi] = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}, \quad (2.3)$$

όπου  $H$  ο τελεστής του Hamilton του συστήματος, γίνεται συναρτησοειδές της συνάρτησης βάρους  $F$  που πρέπει να εκλεγεί έτσι ώστε να ισχύει

$$\delta E = 0. \quad (2.4)$$

Η εξίσωση (2.4) οδηγεί στην ολοκληρωτική εξίσωση της συνάρτησης βάρους

$$\int [\mathcal{H}(x, x') - EI(x, x')] F(x') dx' = 0, \quad (2.5)$$

όπου

$$\mathcal{H}(x, x') = \langle \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x) | \hat{H} | \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x') \rangle, \quad (2.6)$$

$$I(x, x') = \langle \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x) | \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x') \rangle \quad (2.7)$$

και  $x$  το σύνολο των παραμέτρων  $x_1, x_2, \dots$ .

Το CDFM εισάγεται χρησιμοποιώντας την κύρια υπόθεση του GCM για την κυματοσυνάρτηση των  $A$ -νουκλεονίων (2.2) και την προσέγγιση με τη συνάρτηση  $\delta$  του ολοκληρώματος επικάλυψης (2.7) και του ολοκληρώματος της ενέργειας (2.6)

$$I(x, x') \rightarrow \delta(x - x'), \quad (2.8)$$

$$\mathcal{H}(x, x') \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \delta''(x - x') + \delta(x - x') V\left(\frac{x + x'}{2}\right), \quad (2.9)$$

όπου

$$V(x) = \langle \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x) | \hat{H} | \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x) \rangle \quad (2.10)$$

και

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 / \int \langle \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x) | \hat{H} - E | \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x') \rangle (x' - x)^2 dx' \quad (2.11)$$

Η προσέγγιση της συνάρτησης  $\delta$  (σχέσεις (2.8) και (2.9)) σχετίζεται με το γεγονός ότι για ένα πολυ-φερμιονικό σύστημα όπως οι πυρήνες, τα  $I(x, x')$  και  $\mathcal{H}(x, x')$  έχουν ένα μεγάλο μέγιστο για  $x = x'$ .

Αν η δοκιμαστική κυματοσυνάρτηση (2.2) είναι κανονικοποιημένη στο μαζικό αριθμό  $A$ , οπότε για τη συνάρτηση βάρους ισχύει η συνθήκη

$$\int_0^\infty |F(x)|^2 dx = 1, \quad (2.12)$$

προκύπτει ότι η προσέγγιση με τη συνάρτηση  $\delta$  οδηγεί στη σχέση

$$\int \Phi^*(\{\mathbf{r}_i\}, x') \Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A = A \delta(x - x'). \quad (2.13)$$

Οι σχέσεις (2.12) και (2.13) βοηθούν να θεωρηθεί η παρακάτω προσέγγιση στην περίπτωση ενός πολυ-φερμιονικού συστήματος

$$\int \Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A, x) \Phi(\mathbf{r}', r_2, \dots, r_A, x') d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_A \simeq \rho_x(r, r') \delta(x - x'), \quad (2.14)$$

όπου  $\rho_x(r, r')$  ο πίνακας πυκνότητας ενός σωματιδίου που αντιστοιχεί στην κυματοσυνάρτηση  $\Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x)$ .

Σημειώνεται ότι η ολοκλήρωση της (2.14) ως προς  $\mathbf{r}$  για  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  οδηγεί σε μια σχέση της μορφής (2.13). Δηλαδή η κύρια προσέγγιση του CDFM που είναι η σχέση (2.14) σχετίζεται με το GCM στην προσέγγιση με τη συνάρτηση  $\delta$ .

Αν θεωρηθεί ότι η κυματοσυνάρτηση  $\Phi(\{\mathbf{r}_i\}, x)$  περιγράφει ένα σύστημα με ομοιόμορφη κατανομή

$$\rho_x(\mathbf{r}) = \rho_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \rho_0(x) \Theta(x - |\mathbf{r}|), \quad (2.15)$$

όπου

$$\rho_0(x) = \frac{3A}{4\pi x^3}$$

και η γεννήτρια συντεταγμένη  $x$  είναι η ακτίνα μιας σφαίρας που περιέχει τα  $A$  νουκλεόνια, ομοιόμορφα κατανεμημένα σε αυτήν, ένα τέτοιο σύστημα περιγράφεται με πίνακα πυκνότητας της μορφής

$$\rho_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 3\rho_0(x) \frac{j_1(k_F(x)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{k_F(x)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Theta\left(x - \frac{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|}{2}\right), \quad (2.16)$$

όπου  $j_1$  είναι η σφαιρική συνάρτηση Bessel πρώτης τάξης και  $k_F(x)$  είναι η ορμή Fermi της πυρηνικής ύλης με ακτίνα  $x$

$$k_F(x) = \left(\frac{3\pi^2}{2}\rho_0(x)\right)^{1/3} = \frac{\alpha}{x}, \quad \alpha = \left(\frac{9\pi A}{8}\right)^{1/3}.$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2) και (2.14) ο πίνακας πυκνότητας ενός σώματος σφαιρικών τμημάτων πυρηνικής ύλης με πυκνότητα  $\rho_0(x)$  γράφεται ως εξής

$$\rho(r, r') = \int_0^\infty |F(x)|^2 \rho_x(r, r') dx, \quad (2.17)$$



όπου η  $\rho_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  δίνεται από την (2.16). Τελικά οι εκφράσεις της κατανομής της πυκνότητας και της κατανομής της ορμής, που είναι ο μετασχηματισμός Fourier του πίνακα πυκνότητας ενός σωματιδίου, παίρνουν τη μορφή

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \frac{3A}{4\pi x^3} |F(x)|^2 \Theta(x - |\mathbf{r}|) dx \quad (2.18)$$

και

$$n(\mathbf{k}) = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi x^3}{3} |F(x)|^2 \Theta(k_F(x) - |\mathbf{k}|) dx, \quad (2.19)$$

όπου και οι δύο είναι κανονικοποιημένες στο μαζικό αριθμό  $A$ . Στην περίπτωση που η κατανομή της πυκνότητας είναι μια μονότονα φθίνουσα συνάρτηση ( $d\rho/dr \leq 0$ ) από τη σχέση (2.18) οδηγούμαστε σε μια σχέση της συνάρτησης βάρους  $F(x)$  και της κατανομής της πυκνότητας

$$|F(x)|^2 = -\frac{1}{\rho_0(x)} \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=x}. \quad (2.20)$$

Αντικαθιστώντας την  $|F(x)|^2$  από την εξίσωση (2.20) στην (2.19), η κατανομή της ορμής παίρνει την μορφή

$$n(\mathbf{k}) = \frac{8}{9\pi A} \left[ 6 \int_0^{\alpha/k} r^5 \rho(r) dr - \left(\frac{\alpha}{k}\right)^6 \rho\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right], \quad (2.21)$$

που είναι κανονικοποιημένη στο μαζικό αριθμό  $A$ . Επομένως με τη βοήθεια του CDFM μπορεί να βρεθεί μια προσεγγιστική έκφραση της κατανομής της ορμής των νουκλεονίων όταν είναι γνωστή η κατανομή της πυκνότητας και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πληροφοριακές εντροπίες

$$S_r = -\int \rho(\mathbf{r}) \ln \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad S_k = -\int n(\mathbf{k}) \ln n(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.22)$$

και το άθροισμά τους  $S = S_r + S_k$ . Στις παραπάνω σχέσεις οι κατανομές της πυκνότητας και της ορμής είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα.

Σημειώνεται ότι επειδή υπάρχουν φαινομενολογικές κατανομές της πυκνότητας για πάρα πολλούς πυρήνες [42], η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια συστηματική μελέτη των  $S_r$ ,  $S_k$  και  $S$  για ένα μεγάλο εύρος τιμών του μαζικού αριθμού  $A$ .

Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της κατανομής της πυκνότητας, αν είναι γνωστή η κατανομή της ορμής των νουκλεονίων. Η “πειραματική” κατανομή της ορμής των νουκλεονίων των πυρήνων  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ , και  $^{197}\text{Au}$  έχει βρεθεί σχετικά πρόσφατα στην αναφορά [45] χρησιμοποιώντας την ανάλυση του φαινομένου superscaling των Donnelly και Sick [46].

Χρησιμοποιώντας το CDFM η κατανομή της ορμής σχετίζεται με τη συνάρτηση της  $\psi'$ -scaling,  $f(\psi')$ , μέσω της σχέσης [45]

$$n(k) = -\frac{1}{3\pi k^2 k_F} \left. \frac{\partial f(\psi')}{\partial(|\psi'|)} \right|_{|\psi'|=k/k_F}. \quad (2.23)$$

Από την “πειραματική” κατανομή  $n(k)$  μπορεί να υπολογιστεί η συνάρτηση βάρους  $F(x)$

$$|F(x)|^2 = -\frac{1}{n_0(x)} \left. \frac{dn}{dk} \right|_{k=x}, \quad (2.24)$$

όπου  $n_0(x) = \frac{3A}{4\pi x^3}$  και η  $n(k)$  ικανοποιεί τον περιορισμό  $\frac{dn}{dk} \leq 0$ .

Η αντικατάσταση της  $|F(x)|^2$  από την εξίσωση (2.24) στην (2.18), δίνει την κατανομή της πυκνότητας

$$\rho(r) = \frac{8}{9\pi A} \left[ 6 \int_0^{\alpha/r} k^5 n(k) dk - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^6 n\left(\frac{\alpha}{r}\right) \right]. \quad (2.25)$$

Επομένως χρησιμοποιώντας την ανάλυση του φαινομένου superscaling μπορεί να βρεθεί η “πειραματική” κατανομή της ορμής και με τη βοήθεια του CDFM η κατανομή της πυκνότητας.

## 2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα και ανάλυση

Στηριζόμενοι στην ανάλυση του προηγούμενου εδαφίου υπολογίστηκαν οι πληροφοριακές εντροπίες  $S_r$ ,  $S_k$  και  $S$  διάφορων πυρήνων χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίνονται με τα αντίστοιχα που λαμβάνονται όταν χρησιμοποιούνται κατανομές της

πυκνότητας και της ορμής με το πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή και όταν εισάγονται συσχετίσεις μικρής εμβέλειας.

Στην πρώτη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν φαινομενολογικές κατανομές της πυκνότητας για διάφορους πυρήνες από  $^4\text{He}$  μέχρι  $^{238}\text{U}$  από τις αναφορές [42, 43]. Από τις διάφορες κατανομές πυκνότητας που υπάρχουν στη βιβλιογραφία συμπεριλήφθηκαν μόνο κατανομές Fermi με δύο ή τρεις παραμέτρους (2pF, 3pF) από την αναφορά [42]

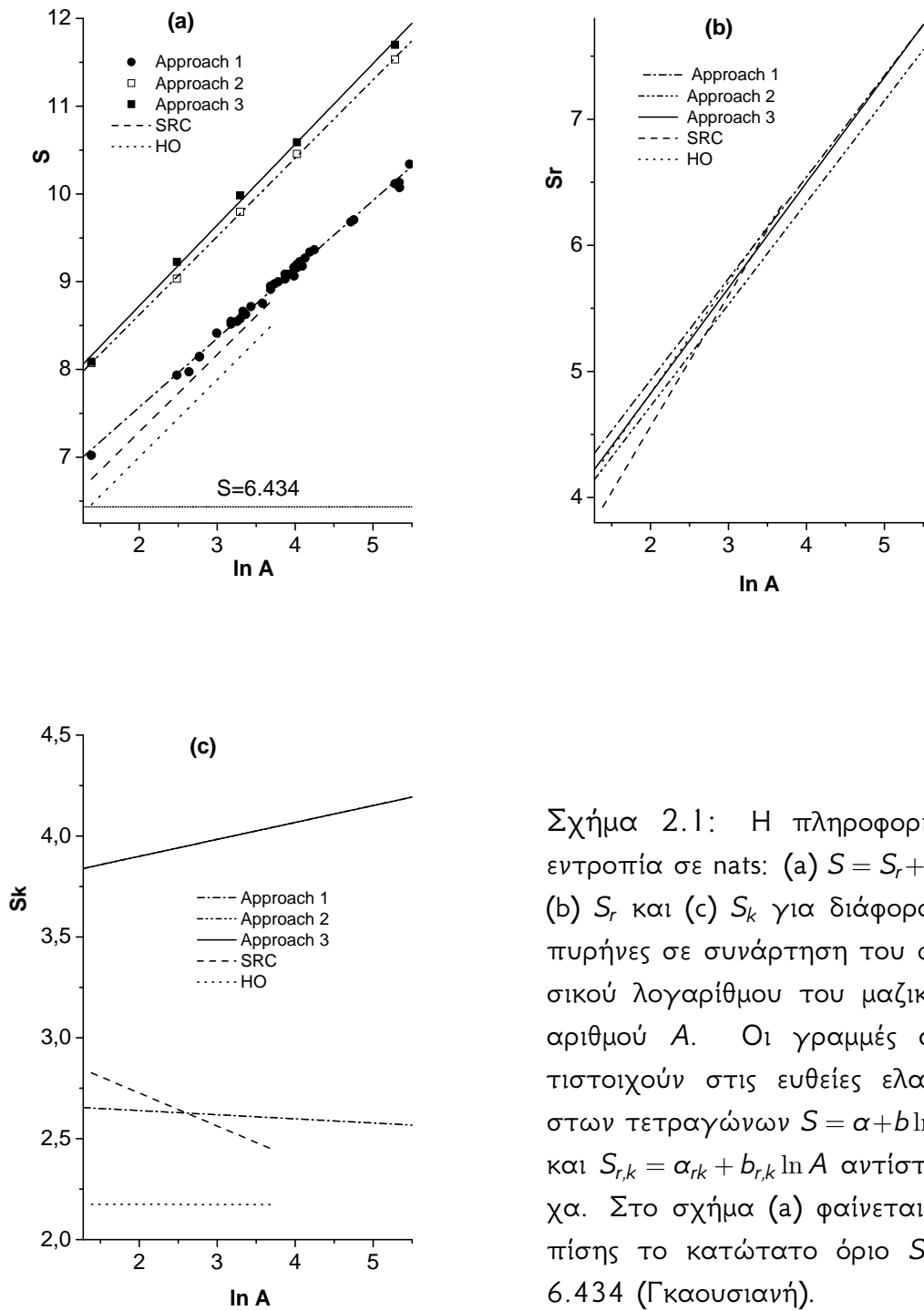
$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + wr^2/c^2}{1 + \exp[(r - c)/\alpha]} \quad (2.26)$$

με  $w = 0$  στις 2pF κατανομές. Επίσης χρησιμοποιήσαμε τις συμμετρικές κατανομές Fermi από την αναφορά [43]

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\sinh(c/\alpha)}{\cosh(r/\alpha) + \cosh(c/\alpha)}. \quad (2.27)$$

Ο λόγος που αποφύγαμε άλλες φαινομενολογικές κατανομές είναι ότι εμφανίζονται συνήθως ταλαντώσεις στην κεντρική περιοχή της πυκνότητας του πυρήνα με αποτέλεσμα να μην ισχύει ο περιορισμός  $d\rho/dr \leq 0$ . Αυτό δεν συμβαίνει με τις κατανομές Fermi. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο περιορισμός αυτός είναι αναγκαίος για να εξαχθεί η κατανομή της ορμής από την κατανομή της πυκνότητας με τη βοήθεια του CDFM. Από τις κατανομές αυτές και την εξίσωση (2.21) υπολογίστηκαν οι κατανομές των ορμών των ίδιων πυρήνων και στη συνέχεια οι πληροφοριακές εντροπίες  $S_r$ ,  $S_k$  και  $S$  από τις σχέσεις (2.22). Οι τιμές των  $S_r$ ,  $S_k$  και  $S$  φαίνονται στο σχήμα (2.1).

Στη δεύτερη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν οι “πειραματικές” τιμές της κατανομής της ορμής για τους πυρήνες  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ , και  $^{197}\text{Au}$  [45] και με τη βοήθεια της σχέσης (2.25) οι αντίστοιχες κατανομές της πυκνότητας. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις σχέσεις (2.22) υπολογίστηκαν οι πληροφοριακές εντροπίες που φαίνονται στο σχήμα (2.1).



Σχήμα 2.1: Η πληροφορική εντροπία σε nats: (a)  $S = S_r + S_k$ , (b)  $S_r$  και (c)  $S_k$  για διάφορες πυρήνες σε συνάρτηση του φυσικού λογαρίθμου του μαζικού αριθμού  $A$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στις ευθείες ελαχίστων τετραγώνων  $S = \alpha + b \ln A$  και  $S_{r,k} = \alpha_{r,k} + b_{r,k} \ln A$  αντίστοιχα. Στο σχήμα (a) φαίνεται επίσης το κατώτατο όριο  $S = 6.434$  (Γκαουσιανή).

Στην τρίτη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν οι φαινομενολογικές κατανομές της πυκνότητας για τους πυρήνες  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ , και  $^{197}\text{Au}$  όπως στην πρώτη προσέγγιση και οι αντίστοιχες κατανομές της ορμής όπως στη δεύτερη προσέγγιση. Με τις κατανομές αυτές υπολογίστηκαν τα  $S_r$ ,  $S_k$  και  $S$  που φαίνονται στο σχήμα (2.1).

Από τις τιμές του πληροφοριακού αθροίσματος  $S = S_r + S_k$  που υπολογίστηκαν με τις τρεις προσεγγίσεις και φαίνονται στο σχήμα (2.1) βγαίνει το συμπέρασμα ότι υπάρχει μία γραμμική εξάρτηση της  $S$  από το λογάριθμο του μαζικού αριθμού  $A$  των πυρήνων

$$S = S_r + S_k = \alpha + b \ln A. \quad (2.28)$$

Η ίδια σχέση ισχύει για τις επιμέρους πληροφοριακές εντροπίες  $S_r$  και  $S_k$

$$S_{r,k} = \alpha_{r,k} + b_{r,k} \ln A. \quad (2.29)$$

Πίνακας 2.1: Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\alpha_{r,k}$ ,  $b_{r,k}$ ,  $\alpha_v$ , και  $b_v$  των εξισώσεων (2.28), (2.29), και (2.30) για τις διάφορες περιπτώσεις.

Περίπτωση	$\alpha$	$b$	$\alpha_r$	$b_r$
HO	5.2391	0.8816	3.0633	0.8822
SRC	5.5330	0.8778	2.4807	1.0409
Προσέγγιση 1	6.0011	0.7847	3.3205	0.8053
Προσέγγιση 2	6.8396	0.8919	3.1078	0.8080
Προσέγγιση 3	6.8845	0.9201	3.1527	0.8362
Περίπτωση	$\alpha_k$	$b_k$	$\alpha_v$	$b_v$
HO	2.1758	-0.0006	3.4783	0.9472
SRC	3.0524	-0.1631	4.2723	0.8512
Προσέγγιση 1	2.6807	-0.0205	4.1166	0.9272
Προσέγγιση 2	3.7318	0.0836	2.0255	1.3969
Προσέγγιση 3	3.7318	0.0839	4.8413	1.0635

Οι παράμετροι  $a$ ,  $b$  και  $\alpha_{r,k}$ ,  $b_{r,k}$  των γραμμικών σχέσεων βρέθηκαν με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων μεταξύ των τιμών που μας δίνουν οι εξισώσεις (2.28) και (2.29) και των αντίστοιχων τιμών που προέκυψαν από τις τρεις προσεγγίσεις. Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων αυτών φαίνονται στον πίνακα (2.1) ενώ οι αντίστοιχες γραμμές στο σχήμα (2.1).

Για να υπάρχει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα, παρατίθενται στον πίνακα (2.1) οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων  $a$  και  $b$  και στο σχήμα (2.1) οι αντίστοιχες καμπύλες των γραμμικών σχέσεων (2.28) και (2.29) για την περίπτωση του προτύπου του αρμονικού ταλαντωτή και των συσχετισμένων πινάκων πυκνότητας ενός σωματιδίου [19]. Σε όλες τις περιπτώσεις οι κατανομές της πυκνότητας και της ορμής είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα.

Οι διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν μπορούν να ταξινομηθούν με βάση την ποσότητα των πειραματικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν ή με την τιμή της πληροφοριακής εντροπίας  $S = S_r + S_k$  που υπολογίστηκε.

Στο πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή υπάρχει μία ελεύθερη παράμετρος, που μπορεί να υπολογισθεί ή με την απαίτηση η υπολογιζόμενη μέση τετραγωνική ακτίνα του φορτίου να συμπίπτει με την αντίστοιχη πειραματική τιμή ή με προσαρμογή του θεωρητικού παράγοντα μορφής (form factor)  $F_{ch}(q)$  στα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η παράμετρος υπολογίστηκε με το δεύτερο τρόπο [19]. Στις δύο δυνατότητες προσδιορισμού της παραμέτρου του αρμονικού ταλαντωτή αναπαράγονται μόνο δεδομένα για μικρές τιμές της μεταφερόμενης ορμής και κανένα (όπως στο  $^4\text{He}$ ) ή μόνο το ένα ελάχιστο περίθλασης κατά τη σκέδαση ηλεκτρονίων από πυρήνες. Η εισαγωγή των συσχετίσεων μικρής εμβέλειας στο πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή εισάγει μια επιπλέον παράμετρο. Οι δύο ελεύθερες παράμετροι, δηλαδή η παράμετρος του αρμονικού ταλαντωτή και η παράμετρος των συσχετίσεων, προσδιορίζονται με προσαρμογή του  $F_{ch}(q)$  στα πειραματικά δεδομένα. Στην περίπτωση αυτή αναπαράγονται περισσότερα ελάχιστα περίθλασης από ότι στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή. Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζεται

και στις τιμές της  $S = S_r + S_k$ . Η ανισότητα

$$S_{\text{SRC}} > S_{\text{HO}}$$

ισχύει για όλους τους πυρήνες s-, p-, και sd- φλοιών που εξετάστηκαν.

Στην πρώτη προσέγγιση που αναφέρθηκε στην αρχή του εδαφίου, ως κατανομές πυκνότητας των νουκλεονίων χρησιμοποιήθηκαν φαινομενολογικές κατανομές Fermi που προκύπτουν από την ανάλυση πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από πυρήνες. Οι κατανομές αυτές, που δίνουν τη δυνατότητα μελέτης πυρήνων από  ${}^4\text{He}$  μέχρι  ${}^{238}\text{U}$ , περιγράφουν τα πειραματικά δεδομένα καλύτερα από ότι οι κατανομές πυκνότητας που προκύπτουν από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Αυτό αντικατοπτρίζεται και στις τιμές της  $S = S_r + S_k$ . Η ανισότητα

$$S_{\text{approach1}} > S_{\text{SRC}}$$

ισχύει για όλους τους πυρήνες s-, p-, και sd- φλοιών που εξετάστηκαν.

Στην δεύτερη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν “πειραματικές” τιμές της κατανομής της ορμής των νουκλεονίων. Στην περίπτωση αυτή η φαινομενολογική μελέτη των πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από πυρήνες γίνεται όχι μόνο για χαμηλές και ενδιάμεσες τιμές της μεταφερόμενης ορμής, όπως και στις δύο προηγούμενες μεθόδους, αλλά και για μεγάλες τιμές της μεταφερόμενης ορμής [45]. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συνεισφορά της  $S_k$  στο άθροισμα  $S_r + S_k$  να είναι αυξημένη. Παρατηρείται ότι ισχύει η ανισότητα

$$S_{\text{approach2}} > S_{\text{approach1}}$$

για τους πέντε πυρήνες που εξετάστηκαν και για τους οποίους υπάρχουν “πειραματικά” δεδομένα της κατανομής της ορμής.

Στην τρίτη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν φαινομενολογικές κατανομές τόσο της πυκνότητας όσο και της ορμής [42, 43, 45]. Οι υπολογισμοί δείχνουν (βλέπε σχήμα 2.1a) ότι οι τιμές της πληροφοριακής εντροπίας  $S = S_r + S_k$  είναι μεγαλύτερες από ότι στην προηγούμενη προσέγγιση όπου χρησιμοποιήθηκαν μόνο “πειραματικές” τιμές της κατανομής της ορμής.

Επομένως μπορεί να συμπεράνουμε “με ασφάλεια” ότι η αύξηση των πειραματικών δεδομένων ή η ποιότητα των κατανομών της πυκνότητας και της ορμής οδηγούν σε αύξηση της πληροφοριακής εντροπίας. Εφόσον οι κατανομές της πυκνότητας και της ορμής που προκύπτουν από περισσότερα πειραματικά δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ως “ανεπηρέαστες” (unbiased), το παραπάνω συμπέρασμα βρίσκεται σε συμφωνία με την αρχή της μέγιστης εντροπίας. Μια ακόμα χαρακτηριστική ιδιότητα της  $S = S_r + S_k$  προκύπτει από το σχήμα (2.1a). Όλες οι ευθείες  $S_{\text{model}} = \alpha_{\text{model}} + b_{\text{model}} \ln A$  είναι σχεδόν παράλληλες, έχουν σχεδόν την ίδια κλίση. Αυτό φαίνεται και από τον πίνακα (2.1), όπου φαίνεται ότι οι τιμές της παραμέτρου  $b$  που καθορίζουν την κλίση των γραμμών μεταβάλλονται στο διάστημα 0.79-0.92. Οι τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  μεταβάλλονται από 5.24 στο πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή μέχρι 6.88 στην τρίτη προσέγγιση. Παρατηρείται επομένως ότι υπάρχει μια κλιμάκωση στις τιμές της  $S = S_r + S_k$  που οφείλεται στην αύξηση των πειραματικών δεδομένων ή διαφορετικά στην ποιότητα-ποσότητα των συσχετίσεων μεταξύ των νουκλεονίων του πυρήνα που εισάγουμε. Η εισαγωγή των επιπλέον συσχετίσεων σε σχέση με το πλήρες ασυσχέτιστο πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή επηρεάζει κυρίως τις τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .

Από τα σχήματα (2.1b) και (2.1c) και από τις τιμές των παραμέτρων  $b_r$  και  $b_k$ , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η  $S_r$  εξαρτάται ισχυρά από τον  $\ln A$  ενώ η  $S_k$  δεν εξαρτάται. Επομένως η γραμμική εξάρτηση της  $S$  από το  $\ln A$  προέρχεται κυρίως από το χώρο των θέσεων. Η ισχυρή εξάρτηση της  $S_r$  από το  $\ln A$  πρέπει να σχετίζεται με τον όγκο του πυρήνα στον οποίο είναι εγκλωβισμένα τα νουκλεόνια. Η ασθενής εξάρτηση της  $S_k$  από το  $\ln A$  σχετίζεται με το γεγονός ότι η κατανομή της ορμής για μεγάλες τιμές του  $k$  ( $k \geq 1.5 \text{ fm}^{-1}$ ) είναι ανεξάρτητη του μαζικού αριθμού  $A$  του πυρήνα [44, 45, 49].

Είναι χρήσιμο να γίνουν και οι παρακάτω παρατηρήσεις. Από το σχήμα (2.1b) φαίνεται ότι οι τιμές της  $S_r$  δεν εξαρτώνται ισχυρά από το πρότυπο που χρησιμοποιήθηκε. Η σχετική διαφορά των τιμών της  $S_r$  μεταξύ των



διαφόρων προτύπων είναι μικρότερη του 10%. Αντίθετα η  $S_k$  όπως φαίνεται από το σχήμα (2.1c) εξαρτάται ισχυρά από το πρότυπο. Η  $S_k$  αυξάνει όταν λαμβάνονται υπόψη πειραματικά δεδομένα, από τη σκέδαση ηλεκτρονίων από πυρήνες, μεγάλης τιμής μεταφερόμενης ορμής, τα οποία συνδέονται με τις συσχετίσεις μικρής εμβέλειας. Η σχετική διαφορά των τιμών της  $S_k$  μεταξύ των διαφόρων προτύπων που χρησιμοποιήθηκαν είναι της τάξεως του 50%.

Τέλος από το σχήμα (2.1a) φαίνεται ότι η προσαρμογή της σχέσης  $S = \alpha + b \ln A$  στα σημεία που αντιστοιχούν στους πέντε πυρήνες που εξετάστηκαν στις προσεγγίσεις 2 και 3 είναι πολύ καλή. Αυτό δεν συμβαίνει στην προσέγγιση 1. Στην περίπτωση αυτή, ενώ τα περισσότερα σημεία συμπίπτουν με την καμπύλη  $S = S(A)$ , υπάρχουν και κάποια που αντιστοιχούν στους πυρήνες  $^{14}\text{N}$ ,  $^{27}\text{Al}$  και  $^{209}\text{Bi}$ , τα οποία είναι σχετικά μακριά από την καμπύλη. Αυτές όμως οι αποκλίσεις είναι μέσα στα αποδεκτά σφάλματα των παραμέτρων των αντιστοιχών κατανομών Fermi. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανομή  $2pF$  του πυρήνα  $^{209}\text{Bi}$  αναπαράγει τα δεδομένα ενός πειράματος σκέδασης χαμηλής μεταφερόμενης ορμής με εύρος  $q=0.07-0.53 \text{ fm}^{-1}$  [42].

### 2.2.1 Σύγκριση πειραμάτων διαφορετικού εύρους μεταφερόμενης ορμής

Είναι χρήσιμο να συνεχιστεί η προηγούμενη συζήτηση εξετάζοντας τις υπολογιζόμενες τιμές της  $S = S_r + S_k$  που προκύπτουν από διαφορετικές φαινομενολογικές κατανομές της πυκνότητας για διαφορετικά πειράματα για τον ίδιο πυρήνα.

Στην [42] υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες διάφορες κατανομές  $2pF$  και  $3pF$  προκύπτουν από την ανάλυση διαφορετικών πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από τον ίδιο πυρήνα. Οι αποκλίσεις κάποιων σημείων από την ευθεία  $S = \alpha + b \ln A$  του σχήματος (2.1a) στην περίπτωση της πρώτης προσέγγισης οδηγούν στην εξέταση διαφόρων κατανομών της πυκνότητας

για τον ίδιο πυρήνα, συγκρίνοντας τις υπολογιζόμενες τιμές της  $S$ . Στον πίνακα (2.2) φαίνονται οι υπολογιζόμενες τιμές της  $S$  για διάφορους πυρήνες με κατανομές Fermi από την ανάλυση διαφόρων πειραμάτων σκέδασης και οι αντίστοιχες τιμές του εύρους της μεταφερόμενης ορμής.

Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις βρέθηκε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος των τιμών του  $q$  (της μεταφερόμενης ορμής), τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της  $S$  του ίδιου πυρήνα. Από όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν βρέθηκαν μόνο τρεις εξαιρέσεις στους πυρήνες  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{150}\text{Nd}$  και  $^{238}\text{U}$ , που μπορούν να ερμηνευτούν ως εξής:

Στον πυρήνα  $^{150}\text{Nd}$ , οι τιμές της  $S$  που αντιστοιχούν σε  $q=0.22-0.73 \text{ fm}^{-1}$  είναι μεγαλύτερες από αυτές που αντιστοιχούν σε  $q=0.37-2.29 \text{ fm}^{-1}$ , ενώ θα έπρεπε να συμβεί το αντίθετο. Ο λόγος είναι ότι η ανάλυση των δεδομένων της σκέδασης στη δεύτερη περίπτωση έγινε με μία “παραμορφωμένη” κατανομή Fermi [42] κάτι το οποίο δεν πήραμε υπόψη στους υπολογισμούς μας.

Τον ίδιο λόγο μπορούμε να αναφέρουμε για την εξαίρεση από τον κανόνα στην περίπτωση του πυρήνα  $^{238}\text{U}$ , όπου η τιμή της  $S$  για  $q=0.46-2.08 \text{ fm}^{-1}$  είναι μικρότερη από την τιμή της  $S$  για  $q=0.37-0.97 \text{ fm}^{-1}$ , ενώ έπρεπε να συμβεί το αντίθετο.

Στο  $^{24}\text{Mg}$  η κατανομή Fermi τριών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση των πειραμάτων με μεταφερόμενη ορμή εύρους  $q=0.58-1.99 \text{ fm}^{-1}$  και  $q=0.74-3.46 \text{ fm}^{-1}$  δίνει κατανομές ηλεκτρικού φορτίου που μηδενίζονται για σχετικά μικρές τιμές της ακτίνας ( $r \simeq 7 \text{ fm}^{-1}$ ). Αυτό δεν συμβαίνει για την κατανομή Fermi δύο παραμέτρων με μεταφερόμενη ορμή  $q=0.20-1.15 \text{ fm}^{-1}$ . Σε αυτή την περίπτωση η κατανομή μηδενίζεται σε πολύ μεγαλύτερες τιμές της  $r$ . Η ύπαρξη του λογαρίθμου στο ολοκλήρωμα, κάνει την πληροφοριακή εντροπία ευαίσθητη στην “ουρά” της κατανομής της πυκνότητας. Αυτή η διαφορά θα μπορούσε να εξαλειφθεί αν χρησιμοποιούνταν τα σφάλματα των παραμέτρων.

Από την παραπάνω συζήτηση αλλά και από αυτήν του προηγούμενου εδάφιου συμπεραίνεται ότι το πληροφοριακό άθροισμα μπορεί να χρησιμο-

Πίνακας 2.2: Οι τιμές της πληροφοριακής εντροπίας για διάφορους πυρήνες κατά την προσέγγιση 1. Οι υπολογισμοί έγιναν με τις φαινομενολογικές κατανομές  $2\rho F$  ή/και  $3\rho F$  της [42].

Πυρήνας	$S$ [nats]	q-range [fm <sup>-1</sup> ]	Πυρήνας	$S$ [nats]	q-range [fm <sup>-1</sup> ]
<sup>19</sup> F	8.3890	0.55-1.01	<sup>64</sup> Zn	9.2948	0.30-1.09
<sup>19</sup> F	8.3947	0.46-1.79	<sup>64</sup> Zn	9.2603	0.15-0.79
<sup>20</sup> Ne	8.3977	0.22-1.04	<sup>66</sup> Zn	9.3376	0.96-1.63
<sup>20</sup> Ne	8.4137	0.21-1.12	<sup>66</sup> Zn	9.2881	0.15-0.79
<sup>20</sup> Ne	8.4262	0.49-1.80	<sup>68</sup> Zn	9.3253	0.96-1.63
<sup>24</sup> Mg	8.5162	0.58-1.99	<sup>68</sup> Zn	9.2920	0.15-0.79
<sup>24</sup> Mg	8.4660	0.74-3.46	<sup>70</sup> Zn	9.3643	0.30-1.09
<sup>24</sup> Mg	8.5175	0.20-1.15	<sup>70</sup> Zn	9.3245	0.15-0.79
<sup>50</sup> Cr	9.0200	0.15-0.79	<sup>142</sup> Nd	9.8978	0.55-2.97
<sup>50</sup> Cr	9.0829	0.97-1.62	<sup>142</sup> Nd	9.8211	0.23-0.59
<sup>52</sup> Cr	9.0243	0.15-0.79	<sup>142</sup> Nd	9.8762	0.22-0.73
<sup>52</sup> Cr	9.0860	0.97-1.62	<sup>146</sup> Nd	9.9897	0.55-2.97
<sup>54</sup> Cr	9.0951	0.15-0.79	<sup>146</sup> Nd	9.8871	0.22-0.73
<sup>54</sup> Cr	9.1623	0.97-1.62	<sup>150</sup> Nd	10.0284	0.55-2.97
<sup>54</sup> Fe	9.0633	0.15-0.79	<sup>150</sup> Nd	9.9305	0.22-0.73
<sup>54</sup> Fe	9.1014	0.97-1.62	<sup>150</sup> Nd	9.8638	0.37-2.29
<sup>56</sup> Fe	9.1113	0.15-0.79	<sup>238</sup> U	10.2478	0.37-0.97
<sup>56</sup> Fe	9.1585	0.97-1.62	<sup>238</sup> U	10.2267	0.46-2.08

ποιηθεί για την σύγκριση της ανάλυσης των πειραμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από τον ίδιο πυρήνα και να προτιμηθεί ως πιο αξιόπιστη αυτή που οδηγεί σε μεγαλύτερο πληροφοριακό άθροισμα.

## 2.3 Η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από το μέσο όγκο ενός πυρήνα

Επειδή για μία δοσμένη κατανομή πυκνότητας αντιστοιχεί συγκεκριμένος μέσος όγκος και συγκεκριμένη πληροφοριακή εντροπία είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί γραφικά η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από τον όγκο του συστήματος, που στην περίπτωση σφαιρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$V = \frac{4\pi}{3} \langle r^2 \rangle^{3/2} = \frac{4\pi}{3} \left[ 4\pi \int_0^\infty r^4 \rho(r) dr \right]^{3/2}.$$

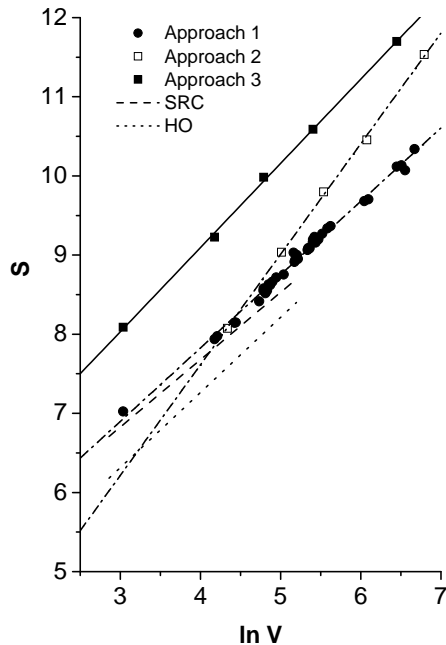
Στο σχήμα (2.2) φαίνεται η εξάρτηση της  $S$  ως συνάρτηση του όγκου του πυρήνα για τις διάφορες μεθόδους που εξετάστηκαν. Παρατηρείται ότι υπάρχει μία γραμμική σχέση της πληροφοριακής εντροπίας με το λογάριθμο του όγκου του συστήματος

$$S = \alpha_V + b_V \ln V. \quad (2.30)$$

Οι σταθερές  $\alpha_V$  και  $b_V$  που φαίνονται στον πίνακα (2.1) προσδιορίστηκαν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Η ίδια περίπου κλίση των ευθειών που προκύπτουν από τις προσεγγίσεις 1 και 3 οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες κατανομές πυκνότητας από τις αναφορές [42, 43]. Η διαφορετική κλίση της ευθείας που προκύπτει από την προσέγγιση 2 οφείλεται στον προσδιορισμό της κατανομής της πυκνότητας από την κατανομή της ορμής των πέντε πυρήνων με τη βοήθεια του CDFM.

Είναι γνωστό [51] ότι για οποιαδήποτε κατανομή (κλασική ή κβαντική, διακριτή ή συνεχή) υπάρχει ένα μέτρο του “όγκου” που καταλαμβάνεται



Σχήμα 2.2: Οι πληροφορικές εντροπίες σε nats για διάφορους πυρήνες σε συνάρτηση με τον μέσο όγκο του πυρήνα. Οι ευθείες γραμμές αντιστοιχούν στην έκφραση  $S = a_V + b_V \ln V$ .

από το στατιστικό σύνολο, το οποίο είναι συμβατό με τις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες. Ο όγκος αυτός ονομάζεται “όγκος του στατιστικού συνόλου” και δίνει μία καθολική επιλογή ή ένα απευθείας μέτρο της αβεβαιότητας του συστήματος. Το μέτρο αυτό παρουσιάζει πλεονεκτήματα όταν γίνεται σύγκριση του εύρους δύο στατιστικών συνόλων του ίδιου τύπου. Μπορεί ναδειχθεί ότι ο όγκος του στατιστικού συνόλου είναι ανάλογος του εκθετικού της εντροπίας του στατιστικού συνόλου

$$V_{\text{ensemble}} = K e^S. \quad (2.31)$$

Η σταθερά  $K$  είναι μία σταθερά κανονικοποίησης και σχετίζεται με το γεγονός ότι μόνο σχετικοί όγκοι παρουσιάζουν ενδιαφέρον όταν συγκρίνονται διαφορετικά στατιστικά σύνολα.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.31), η σχέση του Gibbs

$$S_{\text{therm}} = kS$$

ανάμεσα στη θερμοδυναμική εντροπία και την εντροπία ενός στατιστικού

συνόλου σε ισορροπία μπορεί να γραφεί

$$S_{\text{therm}} = k \ln[V_{\text{ensemble}}/K]. \quad (2.32)$$

Δηλαδή, η θερμοδυναμική εντροπία, μαζί με μία πρόσθετη σταθερά, είναι ανάλογη του λογαρίθμου του στατιστικού όγκου. Με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.30) μπορεί να επεκταθεί η πρόταση αυτή μεταξύ της πληροφοριακής εντροπίας ενός πυρήνα και του μέσου όγκου του.

Αν θεωρηθεί η πληροφοριακή εντροπία  $S$  ενός πυρήνα ως η  $S_{\text{ensemble}}$  του πυρήνα και αντικατασταθεί το

$$S = S_r + S_k = \alpha + b \ln A \quad (2.33)$$

θέτοντας  $K = 1$ , παίρνουμε

$$V_{\text{ensemble}} = cA^b, \quad c = e^\alpha. \quad (2.34)$$

Δηλαδή ο  $V_{\text{ensemble}}$  ενός πυρήνα είναι ανάλογος του  $A^b$ .

Από προηγούμενες μελέτες είναι γνωστό ότι η εξίσωση  $S = \alpha + b \ln A$  είναι μία ιδιότητα των φερμιονικών συστημάτων (ηλεκτρόνια σε άτομα ή μεταλλικά συσσωματώματα και νουκλεόνια σε πυρήνες) καθώς και σε συζευγμένα μποζόνια σε παγίδα δυναμικού [5, 9, 11, 12]. Επομένως η εξίσωση (2.34) θα ισχύει στα συστήματα αυτά.

Από τη γραμμική εξάρτηση της  $S$  από το λογάριθμο του μέσου όγκου του πυρήνα και από την εξίσωση (2.31) μπορεί να βρεθεί μία σχέση μεταξύ του  $V_{\text{ensemble}}$  και του μέσου όγκου του πυρήνα

$$V_{\text{ensemble}} = c_V V^{b_V}, \quad c_V = e^{\alpha_V}. \quad (2.35)$$

Δηλαδή, ο  $V_{\text{ensemble}}$  είναι ανάλογος του  $V^{b_V}$ .

Από τις τρεις προσεγγίσεις που εξετάστηκαν η πρώτη και η τρίτη είναι οι περισσότερο αξιόπιστες επειδή βασίζονται σε “πειραματικές” κατανομές της πυκνότητας. Επειδή σε αυτές τις προσεγγίσεις οι τιμές της παραμέτρου  $b_V$  είναι κοντά στη μονάδα (βλέπε πίνακα (1.1)) μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι ο  $V_{\text{ensemble}}$  του πυρήνα είναι ανάλογος του μέσου όγκου του.

## 2.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκαν η πληροφοριακή εντροπία των πυρήνων στο χώρο των θέσεων και στο χώρο των ορμών καθώς και το άθροισμά τους. Η μελέτη έγινε με τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας φαινομενολογικές κατανομές πυκνότητας ή/και ορμής των πυρήνων.

Στην πρώτη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν κατανομές πυκνότητας τύπου Fermi, που προκύπτουν από πειράματα σκέδασης ηλεκτρονίων από διάφορους πυρήνες ( $^4\text{He}$  μέχρι  $^{238}\text{U}$ ) [42, 43]. Οι κατανομές της ορμής για τους πυρήνες αυτούς βρέθηκαν με τη βοήθεια του CDFM [47, 48, 49, 50]. Στη δεύτερη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν φαινομενολογικές κατανομές της ορμής πέντε πυρήνων ( $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ , και  $^{197}\text{Au}$ ) [45] που προκύπτουν από την ανάλυση του φαινομένου *superscaling* και εφαρμογή του CDFM. Στην τρίτη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκαν οι κατανομές πυκνότητας των πέντε πυρήνων όπως στην πρώτη προσέγγιση και οι κατανομές της ορμής όπως στη δεύτερη προσέγγιση.

Βρέθηκε ότι και στις τρεις προσεγγίσεις οι πληροφοριακές εντροπίες εξαρτώνται γραμμικά από το λογάριθμο του μαζικού αριθμού των πυρήνων

$$S_{r,k} = \alpha_{r,k} + b_{r,k} \ln A, \quad S = \alpha + b \ln A.$$

Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες σε φερμιονικά συστήματα.

Οι τιμές της πληροφοριακής εντροπίας που βρέθηκαν στις τρεις προσεγγίσεις συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες που προκύπτουν με το πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή και με συσχετισμένους (με συσχετίσεις μικρής εμβέλειας) πίνακες πυκνότητας.

Για όλους τους πυρήνες που μελετήθηκαν και για όλες τις μεθόδους ισχύει:

$$S_{\text{HO}} < S_{\text{SRC}} < S_{\text{approach1}} < S_{\text{approach2}} < S_{\text{approach3}}.$$

Δηλαδή οι διάφορες περιπτώσεις που μελετήθηκαν μπορούν να ταξινομηθούν είτε με την ποσότητα των πειραματικών δεδομένων που αναπαρά-

γονται είτε με τις τιμές του πληροφοριακού αθροίσματος. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι η αύξηση της ποιότητας των κατανομών της πυκνότητας και της ορμής οδηγεί σε αύξηση του πληροφοριακού αθροίσματος  $S = S_r + S_k$  σύμφωνα με την αρχή της μέγιστης εντροπίας.

Βρέθηκε επίσης ότι ενώ η  $S_k$  εξαρτάται ισχυρά από το πρότυπο που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της κατανομής της ορμής, η  $S_r$  είναι σχεδόν ανεξάρτητη του προτύπου.

Ως αποτέλεσμα της ιδιότητας αυτής προκύπτει ότι η  $S = S_r + S_k$  εξαρτάται γραμμικά από το μέσο όγκο στον οποίο είναι εγκλωβισμένα τα νουκλεόνια. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι για στατιστικά συστήματα σε ισορροπία η θερμοδυναμική εντροπία είναι ανάλογη του στατιστικού όγκου του συστήματος. Έτσι αν θεωρηθεί η πληροφοριακή εντροπία  $S$  ως  $S_{\text{ensemble}}$  μπορεί να γίνει σύνδεση του  $V_{\text{ensemble}}$  με το μαζικό αριθμό του πυρήνα ή με το μέσο όγκο του πυρήνα.

Τέλος η σύγκριση των τιμών της  $S$  για τον ίδιο πυρήνα, για τον οποίο οι φαινομενολογικές κατανομές πυκνοτήτων προκύπτουν από διαφορετικές αναλύσεις πειραμάτων σκέδασης, μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή της πιο αξιόπιστης ανάλυσης.



## Κεφάλαιο 3

# Η πληροφοριακή εντροπία των αντιδράσεων $(n, A)$ και $(p, A)$

Η κατανομή της πυκνότητας του ηλεκτρικού φορτίου του πυρήνα και επομένως η κατανομή της πυκνότητας των πρωτονίων των πυρήνων είναι γνωστές με ακρίβεια από την ανάλυση της ελαστικής σκέδασης  $(e, A)$  και από τα μιονικά άτομα [42]. Μπορούν επίσης να υπολογιστούν με θεωρητικές μεθόδους (μέθοδος Hartree-Fock). Η κατανομή όμως της πυκνότητας της πυρηνικής ύλης (πρωτονίων και νετρονίων) των πυρήνων είναι λιγότερο γνωστή κυρίως λόγω της μη καλής γνώσης των πυρηνικών δυνάμεων σε σύγκριση με την ηλεκτρομαγνητική δύναμη. Υπάρχουν όμως “πειραματικές” κατανομές της πυρηνικής ύλης που προέρχονται από την ανάλυση αντιδράσεων  $(n, A)$ ,  $(p, A)$  και  $A(\gamma, \pi^0)A$  [52, 53, 54, 55, 56].

Όπως διαπιστώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon συνδέεται με το μέσο όγκο ενός πυρήνα. Είναι επομένως χρήσιμο να οριστεί μια αντίστοιχη πληροφοριακή εντροπία στην περίπτωση των αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$ . και να εξεταστεί αν είναι δυνατό να βγουν συμπεράσματα για το μέσο όγκο του πυρήνα. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχει βρεθεί μια μέθοδος υπολογισμού της ακτίνας της πυρηνικής ύλης.

Στη συνέχεια θα αναφερθούν με συντομία ορισμένα χαρακτηριστικά της σκέδασης δύο σωματιδίων και πώς μπορεί να οριστεί η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon, αναδιατάσσοντας τους όρους της ολικής ενεργού διατομής.

### 3.1 Στοιχεία σκέδασης - πληροφοριακή εντροπία

Θεωρούμε τη σκέδαση δύο σωματιδίων με σπιν  $s_1$  και  $s_2$ . Η κυματοσυνάρτηση του σπιν των δύο σωματιδίων μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$|sm_s\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle s_1 s_2 m_1 m_2 | sm_s \rangle |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle, \quad (3.1)$$

όπου  $\langle s_1 s_2 m_1 m_2 | sm_s \rangle$  οι συντελεστές Clebsch-Gordan.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης που περιγράφει τη σκέδαση είναι της μορφής

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}, s, m_s) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} |sm_s\rangle + \sum_{s'm'_s} \frac{e^{ikr}}{r} |s'm'_s\rangle \langle s'm'_s | f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') | sm_s \rangle, \quad (3.2)$$

όπου  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  το πλάτος σκέδασης

$$\begin{aligned} \langle s'm'_s | f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') | sm_s \rangle = & i \frac{2\pi}{k} \sum_{l'j} \langle l' s' m'_s | jm_j \rangle \langle l s m_s | jm_j \rangle \\ & \times Y_{l', m'_s}^*(\mathbf{k}') Y_{l, m_s}(\mathbf{k}) [\delta_{l, l'} \delta_{ss'} - S_{l' s' l s}^j(k)]. \end{aligned}$$

Τα  $S_{l' s' l s}^j$  είναι τα στοιχεία πίνακα του πίνακα σκέδασης. Ο πίνακας αυτός περιγράφει τη διαδικασία της σκέδασης και της αντίδρασης. Το  $|S_{\beta, \alpha}|^2$  δίνει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα των δύο σωματιδίων, μετά την αλληλεπίδραση, στην κατάσταση  $\beta$  όταν αρχικά ήταν στην κατάσταση  $\alpha$ . Οι διάφοροι νόμοι διατήρησης θέτουν τους παρακάτω περιορισμούς στον πίνακα σκέδασης:

$$l + l' = \text{άρτιος}, \quad S = S^T, \quad (S_{l s, l' s'}^j = S_{l' s', l s}^j), \quad S S^\dagger = S^\dagger S = 1.$$

Στην περίπτωση του οπτικού δυναμικού ισχύει:  $SS^\dagger = S^\dagger S \neq 1$ . Τέλος η κατεύθυνση του εξερχόμενου κύματος ( $\mathbf{k}'$ ) συμπίπτει με την κατεύθυνση  $\mathbf{r}$ .

Το πλάτος σκέδασης συνδέεται με τη διαφορική ενεργό διατομή:

$$\frac{d\sigma(s', m'_s, s, m_s)}{d\Omega} = |\langle s' m'_s | f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') | s m_s \rangle|^2,$$

ενώ ο μέσος όρος ως προς όλες τις δυνατές τιμές των  $m_s$  και  $m'_s$  είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{m'_s, m_s} \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} |\langle s' m'_s | f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') | s m_s \rangle|^2. \quad (3.3)$$

Τέλος η ολική ενεργός διατομή, που προκύπτει με ολοκλήρωση της (3.3) ως προς όλες τις γωνίες, είναι

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l, l', j} \frac{(2j+1)}{(2s+1)(2s'+1)} |\delta_{ll'} \delta_{ss'} - S_{ls, l's'}^j|^2. \quad (3.4)$$

Η έκφραση της ολικής ενεργού διατομής μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\sigma = \sigma^{(el)} + \sigma^{(re)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{(el)} + \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{(re)}, \quad (3.5)$$

όπου

$$\begin{aligned} \sigma_l^{(el)} &= \frac{\pi}{k^2} [(l+1)|1 - \eta_l^+|^2 + l|1 - \eta_l^-|^2], \\ \sigma_l^{(re)} &= \frac{\pi}{k^2} [(l+1)(1 - |\eta_l^+|^2) + l(1 - |\eta_l^-|^2)]. \end{aligned}$$

Τα  $\sigma_l^{(el)}$  και  $\sigma_l^{(re)}$  είναι οι (μερικές) ολικές ενεργές διατομές της σκέδασης του  $l$  μερικού κύματος και των δυνατών αντιδράσεων. Οι ποσότητες  $\eta_l^\pm$  είναι συμβολισμός του πίνακα σκέδασης στην περίπτωση που τα εισερχόμενα σωματίδια έχουν σπιν  $s_1 = 1/2$  και το σπιν του στόχου είναι  $s_2 = 0$ . Δηλαδή

$$\eta_l^\pm = S_l^{j=l\pm 1/2}. \quad (3.6)$$

Αν και τα δύο μέλη της (3.5) διαιρεθούν με  $\sigma$ , αυτή γράφεται με τη μορφή

$$\sum_{l=0}^{\infty} [p_l^{(el)} + p_l^{(re)}] = 1, \quad (3.7)$$

όπου

$$p_l^{(el)} = \frac{\sigma_l^{(el)}}{\sigma} \quad \text{και} \quad p_l^{(re)} = \frac{\sigma_l^{(re)}}{\sigma}.$$

Τα  $p_l^{(el)}$  εκφράζουν την πιθανότητα ελαστικής σκέδασης στο μερικό κύμα  $l$  και αντίστοιχα τα  $p_l^{(re)}$  για τους διαύλους της μη ελαστικής σκέδασης.

Για την κατανομή των πιθανοτήτων  $p_l^{(el)}$  και  $p_l^{(re)}$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) μπορούμε να ορίσουμε την πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon

$$S = - \sum_{l=0}^{\infty} [p_l^{(el)} \ln p_l^{(el)} + p_l^{(re)} \ln p_l^{(re)}]. \quad (3.8)$$

Λόγω της ύπαρξης πολλών πειραματικών και θεωρητικών δεδομένων σκέδασης διαφόρων σωματιδίων από πυρήνες, είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από διάφορα μεγέθη από τα οποία εξαρτάται η σκέδαση, όπως για παράδειγμα η ενέργεια σκέδασης και ο μαζικός αριθμός των πυρήνων. Η μελέτη αυτή, όπως θα δούμε στη συνέχεια δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τους πυρήνες.

## 3.2 Η πληροφοριακή εντροπία των αντιδράσεων

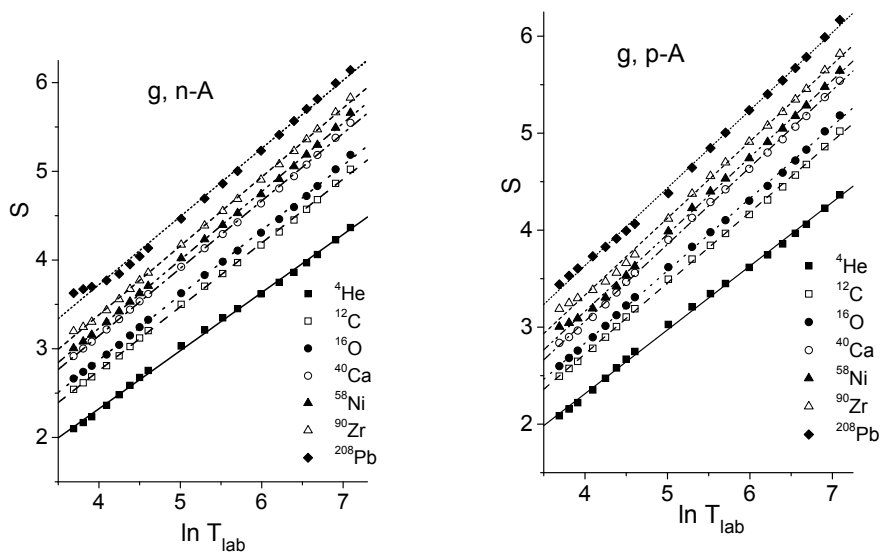
$(n, A), (p, A)$

Οι μερικές ολικές διατομές  $\sigma_l^{(el)}$ ,  $\sigma_l^{(re)}$  και η ολική ενεργός διατομή  $\sigma$  των ελαστικών διαύλων και των διαύλων αντίδρασης των αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$  υπολογίστηκαν λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις σκέδασης για τα δυναμικά νουκλεονίου-νουκλεονίου: Paris [57], Nijmegen-1, Nijmegen-93 [58] και τα δύο δυναμικά Argonne AV18 [59] που τα ονομάζουμε  $f_0$  και  $f_5$ . Η ανάλυση έγινε επίσης με τη μέθοδο του πίνακα  $G$  και τη μέθοδο του πίνακα μεταφοράς  $T$ . Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν 10 διαφορετικά θεωρητικά δεδομένα για κάθε αντίδραση  $(n, A)$  και  $(p, A)$ . Για το λόγο αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον να υπολογιστεί η πληροφοριακή εντροπία για όλες τις περιπτώσεις και να εξεταστεί αν υπάρχει κάποια συστηματική ως προς τις ενέργειες και ως προς το μαζικό αριθμό των πυρήνων.

### 3.2.1 Η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από την ενέργεια

Για τις αντιδράσεις  $(n, A)$  και  $(p, A)$ , όπου  $A$  οι πυρήνες  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{40}\text{Ca}$ ,  ${}^{58}\text{Ni}$ ,  ${}^{90}\text{Zr}$  και  ${}^{208}\text{Pb}$ , υπολογίστηκε η πληροφοριακή εντροπία για διάφορες τιμές της ενέργειας με τη βοήθεια των δυναμικών που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο εδάφιο και με τις μεθόδους  $G$  και  $T$ .

Οι τιμές της πληροφοριακής εντροπίας που υπολογίστηκαν για τις διάφορες αντιδράσεις  $(n, A)$  είναι σχεδόν οι ίδιες για τα πέντε δυναμικά που χρησιμοποιήθηκαν και για τις δύο μεθόδους  $G$  και  $T$ . Το ίδιο ισχύει και για τις αντιδράσεις  $(p, A)$ . Για το λόγο αυτό στο σχήμα (3.1) δίνουμε μόνο τα σημεία της πληροφοριακής εντροπίας που αντιστοιχούν στο δυναμικό  $f_0$  με τη μέθοδο  $G$  και για διάφορες αντιδράσεις.



Σχήμα 3.1: Η πληροφοριακή εντροπία  $S$  των αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$  ως συνάρτηση του λογαρίθμου της ενέργειας  $T_{lab}$ , για διάφορους πυρήνες με το δυναμικό  $f_0$  και τη μέθοδο  $G$  (σημεία στο σχήμα). Οι ευθείες αντιστοιχούν στην εξίσωση προσαρμογής (3.9) με τις τιμές των παραμέτρων του πίνακα (3.1)

Τα σημεία του σχήματος (3.1) μπορούν να προσαρμοστούν πολύ καλά με τη συνάρτηση

$$S_A(T_{lab}) = \alpha_A + b_A \ln T_{lab}, \quad (3.9)$$

όπου οι παράμετροι  $\alpha_A$  και  $b_A$  προσδιορίζονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και  $T_{lab}$  η ενέργεια της αντίδρασης στο σύστημα του εργαστηρίου. Η προσαρμογή έγινε για διάφορες ενέργειες στο διάστημα  $T_{lab} \in (40 - 1000) \text{ MeV}$ . Για ενέργειες  $T_{lab} < 40 \text{ MeV}$  η προσαρμογή δεν είναι πολύ καλή.

Πίνακας 3.1: Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha_A$  και  $b_A$  της συνάρτησης  $S_A(T_{lab})$  (σχέση (3.9)) των αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$  για το δυναμικό  $f_0$  και τη μέθοδο G.

A	(n, A)		(p, A)	
	$\alpha_A$	$b_A$	$\alpha_A$	$b_A$
$^4\text{He}$	-0,2974	0,6551	-0,3190	0,6583
$^{12}\text{C}$	-0,1255	0,7197	-0,1977	0,7306
$^{16}\text{O}$	-0,0515	0,7312	-0,1496	0,7463
$^{40}\text{Ca}$	0,1043	0,7605	-0,1171	0,7943
$^{58}\text{Ni}$	0,1476	0,7707	-0,0127	0,7940
$^{90}\text{Zr}$	0,2730	0,7772	0,1605	0,7926
$^{208}\text{Pb}$	0,6516	0,7678	0,4313	0,8010

Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha_A$  και  $b_A$  για διάφορες αντιδράσεις  $(n, A)$  και  $(p, A)$  δίνονται στον πίνακα (3.1). Παρατηρείται ότι η παράμετρος  $\alpha_A$  είναι αύξουσα συνάρτηση του μαζικού αριθμού, της μορφής

$$\alpha_A = \tilde{\alpha}_A + \tilde{b}_A A^c \quad (3.10)$$

με:  $\tilde{\alpha}_A = -0.4924$ ,  $\tilde{b}_A = 0.1290$ ,  $c = 0.4924$  για τις αντιδράσεις  $(n, A)$   
και  $\tilde{\alpha}_A = -0.3752$ ,  $\tilde{b}_A = 0.0363$ ,  $c = 0.5816$  για τις αντιδράσεις  $(p, A)$ .

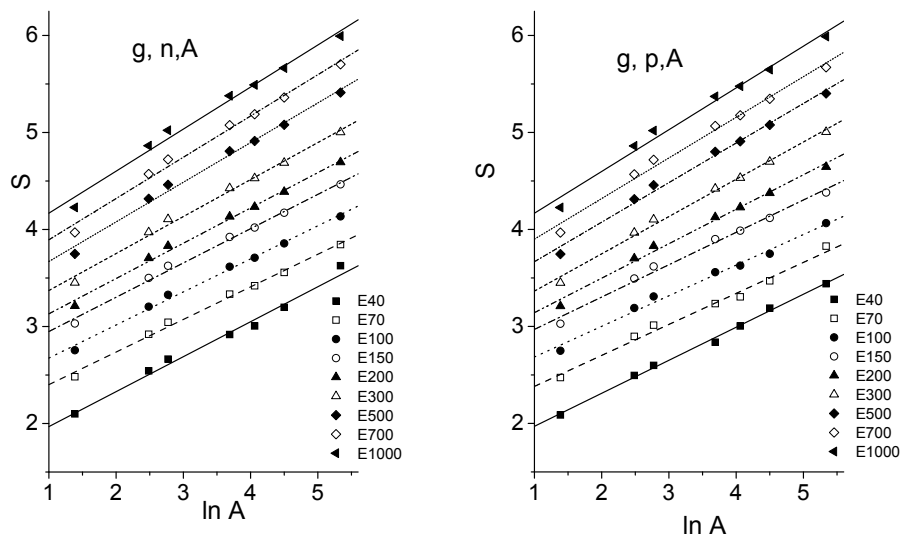
Η παράμετρος  $b_A$  είναι σχεδόν ανεξάρτητη του  $A$  αλλά και από το είδος της αντίδρασης όπως φαίνεται και από την κλίση των ευθειών του

σχήματος (3.1). Η ιδιότητα αυτή πρέπει να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι πυρηνικές δυνάμεις δεν εξαρτώνται από το ισοτοπικό σπιν.

### 3.2.2 Η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας από το μαζικό αριθμό

Στο σχήμα (3.2) φαίνεται η εξάρτηση της  $S$  (σημεία στο σχήμα) από το μαζικό αριθμό για διάφορες αντιδράσεις  $(n, A)$  και  $(p, A)$ . Είναι φανερό ότι οι τιμές της  $S$  για τις διάφορες αντιδράσεις και τις διάφορες ενέργειες μπορούν να προσαρμοστούν με τη γραμμική σχέση

$$S_{T_{lab}}(A) = \alpha_T + b_T \ln A. \quad (3.11)$$



Σχήμα 3.2: Η εντροπία Shannon διαφόρων αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$  ως συνάρτηση της ενέργειας και του  $\ln A$  (σημεία στο σχήμα) για το δυναμικό  $f_0$  και τη μέθοδο  $G$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στη συνάρτηση προσαρμογής (3.11).

Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha_T$  και  $b_T$  για διάφορες ενέργειες, που προσδιορίστηκαν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων φαίνονται στον πίνακα (3.2).

Πίνακας 3.2: Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha_T$  και  $b_T$  της συνάρτησης  $S_{T_{lab}}(A)$  (σχέση (3.11)) των αντιδράσεων  $(n, A)$  και  $(p, A)$  για το δυναμικό  $f_0$  και τη μέθοδο  $G$ .

$T_{lab}$ [MeV]	$(n, A)$		$(p, A)$	
	$\alpha_T$	$b_T$	$\alpha_T$	$b_T$
40	1,6078	0,3604	1,6300	0,3404
70	2,0648	0,3359	2,0620	0,3196
100	2,3340	0,3408	2,3697	0,3156
150	2,5951	0,3534	2,6358	0,3336
200	2,7673	0,3637	2,7870	0,3554
300	2,9901	0,3812	2,9805	0,3842
500	3,2614	0,4086	3,2597	0,4079
700	3,4689	0,4253	3,4812	0,4188
1000	3,7348	0,4334	3,7368	0,4306

Από το σχήμα (3.2) φαίνεται ότι η γραμμική σχέση της  $S$  με  $\ln A$  αναπαράγει πολύ καλά τις υπολογιζόμενες τιμές της πληροφοριακής εντροπίας για όλες τις ενέργειες  $T_{lab} \in (40, 1000)$  MeV.

Οι τιμές της παραμέτρου  $\alpha_T$  σε αυτό το διάστημα τιμών της ενέργειας δίνουν αύξουσα συνάρτηση της ενέργειας (βλέπε πίνακα (3.2)) της μορφής

$$\alpha_T = \tilde{\alpha}_T + \tilde{b}_T \ln T_{lab} \quad (3.12)$$

με:  $\tilde{\alpha}_T = -0.7346$ ,  $\tilde{b}_T = 0.6493$  για τις αντιδράσεις  $(n, A)$

και:  $\tilde{\alpha}_T = -0.6834$ ,  $\tilde{b}_T = 0.6416$  για τις αντιδράσεις  $(p, A)$ .

Η παράμετρος  $b_T$  είναι σχεδόν ανεξάρτητη του μαζικού αριθμού  $A$ , αν και παρουσιάζεται ένα ελάχιστο για  $T_{lab} \simeq 75$  MeV στις αντιδράσεις  $(n, A)$  και  $T_{lab} \simeq 85$  MeV στις αντιδράσεις  $(p, A)$ , αλλά και από το είδος της αντίδρασης, όπως φαίνεται και από την κλίση των ευθειών του σχήματος (3.2). Η ιδιότητα αυτή, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, πρέπει να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι πυρηνικές δυνάμεις είναι ανεξάρτητες



ΤΟΥ ΙΣΟΤΟΠΙΚΟΥ ΣΠΙΝ.

### 3.2.3 Η σύνδεση της πληροφοριακής εντροπίας με την ακτίνα της πυρηνικής ύλης των πυρήνων

Η απόκλιση των υπολογιζόμενων τιμών της  $S$  από τις σχέσεις (3.11) και (3.12) για χαμηλές ενέργειες ( $T_{lab} < 40 \text{ MeV}$ ) και υψηλές ενέργειες θα πρέπει να οφείλεται στο φαινόμενο του “μπλοκαρίσματος” Pauli (Pauli blocking) και στη δομή των νουκλεονίων από quarks, αντίστοιχα. Σε χαμηλές ενέργειες, λόγω του Pauli blocking η αλληλεπίδραση των νουκλεονίων λαμβάνει χώρα στην επιφάνεια του πυρήνα. Σε υψηλές ενέργειες η δομή των νουκλεονίων από quarks πρέπει να ληφθεί υπόψη. Σε κάθε περίπτωση, σύμφωνα και με τα συμπεράσματα του Κεφαλαίου II, θα πρέπει να υπάρχει μια σχέση μεταξύ της πληροφοριακής εντροπίας του πυρήνα και του μέσου όγκου του πυρήνα, η οποία δεν είναι απαραίτητο να είναι η ίδια για κάθε περιοχή των ενεργειών της αντίδρασης. Μια κατάλληλη περιοχή ενεργειών που θα οδηγεί σε αυτή τη σχέση είναι η περιοχή των  $T_{lab} \in (70, 300) \text{ MeV}$ . Τα παραπάνω συνηγορούν με τις τιμές της παραμέτρου  $b_T$  του πίνακα (3.2) για  $T_{lab} \in (70, 300) \text{ MeV}$  που είναι κοντά στον αριθμό  $1/3 \simeq 0.333$ . Ως γνωστό ο όγκος ενός πυρήνα είναι ανάλογος του  $A$  και η ακτίνα ενός πυρήνα ανάλογη του  $A^{1/3}$ . Δηλαδή  $R = r_0 A^{1/3} \rightarrow A = (R/r_0)^3$ , όπου  $R$  η ακτίνα της πυρηνικής ύλης. Αν το  $A = (R/r_0)^3$  αντικατασταθεί στη σχέση (3.11) έχουμε

$$S = \alpha_T + b_T \ln A = \alpha_T + b_T \ln(R/r_0)^3 = \alpha_T + 3b_T \ln(R/r_0).$$

Η σχέση αυτή γράφεται ακόμη

$$\tilde{r}(A, T_{lab}) = R/r_0 = \exp \left[ \frac{S(A, T_{lab}) - \alpha_T}{3b_T} \right]. \quad (3.13)$$

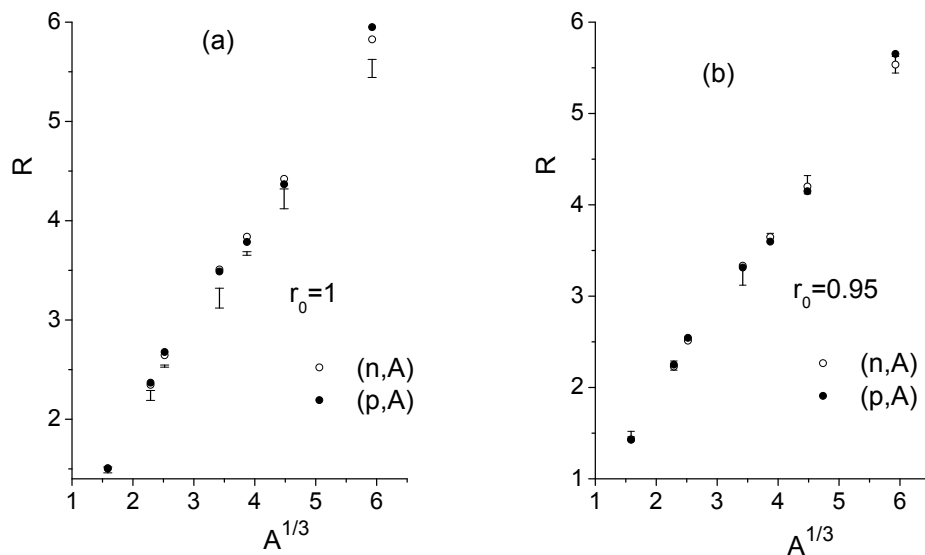
Η σχέση (3.13) πρέπει να δίνει την περιοχή τιμών της μέσης πυρηνικής ακτίνας.

Πίνακας 3.3: Οι τιμές της πυρηνικής ακτίνας σε μονάδες  $r_0$  διαφόρων πυρήνων που υπολογίζονται με τη βοήθεια της σχέσης (3.13) από αντιδράσεις  $(n, A)$  και  $(p, A)$ , για διάφορες ενέργειες με το δυναμικό  $f_0$  και τη μέθοδο G.

$T_{lab}$	$\tilde{r} = R/r_0 \quad (n, A)$						
MeV	$^4\text{He}$	$^{12}\text{C}$	$^{16}\text{O}$	$^{40}\text{Ca}$	$^{58}\text{Ni}$	$^{90}\text{Zr}$	$^{208}\text{Pb}$
70	1.5124	2.3373	2.6419	3.5224	3.8373	4.3989	5.8491
80	1.5140	2.3332	2.6370	3.5160	3.8422	4.4232	5.8242
90	1.5084	2.3397	2.6392	3.5150	3.8465	4.4355	5.7975
100	1.5102	2.3430	2.6413	3.5056	3.8376	4.4333	5.8232
150	1.5087	2.3491	2.6441	3.5009	3.8347	4.4280	5.8365
200	1.5025	2.3617	2.6509	3.4959	3.8325	4.4194	5.8424
250	1.5040	2.3516	2.6510	3.5038	3.8389	4.4187	5.8274
300	1.4978	2.3590	2.6554	3.5093	3.8401	4.4141	5.8138
$\langle \tilde{r} \rangle$	1.5073	2.3468	2.6451	3.5086	3.8387	4.4214	5.8268
$\Delta r$	$\pm 0.0025$	$\pm 0.0048$	$\pm 0.0031$	$\pm 0.0041$	$\pm 0.0020$	$\pm 0.0055$	$\pm 0.0077$
$T_{lab}$	$\tilde{r} = R/r_0 \quad (p, A)$						
MeV	$^4\text{He}$	$^{12}\text{C}$	$^{16}\text{O}$	$^{40}\text{Ca}$	$^{58}\text{Ni}$	$^{90}\text{Zr}$	$^{208}\text{Pb}$
70	1.5355	2.3900	2.6978	3.4013	3.6573	4.3430	6.3085
80	1.5204	2.3840	2.7008	3.4577	3.6971	4.2898	6.2212
90	1.5042	2.3818	2.7005	3.4918	3.7411	4.2888	6.0920
100	1.4937	2.3792	2.6973	3.5141	3.7751	4.2938	5.9955
150	1.4799	2.3586	2.6708	3.5381	3.8601	4.3995	5.7192
200	1.4862	2.3583	2.6578	3.5147	3.8628	4.4361	5.7137
250	1.5011	2.3445	2.6463	3.4992	3.8540	4.4463	5.7554
300	1.5024	2.3525	2.6478	3.4898	3.8413	4.4386	5.7934
$\langle \tilde{r} \rangle$	1.5029	2.3686	2.6774	3.4883	3.7861	4.3670 "	5.9499
$\Delta r$	$\pm 0.0084$	$\pm 0.0080$	$\pm 0.0114$	$\pm 0.0197$	$\pm 0.0332$	$\pm 0.0325$	$\pm 0.1112$

Έτσι αν θέσουμε τις τιμές της  $S(A, T_{lab})$  για διάφορες ενέργειες στην περιοχή  $70 \leq T_{lab} \leq 300 \text{ MeV}$  και τις αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων  $a_T$  και  $b_T$  από τον πίνακα (3.2) για μια ορισμένη αντίδραση μπορεί να βρεθεί η πυρηνική ακτίνα  $\tilde{r}(A, T_{lab})$  σε μονάδες της παραμέτρου  $r_0$ . Οι τιμές αυτές για το δυναμικό  $f_0$  και τη μέθοδο  $G$  φαίνονται στον πίνακα (3.3). Στον ίδιο πίνακα δίνονται η μέση τιμή του  $\tilde{r}(A, T_{lab})$  και του τυπικού σφάλματος σε μονάδες  $r_0$ .

Η μέση ακτίνα  $R = r_0 \tilde{r}$  μπορεί να συγκριθεί με τις υπάρχουσες “πειραματικές” ακτίνες εφόσον είναι γνωστή η τιμή της παραμέτρου  $r_0$ . Η τιμή αυτής αναμένεται να είναι της τάξης μεγέθους του  $1 \text{ fm}$ . Μπορούμε επομένως να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια τιμή της  $r_0$  που προσαρμόζει τις υπολογιζόμενες τιμές της μέσης πυρηνικής ακτίνας με τις υπάρχουσες “πειραματικές” τιμές.



Σχήμα 3.3: Οι μέσες ακτίνες της πυρηνικής ύλης διαφόρων πυρήνων με την παρούσα μέθοδο από τις αντιδράσεις  $(n, A)$  (κύκλοι στο σχήμα) και  $(p, A)$  (σημεία στο σχήμα) και οι αντίστοιχες “πειραματικές” τιμές από τις [52, 53, 54, 55, 56].

Στο σχήμα (3.3a) συγκρίνονται οι υπολογιζόμενες τιμές της μέσης ακτίνας με τις αντίστοιχες “πειραματικές”, για διάφορους πυρήνες για την τιμή της παραμέτρου  $r_0 = 1 \text{ fm}$ . Παρατηρούμε ότι σχεδόν όλες οι υπολογιζόμενες μέσες ακτίνες είναι μέσα στα πειραματικά σφάλματα. Υπάρχει μια σχετικά μεγάλη απόκλιση για τον πυρήνα  $^{208}\text{Pb}$  της τάξης του 7 – 8%. Οι υπάρχουσες αποκλίσεις μπορούν να γίνουν μικρότερες αν χρησιμοποιήσουμε λίγο μικρότερη τιμή της παραμέτρου  $r_0$ . Χρησιμοποιώντας την τιμή  $r_0 = 0.95 \text{ fm}$  οι υπολογιζόμενες ακτίνες της πυρηνικής ύλης, για τους διάφορους πυρήνες από το  $^4\text{He}$  έως το  $^{208}\text{Pb}$  είναι μέσα στα “πειραματικά” σφάλματα, όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.3b).

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο καθορισμός μιας μόνο παραμέτρου (της  $r_0$ ) για διάφορους πυρήνες από  $^4\text{He}$  έως  $^{208}\text{Pb}$  δίνει μέσες ακτίνες της πυρηνικής ύλης των πυρήνων που συμφωνεί με τις υπάρχουσες “πειραματικές” ακτίνες που προκύπτουν από την ανάλυση διαφορετικών πειραμάτων [52, 53, 54, 55, 56].

Ο καθορισμός της τιμής της παραμέτρου  $r_0$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της παρούσας μεθόδου και για τον υπολογισμό των ακτίνων της πυρηνικής ύλης και άλλων πυρήνων καθώς και των ακτίνων διαφόρων ισοτόπων και να εξεταστεί αν ισχύει όμοια συμπεριφορά των ακτίνων αυτών, όπως και στην περίπτωση των ακτίνων του ηλεκτρικού φορτίου διαφόρων σειρών ισοτόπων.

# Κεφάλαιο 4

## Αστέρες νετρονίων και πληροφορία

### 4.1 Εισαγωγή

Οι αστέρες νετρονίων είναι από τα πιο συναρπαστικά αλλά και συνάμα από τα πλέον ενδιαφέροντα, από επιστημονική άποψη, αντικείμενα του μακρόκοσμου. Είναι αστρικά σώματα εξαιρετικά συμπαγή με μάζα περίπου όσο μια ηλιακή μάζα, και ακτίνα περίπου 10km. Η δημιουργία τους, η χρονική τους εξέλιξη και η σταθερότητα τους καθορίζονται από τον τρόπο με τον οποίο συνδυάζονται στο εσωτερικό τους οι βασικές δυνάμεις της φυσικής, η βαρυτική, η ισχυρή και η ασθενής πυρηνική και η ηλεκτρομαγνητική καθώς επίσης και η απαγορευτική αρχή του Pauli. Η θεωρητική τους μελέτη αποτελεί μια πρόκληση για τον κάθε ερευνητή.

Από την άλλη πλευρά οι πειραματικές-παρατηρησιακές προβλέψεις των αστέρων νετρονίων είναι πολύ σημαντικές, αφού έτσι μπορούμε να εμβαθύνουμε τις θεωρητικές μας γνώσεις σε καίρια μέτωπα της φυσικής ή επίσης να επιβεβαιώσουμε ή να αμφισβητήσουμε τις μέχρι τώρα θεωρητικές προβλέψεις. Ο αστέρας νετρονίων είναι ένα τεράστιο εργαστήριο, στο οποίο επικρατούν συνθήκες που δεν μπορούμε προς το παρόν να αναπαράγουμε στη Γη (τεράστιες τιμές πίεσης και θερμοκρασίας, πολύ ισχυρό μαγνητικό πεδίο κ.τ.λ). Συμπερασματικά, η πειραματική-παρατηρησιακή τους μελέτη

μπορεί να ρίξει φως στη μελέτη των φυσικών μας θεωριών [61]-[71].

Η κατανόηση της δομής ενός αστέρα νετρονίων βασίζεται σε υπάρχοντα μαθηματικά πρότυπα, αλλά και σε μια σειρά από παρατηρησιακά δεδομένα. Στο εσωτερικό του αστέρα νετρονίων βρίσκονται σε επαφή πρωτόνια και νετρόνια, επομένως όλο το ουράνιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ένας τεράστιος ατομικός πυρήνας. Εξαιτίας των νόμων των υποατομικών σωματίων τα περισσότερα ηλεκτρόνια αντιδρούν με τα πρωτόνια και μετατρέπονται σε νετρόνια, από όπου και έλαβαν οι αστέρες αυτοί το όνομά τους.

Τα βασικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν έναν αστέρα νετρονίων, όπως η μάζα του, η ακτίνα και η σύνθεσή του υπολογίζονται από τη λύση των διαφορικών εξισώσεων Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) [72, 73]. Για τη λύση αυτών των διαφορικών εξισώσεων απαιτείται η γνώση της καταστατικής εξίσωσης που περιγράφει έναν αστέρα νετρονίων. Γενικότερα η κατασκευή της καταστατικής εξίσωσης είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα, όχι μόνο εξαιτίας της πολυπλοκότητας του δυναμικού νουκλεονίου-νουκλεονίου, αλλά και γιατί δεν είναι γνωστή η σύνθεση της πυρηνικής ύλης σε πυκνότητες μεγαλύτερες από την πυκνότητα κορεσμού  $n_s$ . Εικάζεται ότι τέτοιες υψηλές πυκνότητες υπάρχουν στο κέντρο του αστέρα νετρονίων. Η εφαρμογή διαφορετικών προτύπων για τον υπολογισμό της καταστατικής εξίσωσης οδηγεί σε σημαντικές διαφοροποιήσεις στις προβλεπόμενες τιμές των ακτίνων και των μέγιστων μαζών των αστέρων νετρονίων [67]-[96]. Η ολική ενέργεια ύλης πλούσιας σε νετρόνια μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος είναι η συνεισφορά της συμμετρικής ύλης (όπου ο αριθμός των πρωτονίων είναι ίσος με το αριθμό των νετρονίων) και είναι γνωστός, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η ενέργεια συμμετρίας  $E_{sym}(n)$ , για την οποία δεν υπάρχουν ακόμα επαρκείς πειραματικές μετρήσεις ακόμα και σε πυκνότητες μικρότερες της πυκνότητας κορεσμού. Υπάρχει επομένως μεγάλη αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της, αφού διαφορετικά πρότυπα προβλέπουν διαφορετική συμπεριφορά της ενέργειας συμμετρίας τόσο σε χαμηλές όσο και υψηλές πυκνότητες. Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, η γνώση της ενέργειας συμμετρίας για διάφορες πυκνότητες είναι καθοριστική

για τον υπολογισμό των βασικών ιδιοτήτων των αστέρων νετρονίων.

Στη μελέτη αυτή [69] προτείνεται μια κατάλληλη παραμετροποίηση της ενέργειας συμμετρίας  $E_{sym}(n)$ , έτσι ώστε καταρχήν να αναπαραχθούν οι θεωρητικές τιμές της που προκύπτουν από διάφορα μικροσκοπικά μοντέλα τόσο για μικρές αλλά και για μεγάλες τιμές βαρυονικής πυκνότητας.

Σχετικά με την καταστατική εξίσωση που απαιτείται για τη λύση των διαφορικών εξισώσεων TOV, αυτή θα πρέπει να υπακούει στους παρακάτω περιορισμούς [88].

1. Πρέπει να αναπαράγει το σωστό σημείο κορεσμού για τη συμμετρική πυρηνική ύλη.
2. Οι τιμές της ασυμπίεστότητας για τη συμμετρική πυρηνική ύλη πρέπει να συμφωνούν με τις αντίστοιχες πειραματικές.
3. Η ταχύτητα του ήχου δεν πρέπει να υπερβαίνει αυτή του φωτός (αρχή αιτιότητας) στη συμμετρική πυρηνική ύλη αλλά και στη νετρονική ύλη, τουλάχιστον για τις πυκνότητες που μας ενδιαφέρουν.

Στην παρούσα μελέτη θεωρήθηκε ότι ο πυρήνας του αστέρα νετρονίων αποτελείται από ένα μείγμα νετρονίων, πρωτονίων και ηλεκτρονίων σε ισορροπία, σεβόμενοι τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις της  $\beta$ -σταθερής ύλης. Γενικά, για πυκνότητες  $n \geq n_s$ , δημιουργείται η αδρονική φάση της υπέρπυκνης ύλης με ευρύ φάσμα σωματιδίων (υπερόνια, βαρυονικούς συντονισμούς,  $\pi^-$  και  $K^-$  μεσόνια και μικρό αριθμό λεπτονίων). Το πρότυπο που χρησιμοποιείται για την κατασκευή της καταστατικής εξίσωσης είναι μια γενίκευση του προτύπου φαινομενολογικού δυναμικού που βασίζεται σε προηγούμενες εργασίες των Prakash et al [60]. Το πρότυπο αυτό αναπαράγει τα περισσότερα αποτελέσματα μικροσκοπικών υπολογισμών πυκνής ύλης [84]. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν αρκετοί τρόποι να κατασκευαστεί η καταστατική εξίσωση με προσέγγιση πολλών σωμάτων και αλληλεπιδρώντα αδρόνια. Κάποιοι από τους πιο πρόσφατους είναι βασισμένοι στο

λογισμό μεταβολών [97, 98, 99] και κάποιοι σε μικροσκοπικούς υπολογισμούς [100]. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα που προκύπτει από την αβέβαια συμπεριφορά της ενέργειας συμμετρίας στις υψηλές πυκνότητες, χρησιμοποιήθηκε μια κατάλληλη παραμετροποίηση και για τις υψηλές αλλά και για τις χαμηλές πυκνότητες. Σε προηγούμενες εργασίες [60, 68] η παραμετροποίηση του δυναμικού όρου της ενέργειας συμμετρίας επιτυγχάνεται με την εισαγωγή τριών διαφορετικών επιλογών για τη συνεισφορά του δυναμικού στην ενέργεια συμμετρίας. Στην παρούσα μελέτη έγινε μια επέκταση των παραπάνω, προτείνοντας μια γενικότερη παραμετροποίηση του δυναμικού όρου της ενέργειας συμμετρίας, που είναι πιο ευέλικτη, πιο επαρκής και αναπαράγει τις προβλέψεις των περισσότερων μικροσκοπικών υπολογισμών της πυκνής ύλης [84], καθώς επίσης επαληθεύει διάφορα εμπειρικά δεδομένα.

Η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα της προτεινόμενης παραμετροποίησης είναι η διαφορετική μορφή της συνάρτησης παραμετροποίησης  $F(u)$  για πυκνότητες κάτω και πάνω από το σημείο κορεσμού. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς κάτι τέτοιο έχει ήδη ενσωματωθεί στους μικροσκοπικούς υπολογισμούς. Παρόλο που η συμπεριφορά της ενέργειας συμμετρίας για πυκνότητες κάτω του σημείου κορεσμού παραμένει ακόμα άγνωστη, τελευταία έχει γίνει αρκετή πρόοδος στον τομέα αυτόν [92, 93, 94, 101, 102, 103, 104]. Για πυκνότητες άνω του σημείου κορεσμού, η τάση της ενέργειας συμμετρίας εξαρτάται από το πρότυπο που χρησιμοποιούμε κάθε φορά και παρουσιάζει εντελώς διαφορετική συμπεριφορά.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά της ενέργειας συμμετρίας φαίνονται καθαρά στο πρότυπο που προτείνεται. Η προτεινόμενη παραμετροποίηση του δυναμικού όρου της ενέργειας συμμετρίας έχει το πλεονέκτημα να μπορεί να αναπαράγει μικροσκοπικούς υπολογισμούς για περιπτώσεις που η ενέργεια συμμετρίας, σε χαμηλές συχνότητες, αυξάνει ανάλογα με την πυκνότητα αλλά στη συνέχεια ελαττώνεται παρόλο που η πυκνότητα συνεχίζει να αυξάνει. Αυτό είναι γνωστό χαρακτηριστικό των υπολογισμών Hartree-Fock με αλληλεπιδράσεις Skyrme [76, 77, 78] και Gogny [92, 93, 94].



Έγινε επίσης ιδιαίτερη προσπάθεια να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις ανάμεσα στην ακτίνα  $R$  και την πίεση  $P$ , που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη πυκνότητα  $n$ , για μια σταθερή τιμή της μάζας  $M$  του αστέρα νετρονίων. Επομένως ένας ακριβής υπολογισμός της ακτίνας του αστέρα νετρονίων, θα επιτρέψει τον υπολογισμό της πίεσης της ύλης του αστέρα νετρονίων [96, 105].

Τέλος μελετήθηκε και το φαινόμενο της “ψύξης” (cooling) του αστέρα νετρονίων, μια διεργασία γνωστή και ως URCA [106, 107]. Είναι γνωστό ότι η απευθείας διεργασία URCA μπορεί να συμβεί σε ένα αστέρα νετρονίων, αν η συγκέντρωση πρωτονίων ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή της τάξης του 11-15%. Η συγκέντρωση πρωτονίων μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της ενέργειας συμμετρίας κοντά και λίγο πάνω από την πυκνότητα ισορροπίας. Επομένως μια λεπτομερής ανάλυση της συμπεριφοράς της ενέργειας συμμετρίας είναι κρίσιμη για τη μελέτη της διεργασίας URCA.

## 4.2 Πληροφοριακά μεγέθη και αστέρες νετρονίων

Πριν συνεχιστεί η ανάπτυξη του μαθηματικού προτύπου για τον υπολογισμό της καταστατικής εξίσωσης, θα γίνει αναφορά στα πληροφοριακά μεγέθη που μπορούν να υπολογιστούν για ένα αστέρα νετρονίων, όπως είναι το στατιστικό μέγεθος της πολυπλοκότητας, η “ανισορροπία” αλλά και η πληροφοριακή εντροπία. Ειδικότερα, το στατιστικό μέγεθος της πολυπλοκότητας παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού δίνει πληροφορίες για την αυτοοργάνωση ενός αστέρα νετρονίων. Παρόλο που δεν υπάρχει ένας ολοκληρωμένος και συνολικός ορισμός της πολυπλοκότητας, το παρόν πλαίσιο δίνει ενδιαφέροντα και ικανοποιητικά αποτελέσματα πολύ κοντά στα αναμενόμενα. Μέχρι στιγμής τα πληροφοριακά μεγέθη έχουν υπολογισθεί για διάφορα συστήματα αλλά μόνο πριν λίγο καιρό εφαρμόστηκαν σε κάποιο ουράνιο σώμα. Συγκεκριμένα οι Sanudo και Pacheco [110] υπολόγισαν την πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon και τη στατιστική

πολυπλοκότητα για λευκούς νάνους.

Οι αστέρες νετρονίων είναι συστήματα με αρκετές ομοιότητες με τα ατομικά συστήματα αλλά και βασικές διαφορές. Σε ένα ατομικό σύστημα η αυτοοργάνωση επιτυγχάνεται με τον “ανταγωνισμό” ανάμεσα στην αλληλεπίδραση Coulomb και την απαγορευτική αρχή του Pauli. Στην πραγματικότητα, η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση μεγάλης εμβέλειας είναι η κύρια αλληλεπίδραση ανάμεσα στα σωματίδια του συστήματος. Επιπλέον τα άτομα είναι μικροσκοπικά συστήματα διαστάσεων μερικών Angströms ( $10^{-10}$  m). Αντιθέτως, οι αστέρες νετρονίων είναι μακροσκοπικά συστήματα με τυπική διάσταση της τάξεως των  $10^4$  m, αρκετά πιο πολύπλοκα με την έννοια ότι οργανώνονται υπό τον ανταγωνισμό τριών διαφορετικών αλληλεπιδράσεων. Η βαρυτική αλληλεπίδραση που είναι μεγάλης εμβέλειας και η οποία τείνει να συμπιέσει τον αστέρα. Η πυρηνική αλληλεπίδραση μικρής εμβέλειας, η οποία μέσω της εκφυλισμένης πίεσης (degeneracy pressure) των νουκλεονίων τείνει να μεγαλώσει τον αστέρα. Τέλος η ασθενής αλληλεπίδραση, που είναι πολύ μικρής εμβέλειας και λειτουργεί ως ρυθμιστής μεταξύ των αναλογιών των σωματιδίων και επομένως επηρεάζει έμμεσα τις ιδιότητες του αστέρα. Οι παραπάνω δυνάμεις συνυπάρχουν σε αρμονία στο εσωτερικό του αστέρα νετρονίων.

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon [3] για μια συνεχή κατανομή πιθανοτήτων  $\rho(\mathbf{r})$ , δίνει ένα μέτρο της αβεβαιότητας και ορίζεται ακολούθως

$$S = - \int \rho(\mathbf{r}) \ln \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.1)$$

ενώ η “ανισορροπία”  $D$

$$D = \int \rho^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

έχει διαστάσεις αντίστροφες του όγκου.

Για να μελετηθεί η στατιστική πολυπλοκότητα όπως ορίστηκε από τους López-Ruiz, Mancini και Calbet (LMC) [21], θα χρησιμοποιηθεί ένας εναλλα-

κτικός ορισμός που εισήχθη στην αναφορά [22]

$$C = HD \quad \text{όπου} \quad H = e^S, \quad (4.3)$$

είναι το πληροφοριακό περιεχόμενο του συστήματος, ενώ η χρήση του εκθετικού συναρτησοειδούς βοηθάει στη διατήρηση του θετικού πρόσημου της πολυπλοκότητας  $C$ .

Οι παραπάνω ορισμοί της πληροφοριακής εντροπίας και “ανισορροπίας” πρέπει να μεταβληθούν στην περίπτωση που έχουμε εφαρμογή τους σε αστέρες νετρονίων. Πιο συγκεκριμένα, η κατανομή πιθανοτήτων  $\rho(r)$  πρέπει να αντικατασταθεί με την πυκνότητα μάζας που δεν αποτελεί λύση της εξίσωσης Schrödinger αλλά λύση των διαφορικών εξισώσεων Tolman-Oppenheimer-Volkoff και ικανοποιεί τις απαιτήσεις της υδροστατικής ισορροπίας. Βέβαια η πυκνότητα μάζας  $\rho(r)$  σχετίζεται με την πιθανότητα να έχουμε ένα σωματίδιο σε συγκεκριμένη θέση, επομένως μπορεί να χαρακτηριστεί και ως κατανομή πιθανότητας. Επιπλέον σχετίζεται με την ενεργειακή πυκνότητα  $\epsilon(r)$  αφού  $\rho(r) = \epsilon(r)/c^2$ .

Έτσι η νέα πληροφοριακή εντροπία και “ανισορροπία” είναι

$$S = -b_0 \int \bar{\epsilon}(r) \ln \bar{\epsilon}(r) dr \quad (4.4)$$

και

$$D = b_0 \int \bar{\epsilon}(r)^2 dr, \quad (4.5)$$

όπου  $b_0 = 8.9 \times 10^{-7} \text{ km}^{-3}$  είναι μια σταθερά που μετατρέπει την πληροφοριακή εντροπία  $S$  και “ανισορροπία”  $D$  σε αδιάστατες ποσότητες ενώ  $\bar{\epsilon}(r)$  είναι η αδιάστατη ενεργειακή πυκνότητα του συστήματος και δίνεται από την σχέση  $\epsilon(r) = \bar{\epsilon}(r)\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 = 1 \text{ MeV fm}^{-3}$ ).

### 4.3 Το μαθηματικό πρότυπο

Η ενέργεια ανά βαρυόνιο της πυρηνικής ύλης που έχει μεγάλο ποσοστό νετρονίων μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{E(n, x)}{A} = \frac{E(n, \frac{1}{2})}{A} + (1 - 2x)^2 E_{sym}^{(2)}(n) + (1 - 2x)^4 E_{sym}^{(4)}(n) + \dots, \quad (4.6)$$

όπου  $n$  είναι η βαρυονική πυκνότητα ( $n = n_n + n_p$ ) και  $x$  είναι το κλάσμα πρωτονίων ( $x = n_p/n$ ). Η σχέση (4.6) σε προσέγγιση όρων δεύτερης τάξης γράφεται

$$\frac{E(n, x)}{A} \simeq \frac{E(n, \frac{1}{2})}{A} + (1 - 2x)^2 E_{sym}^{(2)}(n). \quad (4.7)$$

Η ενέργεια συμμετρίας  $E_{sym}(n) = E_{sym}^{(2)}(n)$  μπορεί να εκφρασθεί ως η διαφορά της ενέργειας ανά βαρυόνιο ανάμεσα σε νετρονική ύλη, όπου ισχύει  $n = n_n$  ( $x = 0$ ) και συμμετρική ύλη όπου ισχύει  $n_n = n_p = n/2$  ( $x = 1/2$ ).

$$E_{sym}(n) = \frac{E(n, 0)}{A} - \frac{E(n, \frac{1}{2})}{A}. \quad (4.8)$$

Στην παρούσα μελέτη θεωρήθηκε μια φαινομενολογική εξίσωση για τη συμμετρική πυρηνική ύλη (ενέργεια ανά βαρυόνιο  $E/A$  ή ενεργειακή πυκνότητα ανά πυρηνική πυκνότητα αντίστοιχα  $\epsilon/n$ ) η οποία δίνεται από την έκφραση [60]

$$\frac{E(n, \frac{1}{2})}{A} = m_N c^2 + \frac{3}{5} E_F^0 u^{2/3} + V(u), \quad u = n/n_s \quad (4.9)$$

όπου  $E_F^0 = (\hbar k_F^0)^2 / 2m_N$  είναι η ενέργεια Fermi ανά βαρυόνιο σε κατάσταση ισορροπίας και  $n_s$  είναι η πυκνότητα κορεσμού.

Η εξαρτώμενη από την πυκνότητα, δυναμική ενέργεια ανά νουκλεόνιο  $V(u)$  της συμμετρικής πυρηνικής ύλης παραμετροποιείται με βάση προηγούμενες εργασίες των Prakash et al [60, 68] ως εξής

$$V(u) = \frac{1}{2} Au + \frac{Bu^\sigma}{1 + B'u^{\sigma-1}} + 3 \sum_{i=1,2} C_i \left( \frac{\Lambda_i}{\rho_F^0} \right)^3 \left( \frac{\rho_F}{\Lambda_i} - \arctan \frac{\rho_F}{\Lambda_i} \right), \quad (4.10)$$

όπου  $\rho_F$  είναι η ορμή Fermi και δίνεται από την σχέση  $\rho_F = \rho_F^0 u^{1/3}$ . Οι παράμετροι  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  παραμετροποιούν τις δυνάμεις ανάμεσα στα νουκλεόνια. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη είναι  $\Lambda_1 = 1.5\rho_F^0$  και

$\Lambda_2 = 3\rho_F^0$ . Οι παράμετροι  $A, B, B', \sigma, C_1$  και  $C_2$  καθορίζονται από περιορισμούς που προκύπτουν από τον κορεσμό της πυρηνικής ύλης. Οι παράμετροι αυτοί καθορίζονται έτσι ώστε  $E(n = n_s)/A - m_N c^2 = -16 \text{ MeV}$ ,  $n_s = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  και  $K_0 = 240 \text{ MeV}$ . Οι τιμές όλων των παραμέτρων για τρεις πιθανές τιμές της συμπιεστότητας  $K_0$  ( $K_0 = 9n_0^2 \frac{d^2(E/A)}{dn^2}|_{n_0}$ ) αναγράφονται στον πίνακα 1 της [60].

Σε μια καλή προσέγγιση, η πυρηνική ενέργεια συμμετρίας  $E_{sym}$  μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής [65]

$$E_{sym}(u) = \left(2^{2/3} - 1\right) \frac{3}{5} E_F^0 \left(u^{2/3} - F(u)\right) + S_0 F(u), \quad (4.11)$$

όπου  $S_0$  είναι η ενέργεια συμμετρίας στο σημείο κορεσμού,  $S_0 = E_{sym}(u = 1)$ . Γενικά οι θεωρητικές προβλέψεις δίνουν περίπου  $S_0 = 25 - 35 \text{ MeV}$ . Στην παρούσα μελέτη θα χρησιμοποιηθεί μια μέση τιμή  $S_0 = 30 \text{ MeV}$ . Η συνάρτηση  $F(u)$  παραμετροποιεί το δυναμικό όρο της πυρηνικής ενέργειας συμμετρίας και πρέπει να ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς  $F(u = 0) = 0$  και  $F(u = 1) = 1$ . Η εξίσωση (4.11) μπορεί να γραφεί με ένα πιο παραστατικό τρόπο διαχωρίζοντας τη δυναμική από την κινητική συνεισφορά της ενέργειας συμμετρίας

$$E_{sym}(u) \simeq \underbrace{13u^{2/3}}_{\text{Κινητική}} + \underbrace{17F(u)}_{\text{Δυναμική}}. \quad (4.12)$$

Στις προηγούμενες εργασίες των Prakash et al [60] χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές εκφράσεις για την  $F(u)$ , που αναπαράγουν με επιτυχία τα αποτελέσματα των περισσότερων μικροσκοπικών μοντέλων και είναι οι εξής

$$F(u) = u, \quad F(u) = \frac{2u^2}{1+u}, \quad F(u) = \sqrt{u}. \quad (4.13)$$

Στην παρούσα μελέτη θα παραμετροποιηθεί η συνάρτηση  $F(u)$  με δύο τρόπους.

Ο πρώτος τρόπος παραμετροποίησης είναι

$$F(u) = u^c, \quad (4.14)$$

όπου η παράμετρος  $c$  (που θα αναφέρεται ως δυναμική παράμετρος) παίρνει τιμές ανάμεσα στο  $0.4 \leq c \leq 1.5$ . Είναι προφανές ότι, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η συνεισφορά του δυναμικού στην ενέργεια συμμετρίας περιγράφεται από την ίδια έκφραση τόσο για χαμηλές αλλά και για υψηλές τιμές της βαρυονικής πυκνότητας.

Οι πληροφορίες όμως που υπάρχουν από μικροσκοπικούς θεωρητικούς υπολογισμούς δείχνουν ότι αυτή δεν είναι η γενική εικόνα για το δυναμικό κομμάτι της ενέργειας συμμετρίας. Αντιθέτως, η ενέργεια συμμετρίας παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά για χαμηλές και υψηλές πυκνότητες. Επομένως πρέπει κάποιος να προσπαθήσει να βρει μια νέα μορφή για την  $F(u)$  που να ικανοποιεί τα παραπάνω.

Η δεύτερη παραμετροποίηση που προτείνεται έρχεται σε συμφωνία με αυτή τη συμπεριφορά καθώς είναι πιο ευέλικτη και αναπαράγει την ενέργεια συμμετρίας για τους περισσότερους ρεαλιστικούς υπολογισμούς.

$$F(u) = \begin{cases} u^{c_1} & u \leq 1 \\ u^{c_2} e^{1-u} + (u-1)(c_1 + 1 - c_2) & u \geq 1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Η συνάρτηση  $F(u)$  ικανοποιεί τους περιορισμούς  $F(u \rightarrow 1^+) = F(u \rightarrow 1^-)$  και  $F'(u \rightarrow 1^+) = F'(u \rightarrow 1^-)$ . Η παράγωγος της συνάρτησης καθορίζεται από δύο παραμέτρους  $c_1$  και  $c_2$  (που θα αναφέρονται ως δυναμικοί παράμετροι).

Για να κατασκευαστεί η πυρηνική καταστατική εξίσωση είναι απαραίτητη η έκφραση της πίεσης. Γενικά η πίεση, για θερμοκρασία  $T = 0$ , δίνεται από την έκφραση

$$P = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn} = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon. \quad (4.16)$$

Από τις εξισώσεις (4.7), (4.9) και (4.16) βρίσκεται ότι η συνεισφορά των βαρυονίων στη συνολική πίεση δίνεται από την σχέση

$$P_b = \left[ \frac{2}{5} E_F^0 n_s u^{5/3} + u^2 n_s \frac{dV(u)}{du} \right] + n_s (1 - 2x)^2 u^2 \frac{dE_{sym}(u)}{du}. \quad (4.17)$$

Τα λεπτόνια (ηλεκτρόνια και μόνια) τα οποία προέρχονται από τη β-σταθερή ύλη συνεισφέρουν και αυτά στη συνολική ενέργεια και πίεση

[65]. Πιο συγκεκριμένα τα ηλεκτρόνια και τα μίονια, όταν είναι συστατικά ενός αστέρα νετρονίων, θεωρούνται ως μη αλληλεπιδρώντα αέρια Fermi. Στην περίπτωση αυτή η συνεισφορά τους στη συνολική ενέργεια και πίεση δίνεται από τις σχέσεις

$$\epsilon_{e^-, \mu^-} = \frac{m_l^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[ (2z^3 + z)(1 + z^2)^{1/2} - \sinh^{-1}(z) \right], \quad (4.18)$$

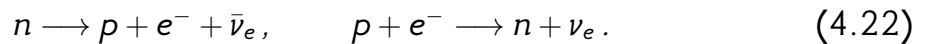
$$P_{e^-, \mu^-} = \frac{m_l^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left[ (2z^3 - 3z)(1 + z^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1}(z) \right], \quad (4.19)$$

όπου  $z = k_F/m_l c$ . Τώρα η συνολική ενέργεια και η πίεση της ουδέτερα φορτισμένης και σε χημική ισορροπία πυρηνικής ύλης είναι

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_b + \sum_{l=e^-, \mu^-} \epsilon_l, \quad (4.20)$$

$$P_{tot} = P_b + \sum_{l=e^-, \mu^-} P_l. \quad (4.21)$$

Από τις εξισώσεις (4.20) και (4.21) μπορεί να κατασκευαστεί η καταστατική εξίσωση με μορφή  $\epsilon = \epsilon(P)$ . Αυτό που απομένει είναι ο υπολογισμός του ποσοστού πρωτονίων  $x$  στη  $\beta$ -σταθερή ύλη. Στην περίπτωση αυτή συμβαίνουν ταυτόχρονα οι παρακάτω αντιδράσεις



Τα νετρίνα-αντινετρίνα που δημιουργούνται στις παραπάνω αντιδράσεις, θεωρείται ότι διαφεύγουν από τον αστέρα νετρονίων. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η αλγεβρική σχέση

$$\hat{\mu} = \mu_n - \mu_p = \mu_e, \quad (4.23)$$

όπου  $\mu_n, \mu_p$  και  $\mu_e$  είναι τα χημικά δυναμικά νετρονίου, πρωτονίου και ηλεκτρονίου αντίστοιχα. Με γνωστή την ενεργειακή πυκνότητα  $\epsilon \equiv \epsilon(n_n, n_p)$ , το χημικό δυναμικό του νετρονίου και του πρωτονίου μπορεί να ορισθεί ως εξής

$$\mu_n = \frac{\partial \epsilon}{\partial n_n}, \quad \mu_p = \frac{\partial \epsilon}{\partial n_p} \quad (4.24)$$

και με τη βοήθεια αλγεβρικών πράξεων οδηγούμαστε στη σχέση

$$\hat{\mu} = \mu_n - \mu_p = \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (4.25)$$

Στην  $\beta$ -ισορροπία ισχύει

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (E_b(n, x) + E_e(x)) = 0, \quad (4.26)$$

όπου  $E_b(n, x)$  είναι η ενέργεια ανά βαρυόνιο και  $E_e(x)$  η ενέργεια των ηλεκτρονίων. Λόγω της ουδετερότητας στο φορτίο ισχύει επίσης  $n_e = n_p = nx$  ή  $k_{F_e} = k_{F_p}$ . Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.7) και (4.25) παίρνουμε

$$\hat{\mu} = 4(1 - 2x)E_{sym}(n). \quad (4.27)$$

Τελικά, εάν συνδυαστούν οι εξισώσεις (4.23) και (4.27), οδηγούμαστε στη σχέση

$$4(1 - 2x)E_{sym}(n) = \hbar c(3\pi^2 n_e)^{1/3} = \hbar c(3\pi^2 nx)^{1/3}, \quad (4.28)$$

όπου θεωρήθηκε ότι το χημικό δυναμικό του ηλεκτρονίου (για σχετικιστικά ηλεκτρόνια) δίνεται από τη σχέση

$$\mu_e = \sqrt{k_{F_e}^2 c^2 + m_e^2 c^4} \simeq k_{F_e} c.$$

Η εξίσωση (4.28) δίνει το ποσοστό πρωτονίων  $x(n)$  σε κατάσταση ισορροπίας, εφόσον η εξαρτώμενη από την πυκνότητα, ενέργεια συμμετρίας  $E_{sym}(n)$  είναι γνωστή. Λύνοντας την εξίσωση (4.28) ως προς  $x$  με τη βοήθεια της Mathematica βρίσκεται η παρακάτω έκφραση.

$$x(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( [2\beta(\gamma + 1)]^{1/3} - [2\beta(\gamma - 1)]^{1/3} \right), \quad (4.29)$$

όπου

$$\beta = 3\pi^2 n (\hbar c / 4E_{sym}(n))^3, \quad \gamma = \left( 1 + \frac{2\beta}{27} \right)^{1/2}.$$

Όταν η ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι αρκετά μεγάλη (για παράδειγμα μεγαλύτερη από τη μάζα των μιονίων) παρατηρείται η μετατροπή τους σε μίονια

$$e^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e. \quad (4.30)$$



Όμως, στην παρούσα μελέτη δεν θα συμπεριληφθεί η περίπτωση των μιονίων αφού η συνεισφορά τους στην τελική καταστατική εξίσωση δεν αλλάζει σημαντικά τις ιδιότητες των αστέρων νετρονίων.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το πρότυπο που χρησιμοποιήθηκε ικανοποιεί τη σχετικιστική συνθήκη της αιτιότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του ήχου που ορίζεται από τη σχέση

$$\left(\frac{c_s}{c_l}\right)^2 = \frac{dP}{d\epsilon} = \frac{dP/dn}{d\epsilon/dn}, \quad (4.31)$$

δεν ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός για καμία τιμή της πυκνότητας των βαρυονίων. Αυτή είναι μια βασική αρχή για κάθε ρεαλιστική καταστατική εξίσωση, ανεξαρτήτως των διαφόρων αλληλεπιδράσεων που μπορεί να υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα συστατικά της ύλης [88].

Μια σημαντική διεργασία στους αστέρες νετρονίων είναι η διεργασία URCA κατά την οποία παρατηρείται η γρήγορη ψύξη ενός αστέρα νετρονίων.

Αυτή η διεργασία επιτρέπεται μόνον αν έχουμε ταυτόχρονη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής των πρωτονίων, νετρονίων και ηλεκτρονίων κατά τη διαδικασία της  $\beta$ -διάσπασης. Έχει υπολογιστεί ότι για να λάβει χώρα η διεργασία URCA πρέπει το ποσοστό πρωτονίων να είναι  $x > 1/9 \simeq 0.11$ . Από την εξίσωση (4.29) γίνεται προφανές ότι το ποσοστό των πρωτονίων  $x$  εξαρτάται από τον όρο της πυκνότητας στην ενέργεια συμμετρίας, άρα εξαρτάται και από την παραμετροποίηση που θα χρησιμοποιηθεί για το δυναμικό όρο της  $E_{sym}(n)$ . Επομένως στην παρούσα μελέτη αξίζει να μελετηθεί η σχέση του ποσοστού πρωτονίων με την παραμετροποίηση που επιλέχθηκε και να γίνει έλεγχος αν η παραμετροποίηση πληρεί τα κριτήρια για την έναρξη της διεργασίας URCA.

Για να υπολογιστούν οι ιδιότητες ενός αστέρα νετρονίων θεωρείται ότι αυτός παρουσιάζει σφαιρικά συμμετρική κατανομή της μάζας του όταν είναι σε υδροστατική ισορροπία και βρίσκεται σε εξαιρετικά χαμηλή θερμοκρασία ( $T \simeq 0$ ). Εάν δεν ληφθούν υπόψη περιστροφικά και μαγνητικά πεδία, η

κατάσταση ισορροπίας περιγράφεται από τη λύση των εξισώσεων Tolman-Oppenheimer-Volkoff [72, 73]

$$\begin{aligned}\frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{c^2\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 m(r)}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}, \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Οι εξισώσεις (4.32) μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να γίνει πιο εύκολος ο προγραμματισμός τους,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{P}(r)}{dr} &= -1.474 \frac{\bar{\epsilon}(r)\bar{M}(r)}{r^2} \left(1 + \frac{\bar{P}(r)}{\bar{\epsilon}(r)}\right) \left(1 + 11.2 \times 10^{-6} r^3 \frac{\bar{P}(r)}{\bar{M}(r)}\right) \\ &\quad \times \left(1 - 2.948 \frac{\bar{M}(r)}{r}\right)^{-1}, \\ \frac{d\bar{M}(r)}{dr} &= 11.2 \times 10^{-6} r^2 \bar{\epsilon}(r).\end{aligned}\quad (4.33)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις (4.33), οι ποσότητες  $\bar{P}(r)$ ,  $\bar{\epsilon}(r)$  και  $\bar{M}(r)$  είναι αδιάστατες. Η ακτίνα  $r$  μετριέται σε km. Πιο συγκεκριμένα επειδή

$$M(r) = \bar{M}(r) M_{\odot}, \quad \epsilon(r) = \bar{\epsilon}(r) \epsilon_0, \quad P(r) = \bar{P}(r) \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 1 \text{ MeV fm}^{-3}, \quad (4.34)$$

από την εξίσωση (4.33) έχουμε

$$\bar{M}(R) = 11.2 \times 10^{-6} \int_0^R r^2 \bar{\epsilon}(r) dr = b_0 \int \bar{\epsilon}(r) dr. \quad (4.35)$$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων για  $P(r)$  και  $M(r)$  γίνεται ολοκλήρωση από  $R = 0$  μέχρι το σημείο  $r = R$  όπου η πίεση γίνεται μηδέν. Το σημείο αυτό δίνει την ακτίνα  $R$  του αστέρα. Για την ολοκλήρωση χρειάζεται μια αρχική τιμή για την πίεση στο σημείο  $r = 0$ , που ονομάζεται  $P_c = P(r = 0)$ . Η ακτίνα του αστέρα  $R$  και η μάζα του εξαρτώνται από την τιμή  $P_c$ . Επίσης είναι απαραίτητη η γνώση της ενεργειακής πυκνότητας  $\epsilon(r)$  ή της πυκνότητας της μάζας  $\rho(r)$  συναρτήσει της πίεσης  $P(r)$ . Αυτή

είναι στην ουσία η καταστατική εξίσωση ενός αστέρα νετρονίων, η οποία στην παρούσα μελέτη υπολογίστηκε για διάφορες περιπτώσεις.

Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν σε δύο διαφορετικά εδάφια. Στο πρώτο εδάφιο γίνεται μια εκτενής μελέτη των βασικών ιδιοτήτων του αστέρα νετρονίων (μάζα, ακτίνα) και της διεργασίας URCA χρησιμοποιώντας τις δύο διαφορετικές παραμετροποιήσεις που προτάθηκαν για τον δυναμικό όρο της ενέργειας συμμετρίας. Στο δεύτερο εδάφιο θα παρουσιαστεί μια μελέτη των πληροφοριακών μεγεθών ενός αστέρα νετρονίων με τη βοήθεια της πρώτης παραμετροποίησης και θα εξεταστεί η σύνδεση τους με χαρακτηριστικές ιδιότητες του συστήματος όπως είναι η μάζα και η ακτίνα. Επιπλέον θα εξεταστεί η εξάρτηση της πληροφοριακής εντροπίας και της πολυπλοκότητας από τις πυρηνικές δυνάμεις μέσω της δυναμικής παραμέτρου  $c$  και της βαρυτικής σταθεράς  $G$ . Τέλος θα σχολιαστεί και η επίδραση των πληροφοριακών μεγεθών στην σταθερότητα του αστέρα βασιζόμενοι στο γεγονός ότι οι περιοχές σταθερότητας εξαρτώνται από την ανισότητα  $dM/dR < 0$ . Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση μας, θεωρήθηκε ότι η θερμοκρασία του αστέρα είναι  $T \simeq 0$ , με την έννοια ότι η ενέργεια Fermi είναι πολύ μεγαλύτερη από  $kT$ .

## 4.4 Αποτελέσματα I

Αρχικά έγινε εφαρμογή των παραπάνω στην απλή περίπτωση όπου ο δυναμικός όρος της ενέργειας συμμετρίας παραμετροποιείται με την συνάρτηση  $F(u) = u^c$  και επομένως η συνολική συνεισφορά της ενέργειας συμμετρίας μπορεί να γραφεί

$$E_{sym}(u) = 13u^{2/3} + 17u^c. \quad (4.36)$$

Η δυναμική παράμετρος  $c$  παίρνει τιμές ανάμεσα σε  $0.4 \leq c \leq 1.5$  με αποτέλεσμα το πρότυπό μας να δίνει αξιόπιστες τιμές για την ενέργεια συμμετρίας. Η ολική πίεση της ψυχρής  $\beta$ -σταθερής βαρυονικής ύλης δίνεται

από την σχέση

$$P(n, x) = n^2 \left[ \frac{E'(n, \frac{1}{2})}{A} + E'_{sym}(n)(1 - 2x)^2 \right] + P_{e^-}(n), \quad (4.37)$$

όπου η  $E'_{sym}(n)$  έχει τη μορφή

$$E'_{sym}(n) \equiv \frac{dE_{sym}(n)}{dn} = \frac{1}{n_s} \left[ \frac{26}{3} u^{-1/3} + 17cu^{c-1} \right]. \quad (4.38)$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την τιμή της ολικής πίεσης στην πυκνότητα κορεσμού  $n_s$ , αν θεωρηθεί ότι η πίεση των ηλεκτρονίων  $P_{e^-}(n)$  δίνεται από την σχέση

$$P_{e^-}(n) \simeq nx(1 - 2x)E_{sym}(n) \quad (4.39)$$

η ολική πίεση στην  $n_s$  θα δίνεται από την έκφραση

$$P_s(n_s, x_s) = n_s(1 - 2x_s) \left[ n_s E'_{sym}(n_s)(1 - 2x_s) + E_{sym}(n_s)x_s \right], \quad (4.40)$$

όπου  $E'_{sym}(n_s) = \left[ \frac{dE_{sym}(n)}{dn} \right]_{n=n_s}$  και το ποσοστό των πρωτονίων σε ισορροπία ( $n_s$ ) είναι

$$x_s \simeq (3\pi^2 n_s)^{-1} (4E_{sym}(n_s)/\hbar c)^3 \simeq 0.04. \quad (4.41)$$

Για μικρές τιμές του  $x_s$  βρέθηκε ότι

$$P_s(n_s, x_s) \simeq n_s^2 E'_{sym}(n_s). \quad (4.42)$$

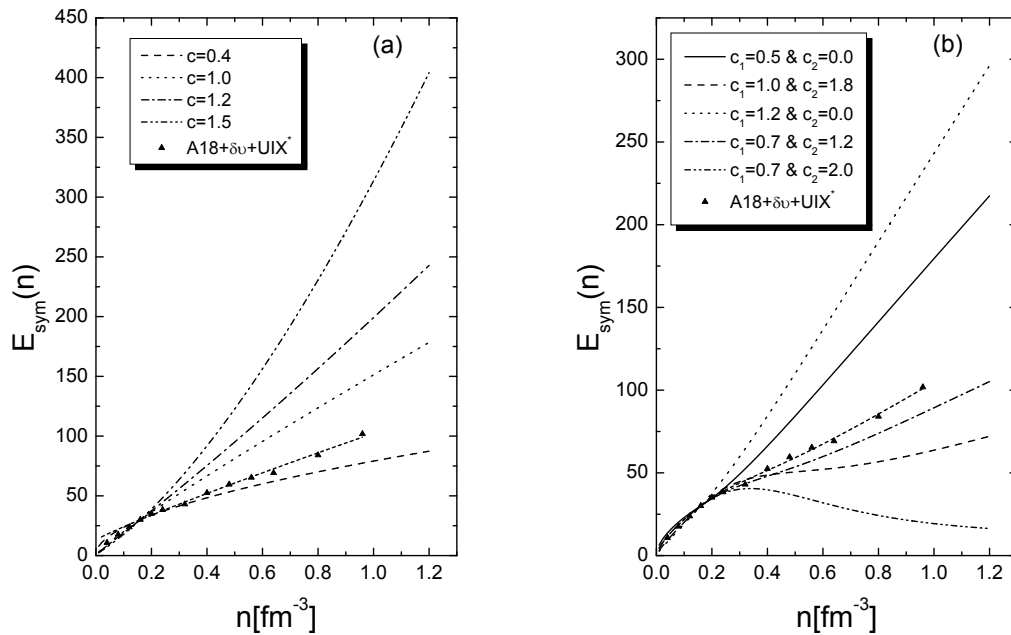
Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται ότι η πίεση εξαρτάται από την τιμή της παραγώγου της ενέργειας συμμετρίας στην πυκνότητα κορεσμού  $n_s$ . Χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο πρότυπό μας, από την εξίσωση (4.38) έχουμε

$$E'_{sym}(n_s) \simeq \frac{1}{n_s} \left( \frac{26}{3} + 17c \right). \quad (4.43)$$

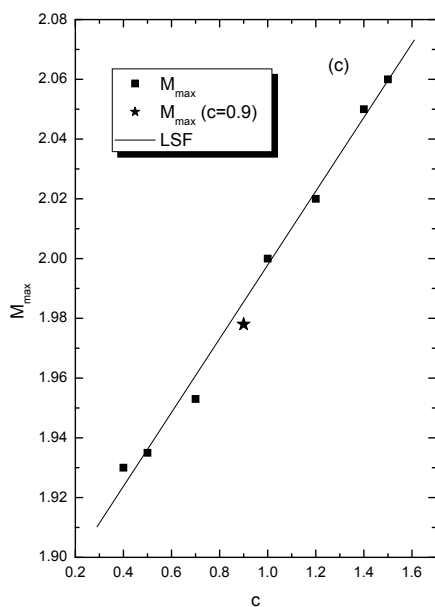
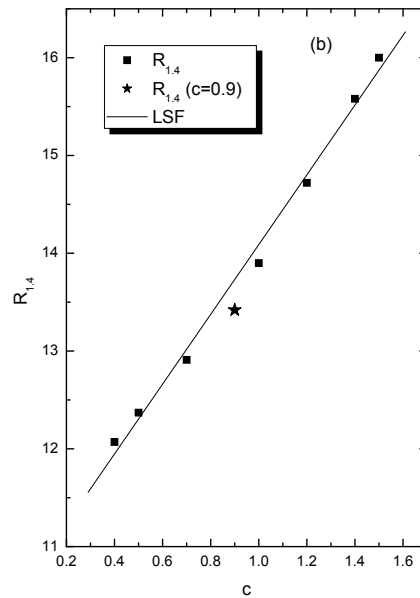
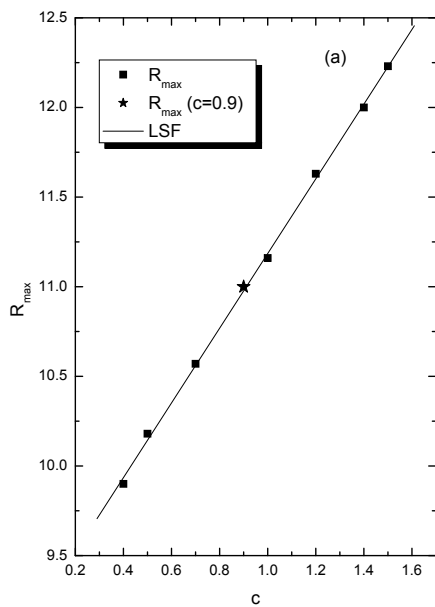
Από τις εξισώσεις (4.42) και (4.43) βγαίνει το συμπέρασμα ότι η σχέση μεταξύ της πίεσης  $P_s$  και της δυναμικής παραμέτρου  $c$  είναι

$$P_s(n_s, x_s) \simeq n_s \left( \frac{26}{3} + 17c \right). \quad (4.44)$$

Για να υπολογιστεί η μάζα και η ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων, επιλύθηκαν αριθμητικά οι εξισώσεις TOV με τις καταστατικές εξισώσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις προτεινόμενες συναρτήσεις παραμετροποίησης που δίνονται από τις σχέσεις (4.14) και (4.15). Για πολύ χαμηλές πυκνότητες ( $n < 0.08 \text{ fm}^{-3}$ ) χρησιμοποιήθηκε η καταστατική εξίσωση των Feynman et al [108] και η καταστατική εξίσωση των Baym et al [109].



Σχήμα 4.1: (a)  $E_{\text{sym}}(n)$  για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$  της συνάρτησης  $F(u)$  (4.14), σε σχέση με τη βαρυονική πυκνότητα  $n$ . (b)  $E_{\text{sym}}(n)$  για διάφορες τιμές των δυναμικών παραμέτρων  $c_1$  και  $c_2$  της συνάρτησης  $F(u)$  (4.15), σε σχέση με τη βαρυονική πυκνότητα  $n$ . Το σύμβολο  $\blacktriangle$  αντιστοιχεί στην περίπτωση  $A18 + \delta u + UIX^*$  [98].



Σχήμα 4.2: (a) Η ακτίνα  $R_{max}$  συναρτήσει της παραμέτρου  $c$ . (b) Η ακτίνα  $R_{1.4}$  συναρτήσει της παραμέτρου  $c$ . (c) Η μέγιστη μάζα  $M_{max}$  ενός αστέρα νετρονίων συναρτήσει της παραμέτρου  $c$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στις ευθείες ελαχίστων τετραγώνων (4.45), (4.46) και (4.47) αντιστοίχως. Σε όλα τα σχήματα σημειώνεται με το σύμβολο  $\star$  η περίπτωση  $A18 + du + UIX^*$  ( $c = 0.9$ ).

Η εξάρτηση της ενέργειας συμμετρίας από την πυκνότητα φαίνεται στο σχήμα (4.1a), στο οποίο αποτυπώνεται η ενέργεια συμμετρίας  $E_{sym}(n)$ , ως συνάρτηση της πυκνότητας  $n$  για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$ . Είναι προφανές ότι η παράμετρος  $c$  επηρεάζει σημαντικά την τάση της ενέργειας συμμετρίας, ιδιαίτερα για υψηλές τιμές της πυκνότητας. Επομένως είναι πολύ ενδιαφέρον να μελετηθεί πώς η παράμετρος  $c$  και γενικότερα η δυναμική συνεισφορά, επηρεάζουν τις ιδιότητες του αστέρα νετρονίων. Στο ίδιο σχήμα συμπεριλήφθηκαν τα αποτελέσματα της [98] (περίπτωση  $A18 + \delta u + UIX^*$ ). Βρέθηκε ότι φαινομενολογική σχέση της ενέργειας συμμετρίας (4.12) σε συνδυασμό με τη συνάρτηση παραμετροποίησης  $F(u)$  της σχέσης (4.14) και κατάλληλη επιλογή της τιμής της δυναμικής παραμέτρου  $c$  ( $c = 0.9$ ) αναπαράγει τους μικροσκοπικούς υπολογισμούς της αναφοράς [98].

Από το σχήμα (4.2a) φαίνεται ότι υπάρχει μια γραμμική εξάρτηση της ακτίνας  $R_{max}$  από τη δυναμική παράμετρο  $c$ . Από την ανάλυση βγαίνει το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ακτίνας  $R_{max}$  και της παραμετροποίησης του δυναμικού μέρους της ενέργειας συμμετρίας. Η ακόλουθη γραμμική σχέση, που βρέθηκε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, αναπαράγει την τιμή της  $R_{max}$  ως συνάρτηση της δυναμικής παραμέτρου  $c$ .

$$R_{max} = 9.10195 + 2.08304c \quad (4.45)$$

Στη συνέχεια, στο σχήμα (4.2b) αποτυπώνεται η συμπεριφορά της ακτίνας ενός αστέρα νετρονίων  $R_{1.4}$  που αντιστοιχεί σε αστέρα νετρονίων με μάζα  $M = 1.4M_{\odot}$  σε σχέση με τη δυναμική παράμετρο  $c$ . Είναι προφανές ότι και πάλι υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ  $R_{1.4}$  και  $c$ , η οποία είναι

$$R_{1.4} = 10.52114 + 3.56746c. \quad (4.46)$$

Το σχήμα (4.2c) δείχνει το συσχετισμό μεταξύ της μέγιστης μάζας ενός αστέρα νετρονίων  $M_{max}$  και της παραμέτρου  $c$ . Και πάλι βρέθηκε μια γραμμική σχέση που συνδέει την  $M_{max}$  με την παράμετρο  $c$ . Η γραμμική σχέση είναι

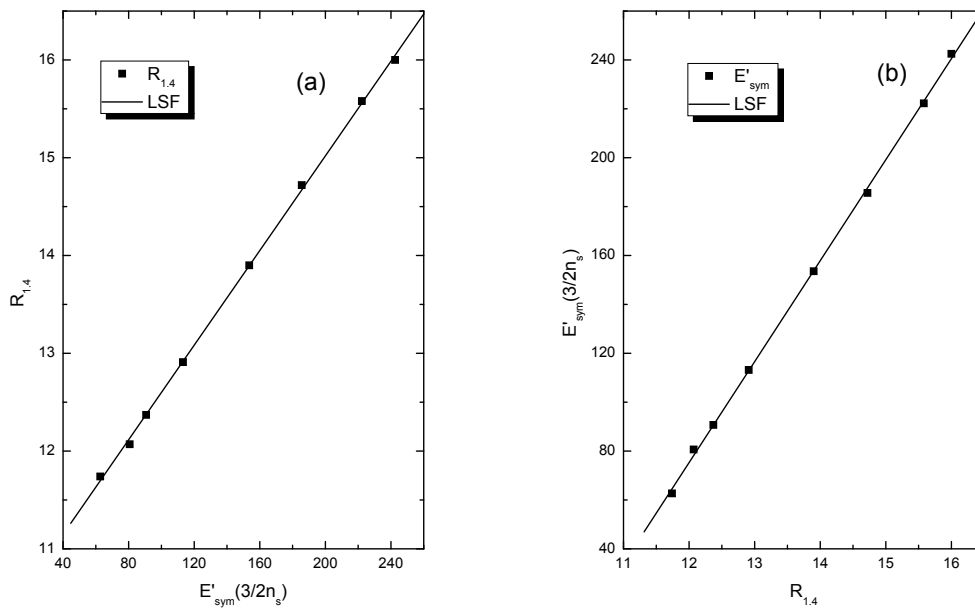
$$M_{max} = 1.87442 + 0.12344c. \quad (4.47)$$

Με συνδυασμό των εξισώσεων (4.43) και (4.46) βρήκαμε τελικά μια γραμμική σχέση που συνδέει τα  $R_{1.4}$  και  $E'_{sym}(n_s)$

$$R_{1.4} = 8.702 + 0.0336E'_{sym}(n_s) \quad (4.48)$$

και αντιστρόφως

$$E'_{sym}(n_s) = -259.185 + 29.783R_{1.4}. \quad (4.49)$$



Σχήμα 4.3: (a) Η ακτίνα  $R_{1.4}$  σε σχέση με την παράγωγο της ενέργειας συμμετρίας  $E'_{sym}(3n_s/2)$ . (b)  $E'_{sym}(3n_s/2)$  σε σχέση με την ακτίνα  $R_{1.4}$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στις ευθείες ελαχίστων τετραγώνων (4.50) και (4.51) αντίστοιχα.

Για να φανεί καλύτερα η σχέση της ακτίνας  $R_{1.4}$  και της τάσης της ενέργειας συμμετρίας, δημιουργήθηκε το σχήμα (4.3a), στο οποίο παρουσιάζεται η εξάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  σε σχέση με την παράγωγο της

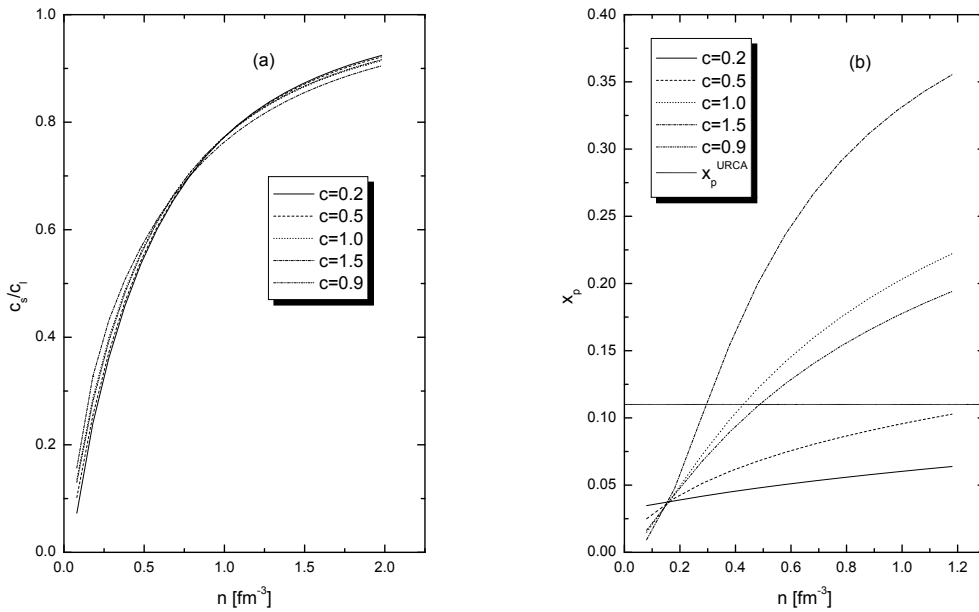


ενέργειας συμμετρίας  $E'_{sym}(3n_s/2)$  για πυκνότητα ίση με  $n = 3n_s/2$ . Και σε αυτήν την περίπτωση βρέθηκε η παρακάτω γραμμική σχέση

$$R_{1.4} = 10.1798 + 0.0242E'_{sym}(3n_s/2). \quad (4.50)$$

Υπάρχει επομένως μια άμεση σχέση μεταξύ της ακτίνας  $R_{1.4}$  και της συμπεριφοράς της ενέργειας συμμετρίας κοντά στο σημείο κορεσμού  $n_s$ . Στο σχήμα (4.3b) φαίνεται η αντίστροφη σχέση, δηλαδή η  $E'_{sym}(3n_s/2)$  συναρτήσει της  $R_{1.4}$  και η αντίστοιχη γραμμική σχέση

$$E'_{sym}(3n_s/2) = -420.40895 + 41.3066R_{1.4}. \quad (4.51)$$



Σχήμα 4.4: (a) Ο λόγος  $c_s/c_l$  σε σχέση με την βαρυονική πυκνότητα  $n$  για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$ . (b) Το ποσοστό πρωτονίων  $x_p$  σε σχέση με την βαρυονική πυκνότητα  $n$  για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$ . Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει την έναρξη της διεργασίας URCA ( $x_p = 0.11$ ).

Για να επιβεβαιωθεί η ισχύς της συνθήκης σχετικιστικής αιτιότητας παρουσιάζεται το σχήμα (4.4a), στο οποίο απεικονίζεται ο λόγος της ταχύτητας του ήχου προς την ταχύτητα του φωτός  $c_s/c_l$  συναρτήσει της βαρυονικής πυκνότητας για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$ . Σε όλες τις περιπτώσεις η ταχύτητα του ήχου δεν ξεπερνά αυτή του φωτός ακόμα και για υψηλές τιμές της πυκνότητας. Στο σχήμα (4.4b) απεικονίζεται το ποσοστό πρωτονίων  $x_p$  που υπολογίστηκε με τη βοήθεια της σχέσης (4.29) ως συνάρτηση της βαρυονικής πυκνότητας. Είναι προφανές ότι μόνο για περιπτώσεις  $c > 0.5$  και μετά από μια συγκεκριμένη πυκνότητα, το ποσοστό πρωτονίων ξεπερνά την κρίσιμη τιμή  $x_{URCA} \simeq 0.11$  που διασφαλίζει την έναρξη της διεργασίας URCA.

Έγινε επίσης προσπάθεια να βρεθούν οι συσχετίσεις μεταξύ της πίεσης (άρα και της ακτίνας  $r$ ) και της ενέργειας συμμετρίας για άλλες τιμές της πυκνότητας  $n$ . Για να βρεθεί μια καλύτερη σχέση μεταξύ της ακτίνας και της πίεσης, χρησιμοποιήθηκε ένα απλοποιημένο πρότυπο μιας μη σχετικιστικής εξίσωσης με μια πολυτροπική καταστατική εξίσωση της αναφοράς [62, 96] της μορφής

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{\lambda}. \quad (4.52)$$

και η ακτίνα του αστέρα θα δίνεται από τη σχέση

$$R = \left[ \frac{(\lambda + 1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-\lambda)/2\lambda} \xi_1, \quad (4.53)$$

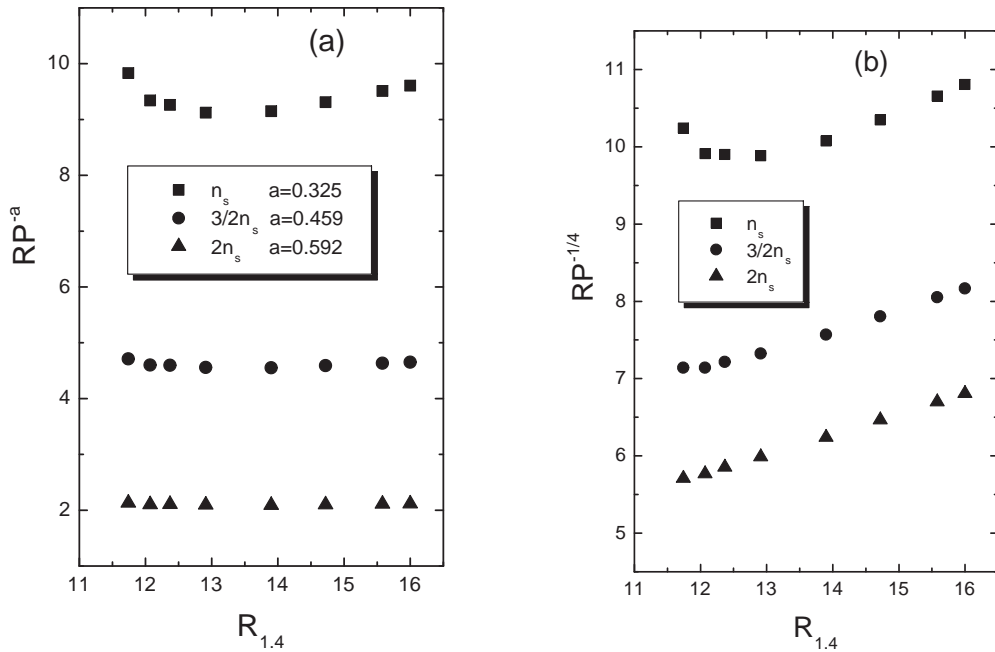
όπου  $\rho_c$  είναι η κεντρική πυκνότητα και  $\xi_1$  είναι η λύση της εξίσωσης  $\theta(\xi_1) = 0$ . Η συνάρτηση  $\theta(\xi)$  είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^\lambda. \quad (4.54)$$

Από τις εξίσώσεις (4.52) και (4.53) για την περίπτωση  $\lambda = 1$  (ή  $\gamma = 2$ ) όπου  $\xi = \pi$  προκύπτει

$$\frac{R}{P^{1/2}} = \left[ \frac{2G}{\pi} \right]^{1/2} \frac{1}{\rho}. \quad (4.55)$$

Από την εξίσωση (4.55) συμπεραίνεται ότι για την περίπτωση πολυτροπικής καταστατικής εξίσωσης με  $\gamma = 2$  υπάρχει μια σχέση για το λόγο  $R/P^{1/2}$  που υπολογίζεται για μια συγκεκριμένη τιμή της πυκνότητας  $\rho$ . Βεβαίως αν ληφθούν υπόψη και επιδράσεις γενικής σχετικότητας στην παραπάνω ανάλυση, ο εκθέτης  $1/2$  της πίεσης είναι αρκετά μικρότερος [96].



Σχήμα 4.5: (a) Η ποσότητα  $RP^{-\alpha}$  σαν συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$ . Σε κάθε τιμή της πυκνότητας αντιστοιχεί ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με παράμετρο το εκθετικό  $\alpha$ . (b) Η ποσότητα  $RP^{-1/4}$  σαν συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$ .

Με βάση τα παραπάνω, παρουσιάζεται στο σχήμα (4.5a) η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-\alpha}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$ . Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ακτίνας  $R_{1.4}$  και της τιμής της πίεσης για πυκνότητες  $1n_s$ ,  $3n_s/2$  και  $2n_s$ . Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $C(n)$

υπολογίσθηκαν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και προσαρμογή των δεδομένων μας στην έκφραση  $R_{1.4} = C(n)P^\alpha$ .

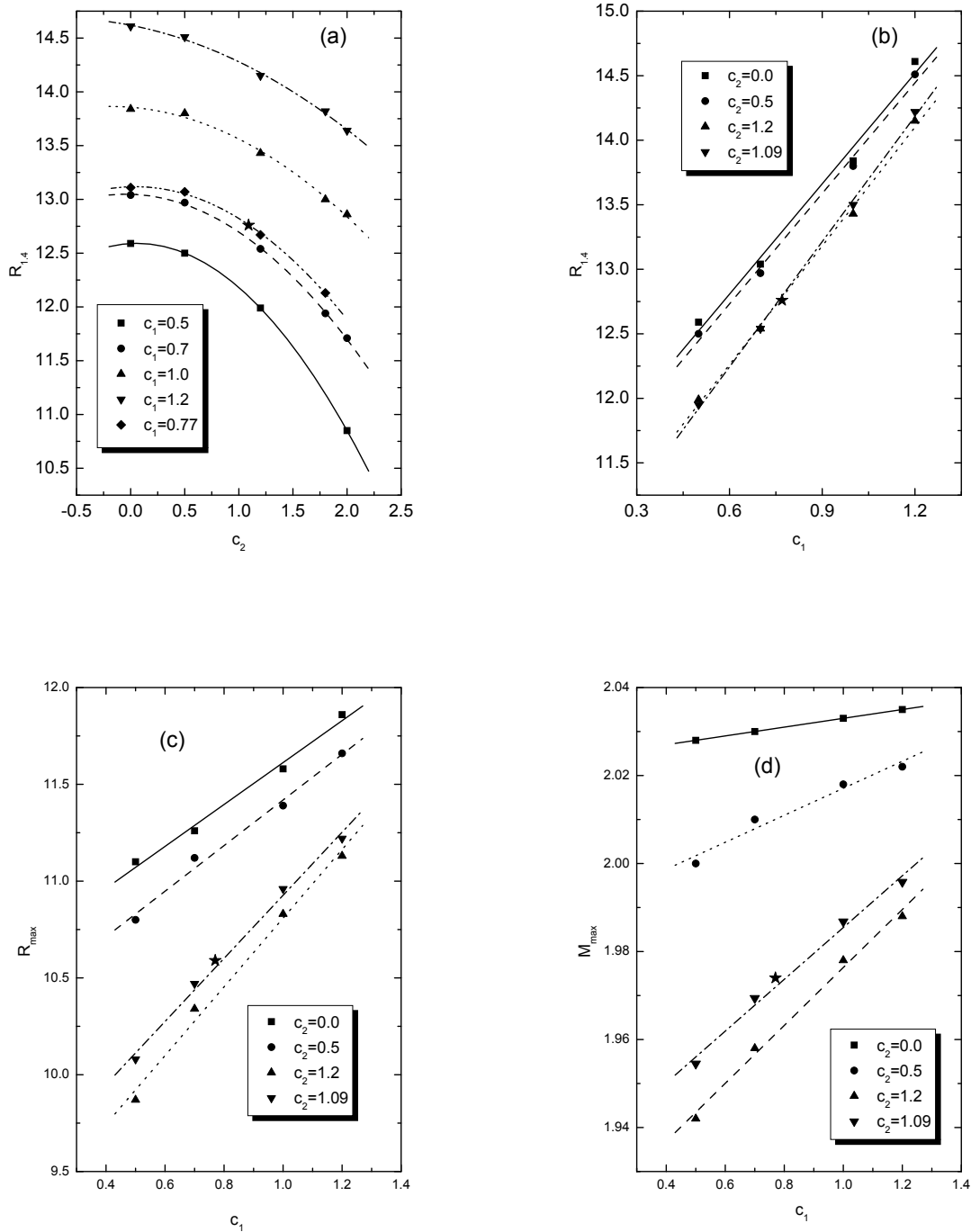
Επιπρόσθετα στο σχήμα (4.5b) φαίνεται η εξάρτηση της ποσότητας  $R_{1.4}P^{-1/4}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  για να γίνει η σύγκριση με άλλες ερευνητικές εργασίες [96]. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-1/4}$  παρουσιάζει μια αυξητική τάση ως προς την ακτίνα  $R_{1.4}$ . Αυτό γίνεται πιο ξεκάθαρο όσο απομακρυνόμαστε από την πυκνότητα κορεσμού ( $n = 3n_s/2, 2n_s$ ).

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η πιο πολύπλοκη περίπτωση όπου η συνάρτηση  $F(u)$  δίνεται από την έκφραση (4.15). Στην περίπτωση αυτή η παράγωγος της  $E_{sym}(n)$  δίνεται από τη σχέση

$$E'_{sym}(n) = \begin{cases} \frac{1}{n_s} \left[ \frac{26}{3}u^{-1/3} + 17c_1u^{c_1-1} \right] & u \leq 1 \\ \frac{1}{n_s} \left[ \frac{26}{3}u^{-1/3} + 17(c_1 + 1 - c_2 + e^{1-u}u^{c_2}(\frac{c_2}{u} - 1)) \right] & u \geq 1. \end{cases} \quad (4.56)$$

Οι δυναμικές παράμετροι  $c_1$  και  $c_2$  παίρνουν τιμές στα διαστήματα  $0.5 \leq c_1 \leq 1.2$  και  $0 \leq c_2 \leq 2$ , ώστε να ληφθούν αξιόπιστα αποτελέσματα για την ενέργεια συμμετρίας.

Στο σχήμα (4.1b) φαίνεται η  $E_{sym}(n)$  ως συνάρτηση της πυκνότητας  $n$  για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $c_1$  και  $c_2$ . Παρατηρήθηκε ότι για σταθερή τιμή της παραμέτρου  $c_2$ , η ενέργεια συμμετρίας είναι αύξουσα συνάρτηση της  $c_1$ , ενώ για σταθερές τιμές της παραμέτρου  $c_1$ , η ενέργεια συμμετρίας είναι αντιστρόφως ανάλογη της παραμέτρου  $c_2$ . Με το συγκεκριμένο πρότυπο μπορεί να αναπαραχθεί η συμπεριφορά της  $E_{sym}(n)$  όπως παρουσιάζεται και στους μικροσκοπικούς υπολογισμούς. Για να γίνει καλύτερα η σύγκριση συμπεριλήφθηκαν πάλι αποτελέσματα από την [98] ( $A18 + \delta u + UIX^*$ ). Βρέθηκε ότι η χρήση της φαινομενολογικής εξίσωσης (4.12) με κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους ( $c_1 = 0.77$  και  $c_2 = 1.09$ ) στην συνάρτηση (4.15) αναπαράγει τους παραπάνω υπολογισμούς.



Σχήμα 4.6: (a) Η ακτίνα  $R_{1,4}$  ως συνάρτηση της δεύτερης δυναμικής παραμέτρου  $c_2$  για διάφορες τιμές της πρώτης δυναμικής παραμέτρου  $c_1$ . (b), (c) και (d) Η ακτίνα  $R_{1,4}$ ,  $R_{max}$  και  $M_{max}$  αντίστοιχα ως συνάρτηση της πρώτης δυναμικής παραμέτρου  $c_1$  για διάφορες τιμές της δεύτερης δυναμικής παραμέτρου  $c_2$ . Η γραμμές αντιστοιχούν στην προσαρμογή των σημείων. Το σύμβολο ★ αντιστοιχεί στην περίπτωση  $A18 + \delta u + UIX^*$ .

Στο σχήμα (4.6a) φαίνεται η συμπεριφορά της ακτίνας  $R_{1.4}$  ως συνάρτηση της δεύτερης δυναμικής παραμέτρου  $c_2$  για διάφορες τιμές της πρώτης δυναμικής παραμέτρου  $c_1$ . Για την προσαρμογή των σημείων χρησιμοποιήθηκε πολυώνυμο δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} R_{1.4} &= 12.58956 + 0.05378c_2 - 0.46172c_2^2, & c_1 &= 0.5 \\ R_{1.4} &= 13.04786 - 0.02752c_2 - 0.32340c_2^2, & c_1 &= 0.7 \\ R_{1.4} &= 13.85705 - 0.08087c_2 - 0.21393c_2^2, & c_1 &= 1.0 \\ R_{1.4} &= 14.61946 - 0.19441c_2 - 0.14536c_2^2, & c_1 &= 1.2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Σε όλες τις περιπτώσεις η ακτίνα  $R_{1.4}$  είναι φθίνουσα συνάρτηση της δυναμικής παραμέτρου  $c_2$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή η καταστατική εξίσωση γίνεται πιο μαλακή λόγω της αύξησης της τιμής της παραμέτρου  $c_2$ .

Στο σχήμα (4.6b) φαίνεται η συμπεριφορά της ακτίνας  $R_{1.4}$  ως συνάρτηση της πρώτης δυναμικής παραμέτρου  $c_1$  για διάφορες τιμές της δεύτερης δυναμικής παραμέτρου  $c_2$ .

Παρακάτω παραθέτουμε τις γραμμικές εξισώσεις που συνδέουν τα παραπάνω μεγέθη. Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε και σε αυτή την περίπτωση είναι αυτή των ελαχίστων τετραγώνων

$$\begin{aligned} R_{1.4} &= 11.09603 + 2.85172c_1, & c_2 &= 0.0 \\ R_{1.4} &= 11.01810 + 2.85517c_1, & c_2 &= 0.5 \\ R_{1.4} &= 10.42034 + 3.06724c_1, & c_2 &= 1.2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

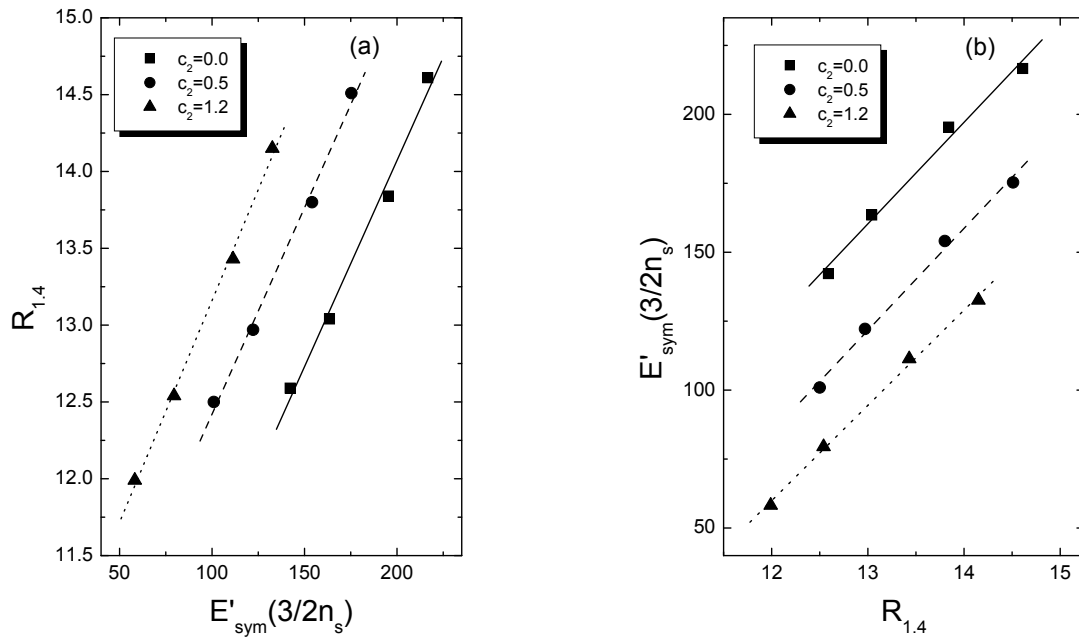
Αντίθετα με την προηγούμενη περίπτωση, η ακτίνα  $R_{1.4}$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση την δυναμικής παραμέτρου  $c_1$ . Η αύξηση της  $c_1$  οδηγεί την ενέργεια συμμετρίας σε μια απότομη συμπεριφορά. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις παραπάνω ευθείες, οι κλίσεις είναι περίπου οι ίδιες και υπάρχει μια σχεδόν παράλληλη μετατόπιση των γραμμών προς τα κάτω με την αύξηση του  $c_2$ .

Επίσης από τα σχήματα (4.6a) και (4.6b) συμπεραίνεται ότι η ακτίνα  $R_{1.4}$  εξαρτάται κυρίως από την παράμετρο  $c_1$  που καθορίζει την παράγωγο της  $E_{sym}(n)$  και την πίεση  $P_{sat}$  στην πυκνότητα κορεσμού  $n_s$ . Βεβαίως

υπάρχει και μια μικρή εξάρτηση από την παράμετρο  $c_2$ , η οποία συνδέεται με την κλίση της  $E_{sym}(n)$  σε υψηλές τιμές της πυκνότητας  $n_s$ .

Τα σχήματα (4.6c) και (4.6d) δείχνουν την εξάρτηση της ακτίνας  $R_{max}$  και της μάζας  $M_{max}$  από την παράμετρο  $c_1$  (για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $c_2$ ). Με το σύμβολο ★ συμβολίζεται η περίπτωση  $A18 + \delta u + UIX^*$  ( $c_1 = 0.77$  και  $c_2 = 1.09$ ). Και στις δύο περιπτώσεις ισχύουν γραμμικές σχέσεις μεταξύ των  $R_{max}$ ,  $M_{max}$  και της παραμέτρου  $c_1$ . Οι ευθείες αντιστοιχούν σε προσαρμογή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Είναι πολύ ενδιαφέρον να συγκριθούν οι διάφορες ιδιότητες του αστέρα νετρονίων ( $R_{1.4}$ ,  $R_{max}$  και  $M_{max}$ ) που προήλθαν από τις σχέσεις (4.14) και (4.15). Για παράδειγμα έγινε χρήση της παραμετροποίησης των δυναμικών παραμέτρων των (4.14) και (4.15) που αναπαράγουν αρκετά καλά την τάση της  $E_{sym}$  της περίπτωσης  $A18 + \delta u + UIX^*$ . Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν είναι  $R_{1.4}(c = 0.9) = 13.42$  και  $R_{1.4}(c_1 = 0.77, c_2 = 1.09) = 12.76$  (διαφορά 5%),  $R_{max}(c = 0.9) = 11$  και  $R_{max}(c_1 = 0.77, c_2 = 1.09) = 10.59$  (διαφορά 3.7%),  $M_{max}(c = 0.9) = 1.978$  και  $M_{max}(c_1 = 0.77, c_2 = 1.09) = 1.974$  (διαφορά 0.2%). Στην περίπτωση  $A18 + \delta u + UIX^*$  τα αποτελέσματα είναι περίπου ίδια για τη μάζα  $M_{max}$  ενώ παρατηρήθηκαν μικρές διαφορές για τις ακτίνες  $R_{1.4}$  και  $R_{max}$ . Η διαφοροποίηση των τιμών της ακτίνας  $R_{1.4}$  είναι συνέπεια της γραμμικής σχέσης που ισχύει μεταξύ της ακτίνας  $R_{1.4}$  και της παραγώγου της  $E_{sym}$  και σύμφωνα με την (4.42) και της πίεσης, κοντά στο σημείο κορεσμού (βλέπε σχήματα (4.3) και (4.7)). Πιο συγκεκριμένα για τις δύο περιπτώσεις  $P_s(c = 0.9) = 3.83467 \text{ MeV fm}^{-3}$  και  $P_s(c_1 = 0.77, c_2 = 1.09) = 3.48107 \text{ MeV fm}^{-3}$ . Η μικρή διαφοροποίηση στις ακτίνες δεν εκπλήσσει αφού η τάση των εξισώσεων (4.14) και (4.15), με τη βοήθεια κατάλληλης παραμετροποίησης είναι παρόμοια. Βέβαια πρέπει να τονιστεί ότι η (4.15) είναι μια γενίκευση της (4.14), με την έννοια ότι, ενώ η εξίσωση (4.14) περιγράφει καλά την περίπτωση όπου η  $E_{sym}$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση της πυκνότητας, η εξίσωση (4.15) είναι πιο ευέλικτη και περιγράφει και την περίπτωση όπου η  $E_{sym}$  αυξάνει για χαμηλές πυκνότητες, αλλά στη συνέχεια ελαττώνεται.



Σχήμα 4.7: (a) Η ακτίνα  $R_{1.4}$  συναρτήσει της παραγώγου της ενέργειας συμμετρίας  $E'_{sym}(3n_s/2)$  για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $c_2$ . (b)  $E'_{sym}(3n_s/2)$  σε σχέση με την ακτίνα  $R_{1.4}$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στις προσαρμογές που έγιναν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (4.59), (4.60) και (4.61) αντίστοιχα.

Για να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω, μελετήθηκαν οι συσχετίσεις μεταξύ της παραγώγου της ενέργειας συμμετρίας  $E'_{sym}$  και της ακτίνας  $R_{1.4}$  κοντά στο σημείο κορεσμού  $n = 3n_s/2$ . Στο σχήμα (4.7a) φαίνεται η ακτίνα  $R_{1.4}$  ως συνάρτηση της παραγώγου της ενέργειας συμμετρίας  $E'_{sym}(3n_s/2)$  για συγκεκριμένες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c_2$ . Μπορεί κάποιος εύκολα να δει ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των  $R_{1.4}$  και  $E'_{sym}(3n_s/2)$  όπως και στο σχήμα (4.3a). Η μεταβολή της παραμέτρου  $c_2$  έχει ως αποτέλεσμα την παράλληλη μετατόπιση των προσαρμοζόμενων ευθειών. Στο σχήμα (4.7b) φαίνεται η αντίστροφη σχέση δηλαδή η  $E'_{sym}(3n_s/2)$  συναρτήσει της ακτίνας  $R_{1.4}$ . Παρακάτω παραθέτονται οι ευθείες ελαχίστων τετραγώνων

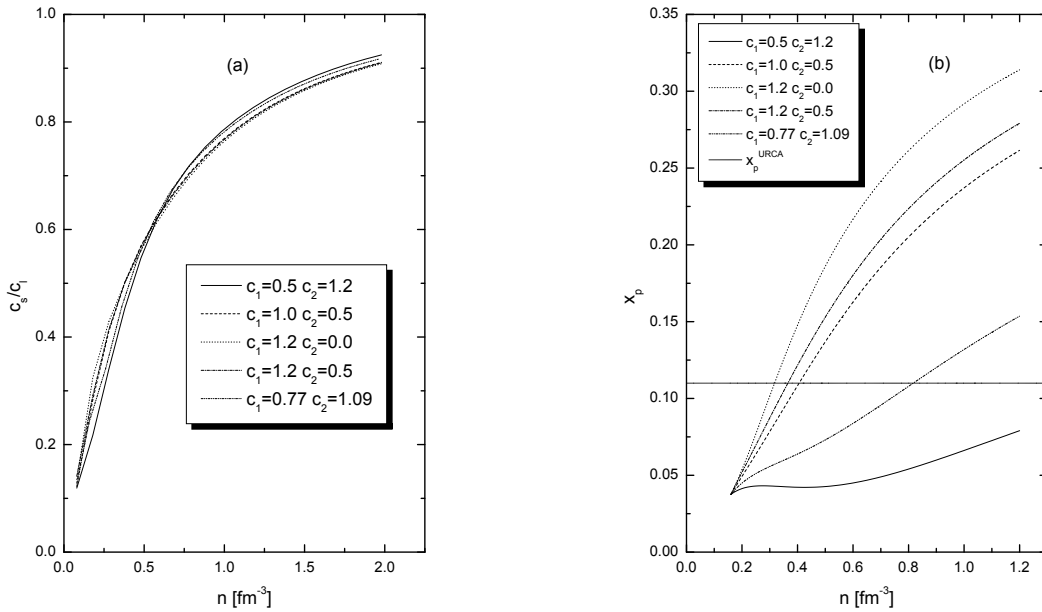


για όλες τις περιπτώσεις

$$\begin{aligned} R_{1.4} &= 8.70394 + 0.02684E'_{sym}(3n_s/2), & c_2 &= 0 \\ E'_{sym}(3n_s/2) &= -318.5026 + 36.82989R_{1.4}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} R_{1.4} &= 9.73291 + 0.02687E'_{sym}(3n_s/2), & c_2 &= 0.5 \\ E'_{sym}(3n_s/2) &= -359.07613 + 36.98138R_{1.4}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} R_{1.4} &= 10.27305 + 0.02887E'_{sym}(3n_s/2), & c_2 &= 1.2 \\ E'_{sym}(3n_s/2) &= -354.58213 + 34.54212R_{1.4}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

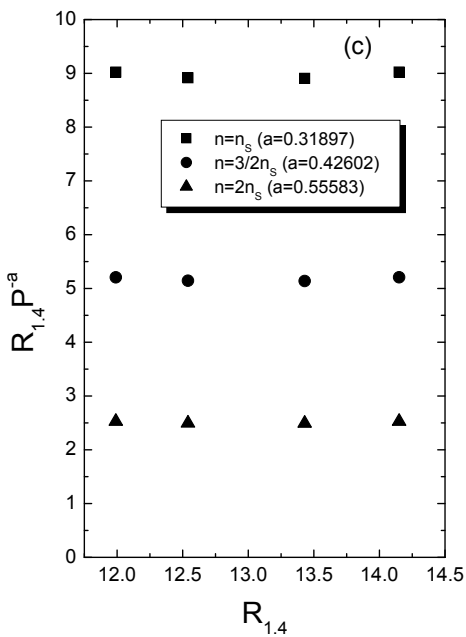
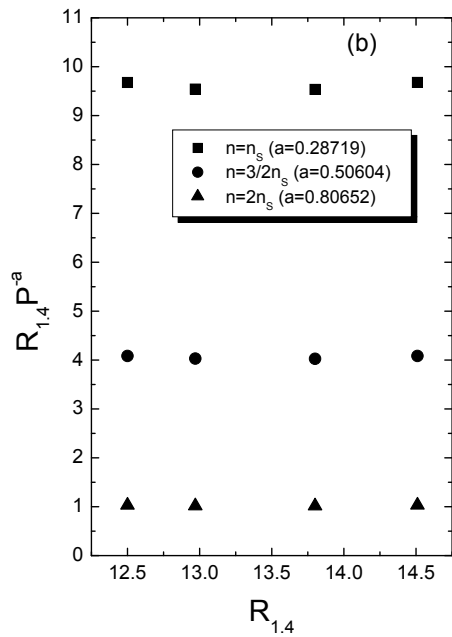
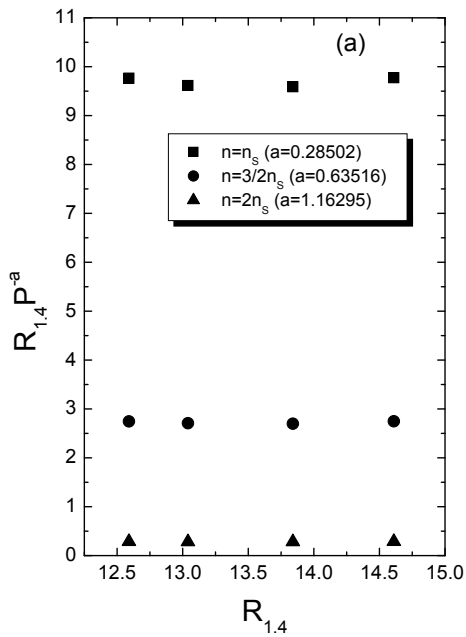


Σχήμα 4.8: (a) Ο λόγος  $c_s/c_l$  σε σχέση με την βαρυονική πυκνότητα  $n$  για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $c_1$  και  $c_2$ . (b) Το ποσοστό των πρωτονίων  $x_p$  σε σχέση με τη βαρυονική πυκνότητα  $n$  για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $c_1$  και  $c_2$ . Η οριζόντια γραμμή δείχνει την έναρξη της διεργασίας URCA ( $x_p = 0.11$ ).

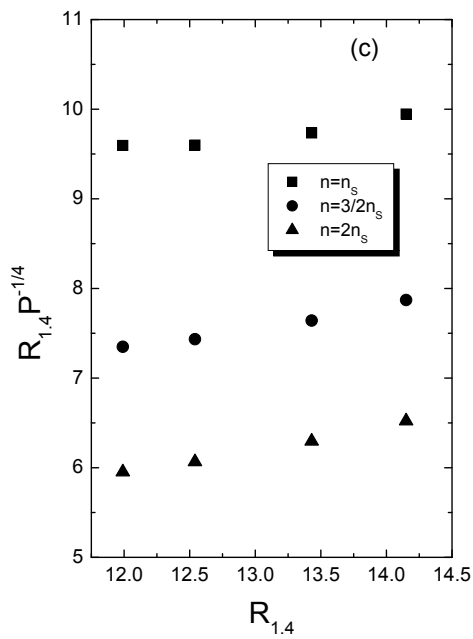
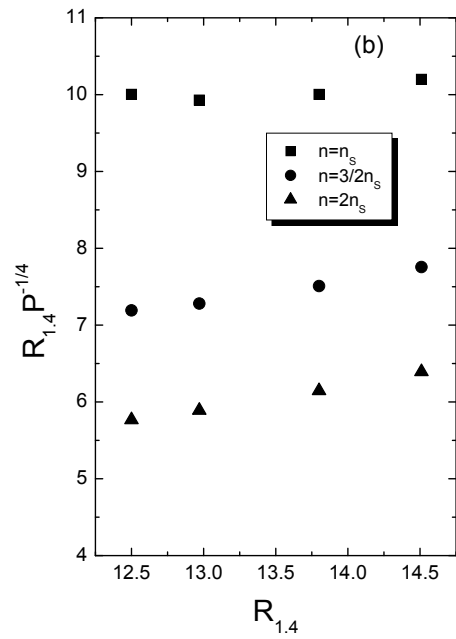
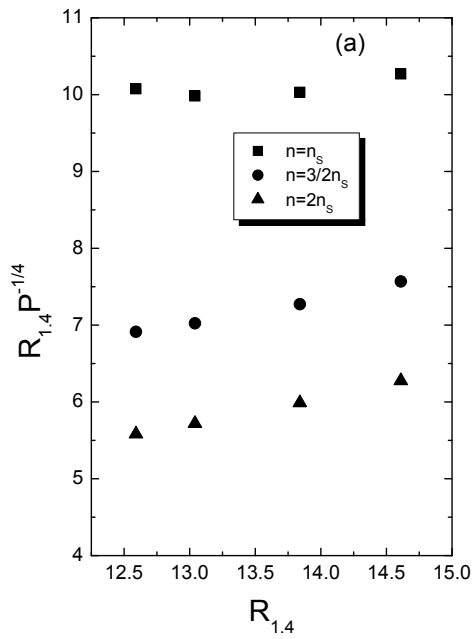
Στο σχήμα (4.8a) όπως και στο σχήμα (4.4a) παρουσιάζεται ο λόγος  $c_s/c_l$  ως συνάρτηση της βαρυονικής πυκνότητας για διάφορες περιπτώσεις. Είναι προφανές ότι και πάλι ικανοποιείται η συνθήκη σχετικιστικής αιτιότητας. Στο σχήμα (4.8b) φαίνεται το ποσοστό των πρωτονίων  $x_p$  ως συνάρτηση της βαρυονικής πυκνότητας για διάφορες περιπτώσεις. Μια συστηματική μελέτη του  $x_p$  οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δυναμική παράμετρος  $c_1$  είναι σημαντική για την διεργασία URCA. Πιο συγκεκριμένα, υψηλότερη τιμή της  $c_1$  οδηγεί σε γρηγορότερη (δηλαδή για μικρότερες τιμές της πυκνότητας) έναρξη της διεργασίας URCA.

Στο σχήμα (4.9) παρουσιάζεται η συμπεριφορά της ποσότητας  $R_{1.4}P^{-\alpha}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  για διάφορες τιμές της πυκνότητας  $n = n_s, 3n_s/2, 2n_s$ , και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $c_2$ , πιο αναλυτικά  $c_2 = 0$  (σχήμα (4.9a)),  $c_2 = 0.5$  (σχήμα (4.9b)) και  $c_2 = 1.2$  (σχήμα (4.9c)).

Στο σχήμα (4.10) παρουσιάζεται η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-1/4}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  για διάφορες τιμές της πυκνότητας  $n = n_s, 3n_s/2, 2n_s$ , και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $c_2$ , πιο αναλυτικά  $c_2 = 0$  (σχήμα (4.10a)),  $c_2 = 0.5$  (σχήμα (4.10b)) και  $c_2 = 1.2$  (σχήμα (4.10c)). Είναι προφανές ότι η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-1/4}$  είναι περίπου σταθερή για πυκνότητα ίση με την πυκνότητα κορεσμού  $n_s$ , ενώ για πυκνότητες  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-1/4}$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση. Επομένως για την περίπτωση της δεύτερης παραμετροποίησης της ενέργειας συμμετρίας συμπεραίνεται ότι υπάρχει εξάρτηση της ποσότητας  $R_{1.4}P^{-1/4}$  και από τις δύο δυναμικές παραμέτρους  $c_1$  και  $c_2$  και επομένως από την ενέργεια συμμετρίας και για χαμηλές αλλά και για υψηλές τιμές της βαρυονικής πυκνότητας.



Σχήμα 4.9: (a) Η ποσότητα  $RP^{-\alpha}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1,4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  και  $c_2 = 0$ . (b) Η ποσότητα  $RP^{-\alpha}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1,4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  και  $c_2 = 0.5$  (c) Η ποσότητα  $RP^{-\alpha}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1,4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  και  $c_2 = 1.2$ .



Σχήμα 4.10: (a) Η ποσότητα  $RP^{-1/4}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1,4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  και  $c_2 = 0$ . (b) Η ποσότητα  $RP^{-1/4}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1,4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  και  $c_2 = 0.5$  (c) Η ποσότητα  $RP^{-1/4}$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1,4}$  για πυκνότητες  $n = n_s$ ,  $n = 3n_s/2$  και  $n = 2n_s$  και  $c_2 = 1.2$ .

## 4.5 Αποτελέσματα II

Η αφητηρία της μελέτης μας είναι η επίλυση των εξισώσεων (4.33) για τρεις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις  $\beta$ -σταθερής πυρηνικής ύλης. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$ , οι οποίες χαρακτηρίζουν την εξάρτηση της ενέργειας συμμετρίας από την πυκνότητα. Για παράδειγμα  $c = 0.7$  (μαλακή (soft) καταστατική εξίσωση),  $c = 1.0$ , και  $c = 1.5$  (“απότομη” (stiff) καταστατική εξίσωση). Στο σχήμα (4.11a) φαίνεται η πυρηνική ενέργεια συμμετρίας, στο σχήμα (4.11b) οι αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις και στο σχήμα (4.11c) η μάζα και ακτίνα για κάθε μια από τις περιπτώσεις.

Στην ουσία κάθε ζευγάρι  $(R, M)$  στα διαγράμματα μάζας-ακτίνας είναι το αποτέλεσμα των εξισώσεων (4.33) για μια τυχαία αρχική τιμή της πίεσης  $P_c$  στο κέντρο του αστέρα. Επομένως μεταβάλλοντας την τιμή της αρχικής πίεσης σε ένα λογικό εύρος, μπορεί κάποιος να έχει μια καλή εικόνα των δομικών αυτών χαρακτηριστικών. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η περιοχή  $dM/dR < 0$  αντιστοιχεί σε ένα σταθερό αστέρα νετρονίων ενώ η περιοχή  $dM/dR > 0$  σε έναν ασταθή. Η παρουσία μιας ασταθούς περιοχής ( $M < M_{\max}$  και  $dM/dR > 0$ ) φαίνεται να οδηγεί σε διπλές τιμές για τις συναρτήσεις  $S(M)$  και  $C(M)$  για τιμές μάζας  $M$  κοντά στη μέγιστη μάζα  $M_{\max}$  (βλέπε σχήματα (4.12a) και (4.12d)). Η μελέτη όμως αυτής της περιοχής είναι εκτός των στόχων της παρούσας μελέτης. Μια ακόμα σημαντική ιδιότητα ενός αστέρα νετρονίων είναι η τιμή της μέγιστης μάζας  $M_{\max}$  κατά την οποία μπορεί να υπάρξει για μια συγκεκριμένη καταστατική εξίσωση. Όπως φαίνεται και στο σχήμα (4.11c), η  $M_{\max}$  εξαρτάται έντονα από την καταστατική εξίσωση αφού παρατηρείται ότι μια πιο “απότομη” καταστατική εξίσωση οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές της μάζας.

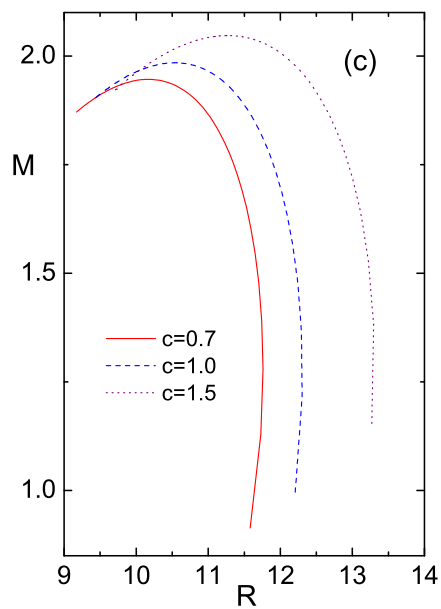
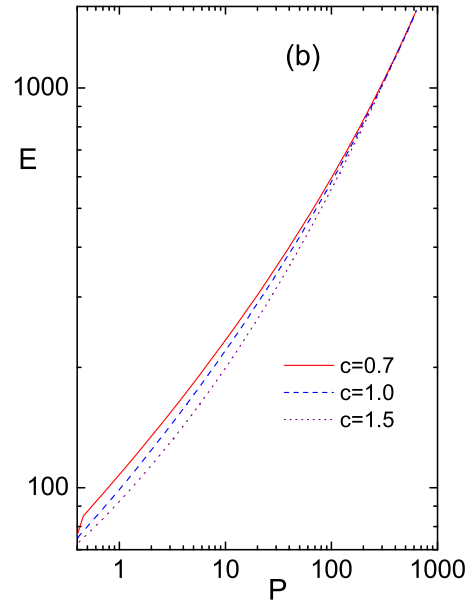
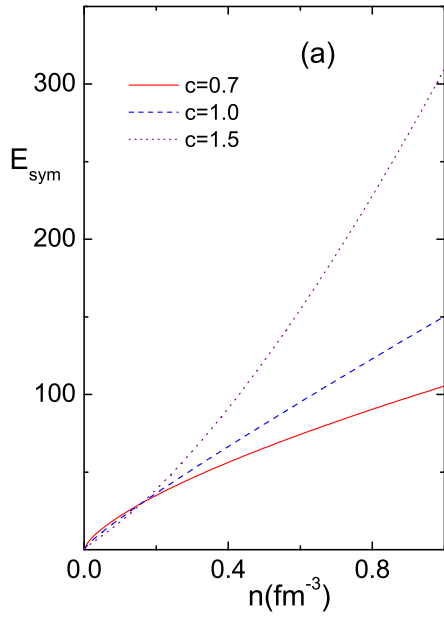
Στο σχήμα (4.12a) παρουσιάζεται η πληροφοριακή εντροπία  $S$ , όπως δίνεται από τη σχέση (4.4) ως συνάρτηση της μάζας  $M$ . Βρέθηκε ότι η  $S$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της μάζας  $M$  στην περιοχή ενδιαφέροντος (δηλαδή στην περιοχή σταθερότητας ενός αστέρα νετρονίων). Το αποτέ-

λεσμα αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι όταν η μάζα του αστέρα αυξάνει, η ακτίνα του ελαττώνεται, επομένως και ο όγκος του, άρα και η ενεργειακή του πυκνότητα εντοπίζεται καλύτερα στο χώρο. Έτσι ο αστέρας είναι πιο συμπαγής άρα και η πληροφοριακή εντροπία  $S$  μικρότερη. Η μεταβολή της δυναμικής παραμέτρου  $c$  απλά μετατοπίζει την  $S$  σε σχέση με τη μάζα  $M$ . Στο σχήμα (4.12b) φαίνεται το πληροφοριακό μέγεθος  $H = e^S$ . Τα δύο μεγέθη  $S(M)$  και  $H(M)$  παρουσιάζουν την ίδια μονότονη τάση όταν εκφραστούν ως συνάρτηση της μάζας.

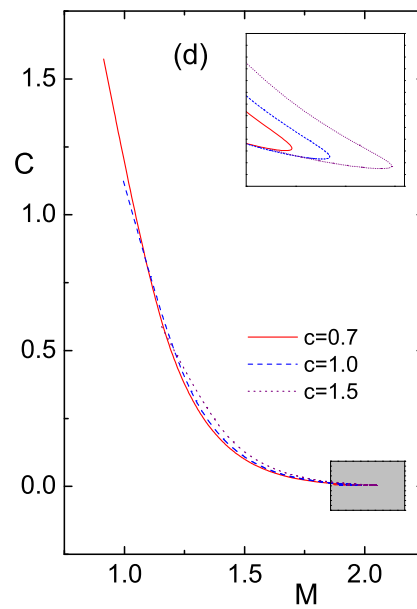
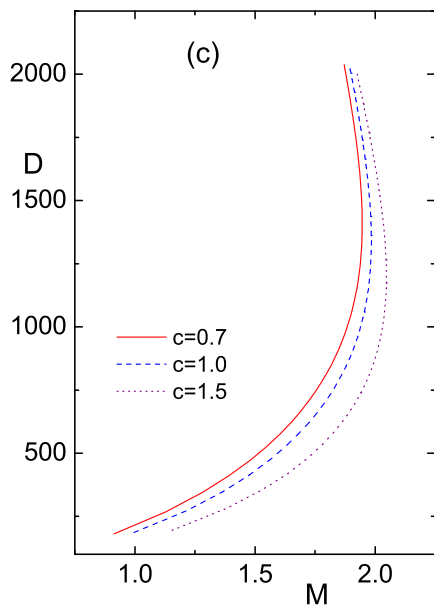
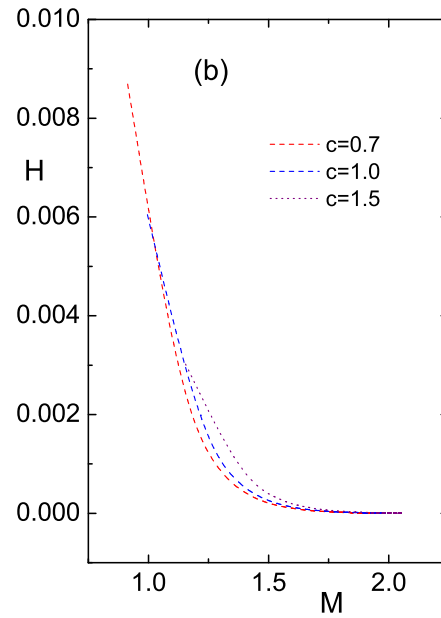
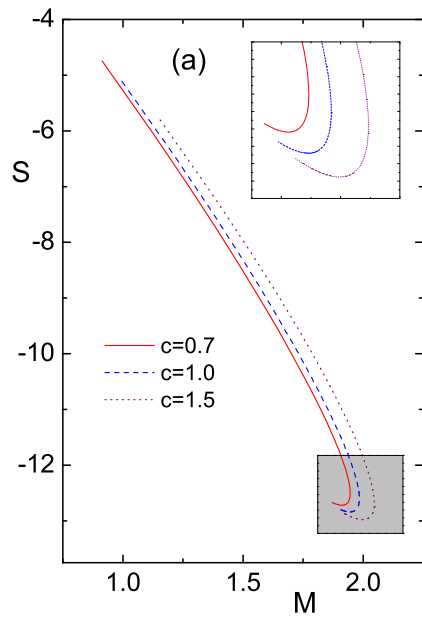
Στο σχήμα (4.12c) φαίνεται η “ανισορροπία”  $D(M)$ . Η αύξηση της μάζας οδηγεί σε μια πιο συγκεντρωμένη κατανομή πυκνότητας, επομένως η ενεργειακή πυκνότητα εντοπίζεται καλύτερα στο χώρο οδηγώντας την  $D(M)$  σε μια μονότονη αύξηση. Ο ρυθμός αύξησης είναι μεγαλύτερος στην περιοχή κοντά στη μέγιστη μάζα  $M_{\max}$ . Αυτό συμβαίνει γιατί όσο η μάζα προσεγγίζει τη μέγιστη τιμή της, γίνεται ολοένα και πιο ανεξάρτητη από την ακτίνα  $R$ .

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας για την πολυπλοκότητα  $C$  παρουσιάζονται στο σχήμα (4.12d). Στην περιοχή που χαρακτηρίζει ένα σταθερό αστέρα, η πολυπλοκότητα  $C$  είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της μάζας  $M$ .

Το πιο ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι η πολυπλοκότητα δε μεταβάλλεται όσο η μάζα του αστέρα πλησιάζει τη μέγιστη μάζα  $M_{\max}$ . Αν θεωρηθεί ότι οι θεωρητικά υπολογιζόμενες τιμές είναι μεταξύ  $1.4M_{\odot}$  και  $3M_{\odot}$ , ένας υπολογισμός που μέχρι στιγμής έρχεται σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα, μπορεί κάποιος να ισχυριστεί ότι ένας αστέρας νετρονίων είναι ένα σύστημα με ελάχιστη πολυπλοκότητα. Είναι επομένως ένα διατεταγμένο (ordered) σύστημα, εφόσον στην αντίστοιχη περιοχή ο ρυθμός ελάττωσης της  $C$  ολοένα και μικραίνει και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πλατό ελάχιστης ή και μηδενικής πολυπλοκότητας.

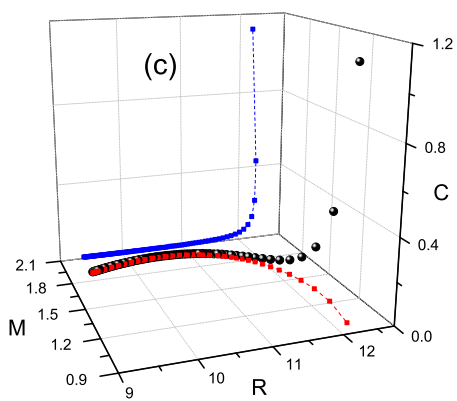
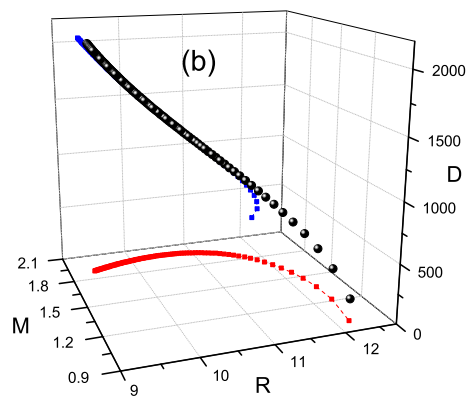
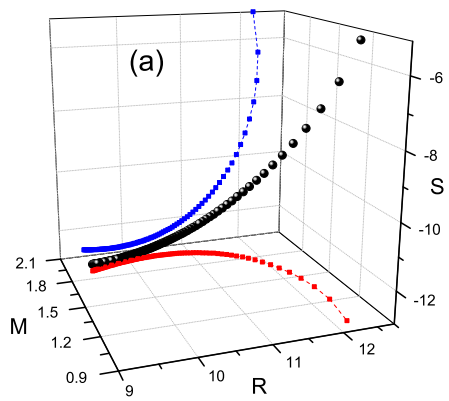


Σχήμα 4.11: (a) Ενέργεια συμμετρίας σαν συνάρτηση της βαρυονικής πυκνότητας  $n$ , (b) ενέργεια σαν συνάρτηση της πίεσης, και (c) μάζα σαν συνάρτηση της ακτίνας.



Σχήμα 4.12: (a) Εντροπία  $S(M)$ , (b) πληροφοριακό περιεχόμενο  $H(M)$ , (c) ανισορροπία  $D(M)$ , και (d) πολυπλοκότητα  $C(M)$ .

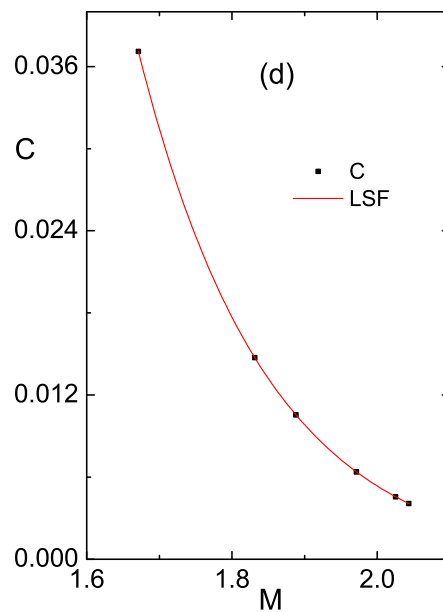
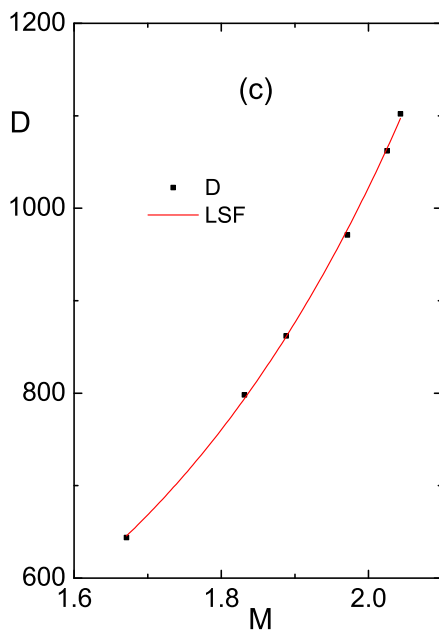
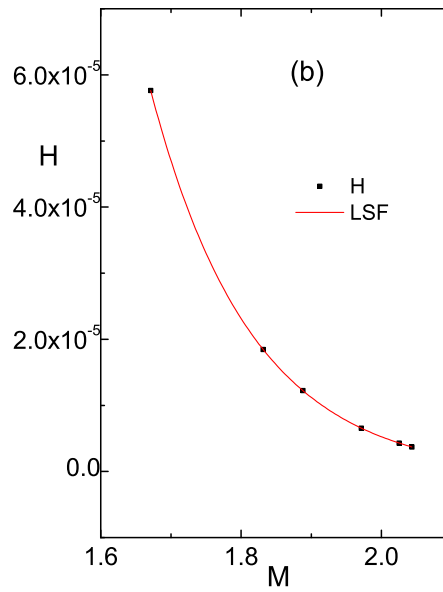
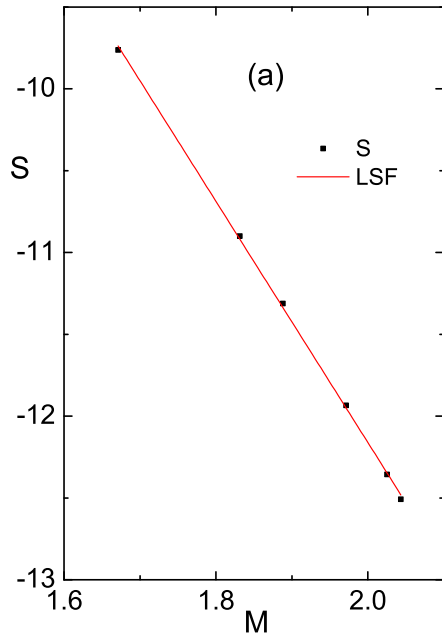




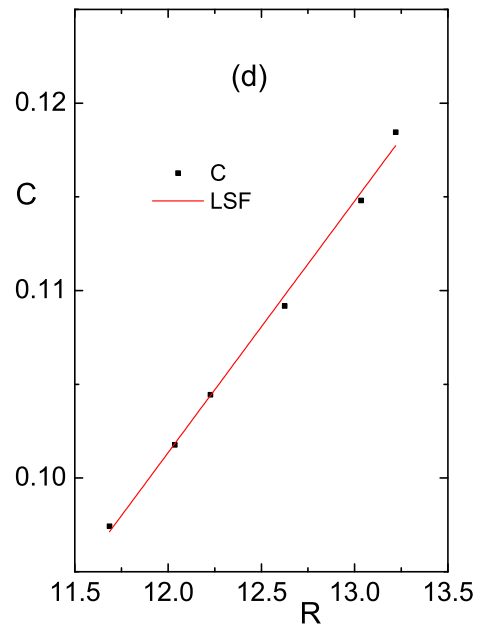
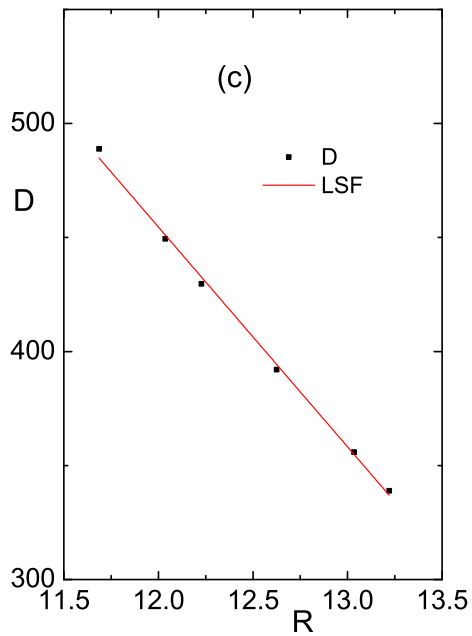
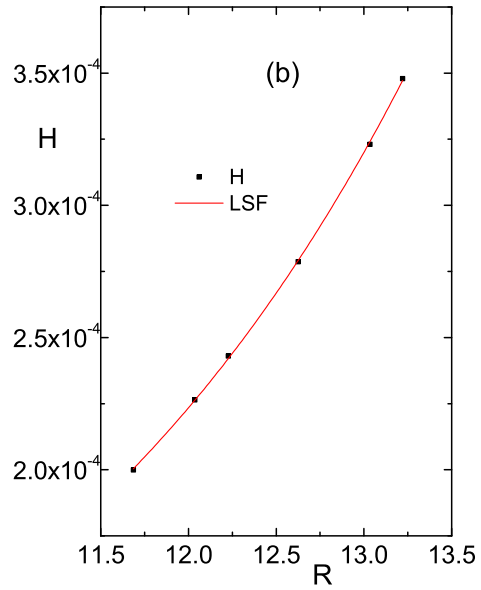
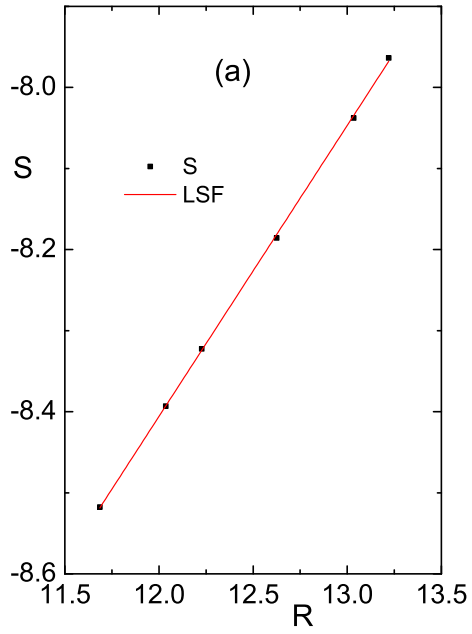
Σχήμα 4.13: Τρισδιάστατη απεικόνιση της (a) εντροπίας  $S(R, M)$ , (b) “ανισορροπίας”  $D(R, M)$ , και (c) πολυπλοκότητας  $C(R, M)$ , προβεβλημένα για κάθε περίπτωση σε δύο επίπεδα (a)  $R-M$  και  $S-R$ , (b)  $R-M$  και  $D-R$ , (c)  $R-M$  και  $C-R$ .

Τα παραπάνω γίνονται πιο φανερά στα σχήματα (4.13a-b-c) όπου απεικονίζονται στις τρεις διαστάσεις τα πληροφοριακά μεγέθη ως συνάρτηση της ακτίνας και της μάζας, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι διαφορετικές αρχικές τιμές στην καταστατική εξίσωση δίνουν ένα διαφορετικό σύνολο τιμών μάζας και ακτίνας. Έτσι αντικατοπτρίζεται ο ανταγωνισμός μεταξύ της βαρυτικής πίεσης και αυτής του εκφυλισμένου αερίου. Το γεγονός ότι η πιθανότερη τιμή για την ακτίνα είναι 10 km. μαζί με το προηγούμενο σχόλιο για τις πιθανότερες τιμές για τη μάζα, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο αστέρας νετρονίων είναι εν γένει ένα σύστημα με ελάχιστη πολυπλοκότητα. Επίσης η πολυπλοκότητα δεν μπορεί να αυξηθεί όσο η μάζα και ακτίνα αυξάνουν, εφόσον βρίσκονται όμως στις περιοχές που προαναφερθήκαμε. Από τις τρισδιάστατες απεικονίσεις του σχήματος (4.13), μπορεί να φανεί η εξάρτηση των  $S$  και  $D$  από την ακτίνα  $R$ , διατηρώντας τη μάζα  $M$  σταθερή. Η πληροφοριακή εντροπία  $S$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση της ακτίνας, δηλαδή μεγαλύτερη ακτίνα οδηγεί σε μεγαλύτερο όγκο, άρα η ενεργειακή πυκνότητα εντοπίζεται λιγότερο στο χώρο, επομένως το σύστημα γίνεται πιο εκτεταμένο και η πληροφορία που χρειάζεται για την περιγραφή του αυξάνεται. Από την άλλη η  $D$  είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της  $R$  συνηγορώντας στο γεγονός ότι το σύστημα τείνει στην ισορροπία όσο αυξάνει η ακτίνα  $R$ .

Για να μελετηθούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα διάφορα πληροφοριακά μεγέθη σε σχέση με την πυρηνική αλληλεπίδραση και τη βαρύτητα, αποτυπώθηκαν τα  $S$ ,  $D$  και  $C$ , συναρτήσεις των  $R$  και  $M$ , μεταβάλλοντας κάθε φορά τα  $c$  και  $G$  αντίστοιχα. Στα σχήματα (4.14), (4.15) και στους πίνακες (4.1), (4.2) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίδρασης της πυρηνικής αλληλεπίδρασης για σταθερή και μεταβαλλόμενη ακτίνα και αντίστροφως. Αυτό επιτεύχθηκε μεταβάλλοντας την καταστατική εξίσωση και χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για τη δυναμική παράμετρο (από 0.7 έως 1.5). Τα πληροφορικά μεγέθη φαίνονται πρώτα ως συνάρτηση της μάζας  $M$  στο σχήμα (4.14) ( $R = 11.5 \text{ km}$ ) και έπειτα ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  ( $M = 1.5M_{\odot}$ ) στο σχήμα (4.15).



Σχήμα 4.14: (a)  $S(M)$ , (b)  $H(M)$ , (c)  $D(M)$ , και (d)  $C(M)$ , για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$  και σταθερή ακτίνα  $R = 11.5$  km. (εξισώσεις (4.62)-(4.64)).



Σχήμα 4.15: (a)  $S(R)$ , (b)  $H(R)$ , (c)  $D(R)$ , και (d)  $C(R)$ , για διάφορες τιμές της δυναμικής παραμέτρου  $c$  και σταθερή μάζα  $M = 1.5M_{\odot}$  (εξισώσεις (4.65)-(4.67)).

Πίνακας 4.1:  $M, S, H, D, C$  για διάφορες τιμές της  $c$ , για σταθερή ακτίνα  $R = 11.5 \text{ km}$ .

$c$	$M$	$S$	$H$	$D$	$C$
0.7	1.671	-9.761	$5.764 \times 10^{-5}$	643.966	0.037
0.9	1.831	-10.900	$1.846 \times 10^{-5}$	798.218	0.015
1.0	1.888	-11.311	$1.223 \times 10^{-5}$	862.041	0.011
1.2	1.971	-11.934	$6.565 \times 10^{-6}$	971.244	0.006
1.4	2.025	-12.356	$4.303 \times 10^{-6}$	1062.035	0.005
1.5	2.043	-12.508	$3.696 \times 10^{-6}$	1102.188	0.004

Πίνακας 4.2:  $R, S, H, D, C$  για διάφορες τιμές της  $c$ , για σταθερή μάζα  $M = 1.5M_{\odot}$ .

$c$	$R$	$S$	$H$	$D$	$C$
0.7	11.686	-8.518	$1.999 \times 10^{-4}$	488.888	0.097
0.9	12.036	-8.393	$2.264 \times 10^{-4}$	449.401	0.102
1.0	12.227	-8.322	$2.430 \times 10^{-4}$	429.685	0.104
1.2	12.625	-8.186	$2.787 \times 10^{-4}$	392.067	0.109
1.4	13.034	-8.038	$3.231 \times 10^{-4}$	355.901	0.115
1.5	13.220	-7.964	$3.479 \times 10^{-4}$	338.961	0.118

Έτσι, διατηρώντας την ακτίνα  $R$  σταθερή και μελετώντας την εξάρτηση των  $S, D$  και  $C$  από την πυρηνική αλληλεπίδραση, λαμβάνοντας όμως έμμεσα υπόψη και την μάζα  $M$ , παρατηρείται ότι η  $S$  είναι μια γραμμικά φθίνουσα συνάρτηση της μάζας (σχήμα (4.14a)), η  $D$  αυξάνει εκθετικά (σχήμα (4.14c)) ενώ η πολυπλοκότητα  $C$  οδηγείται σε μια γρήγορη εκθετική πτώση σε σχέση πάντα με τη μάζα (σχήμα (4.14d)). Αφού η ακτίνα είναι σταθερή, είναι σταθερός και ο όγκος, επομένως η αύξηση της μάζας οδηγεί σε καλύτερα εντοπισμένη ενεργειακή πυκνότητα, άρα η πληροφοριακή εντροπία ελαττώνεται.

Με προσαρμογή εξήχθησαν οι εκφράσεις των  $S(M)$ ,  $D(M)$ ,  $C(M)$  για  $R = 11.5 \text{ km}$  (σχήμα 4.14)

$$S = -7.371M + 2.581, \quad (4.62)$$

$$D = 7.027 e^{2.307M} + 313.550, \quad (4.63)$$

$$C = 454.949 e^{-5.624M} - 0.001. \quad (4.64)$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτή των ελαχίστων τετραγώνων με τις εκφράσεις  $y = c_1 x + c_2$  για τη γραμμική περίπτωση και  $y = c_1 e^{-x/c_2} + c_3$  για την εκθετική.

Από την άλλη διατηρώντας τη μάζα σταθερή  $M = 1.5M_{\odot}$  και μεταβάλλοντας τη δυναμική παράμετρο  $c$ , παρατηρείται ότι όλα τα μεγέθη ( $S$ ,  $D$ , και  $C$ ) εξαρτώνται γραμμικά από την ακτίνα  $R$ . Η πληροφοριακή εντροπία  $S$  αυξάνει (σχήμα (4.15a)), ενώ η  $D$  ελαττώνεται (σχήμα (4.15c)). Για σταθερή μάζα, μεγαλύτερη ακτίνα αντιστοιχεί σε μεγαλύτερο όγκο. Έτσι ο αστέρας γίνεται πιο εκτεταμένος και η ενεργειακή του πυκνότητα εντοπίζεται λιγότερο στο χώρο. Η πολυπλοκότητα  $C$  ως αποτέλεσμα των παραπάνω αυξάνει (σχήμα (4.15d)) όπως ήταν αναμενόμενο.

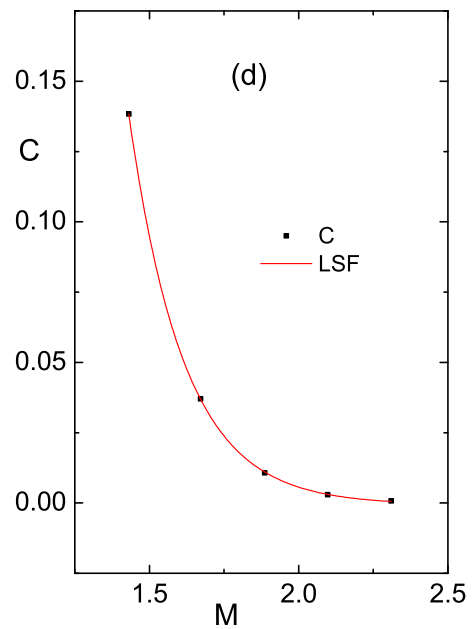
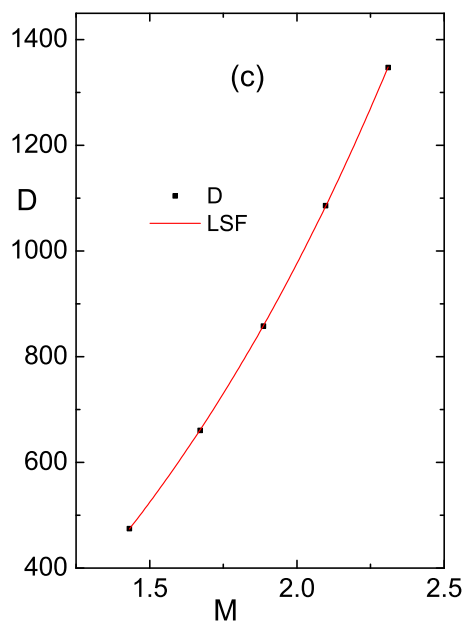
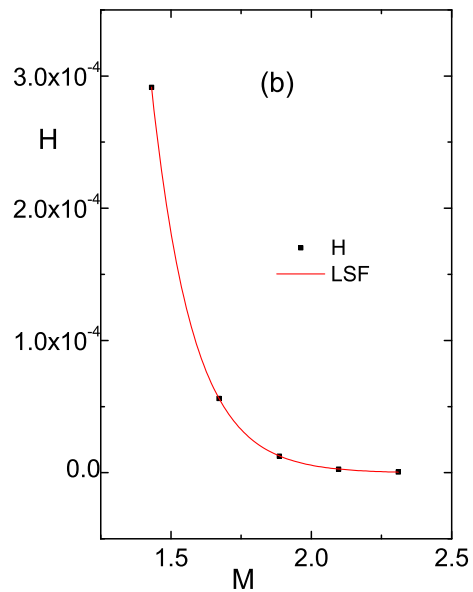
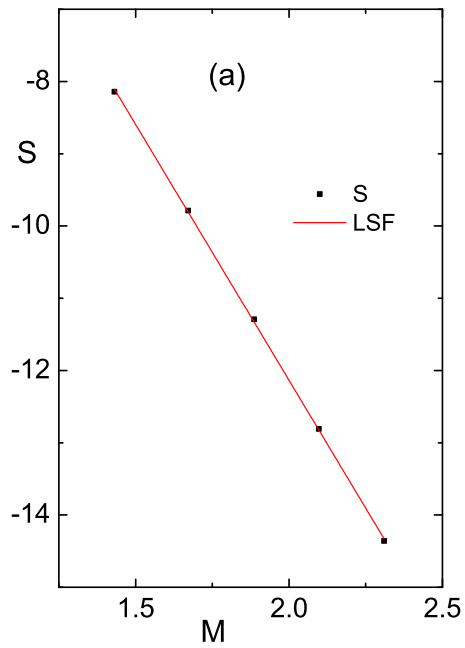
Πάλι με τη βοήθεια προσαρμογής εξήχθησαν οι εκφράσεις των  $S(R)$ ,  $D(R)$ ,  $C(R)$  για  $M = 1.5M_{\odot}$  (σχήμα (4.15))

$$S = 0.359R - 12.713, \quad (4.65)$$

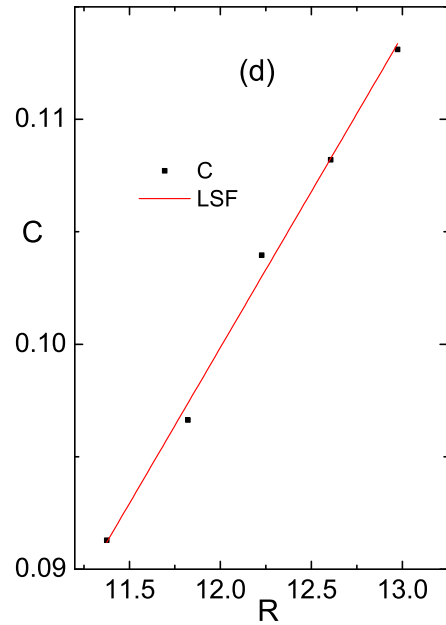
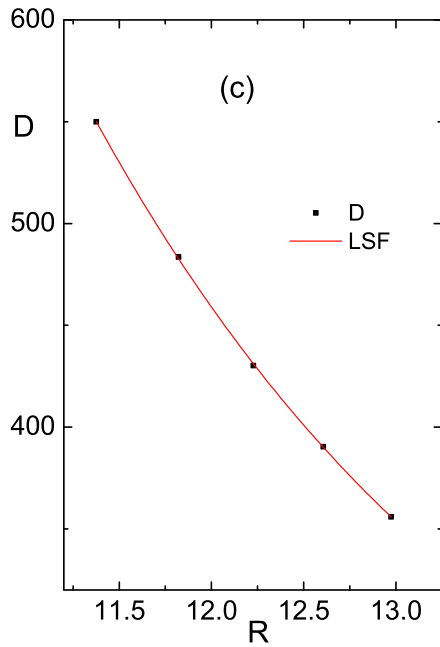
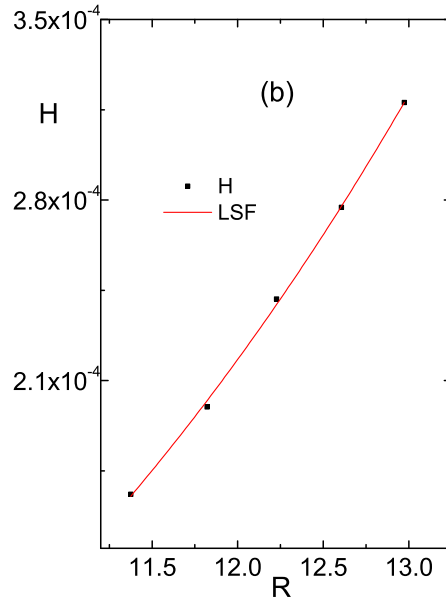
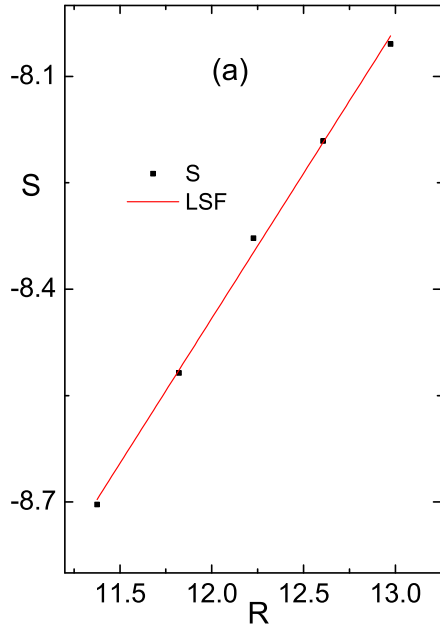
$$D = -96.405R + 1611.450, \quad (4.66)$$

$$C = 0.013R - 0.060. \quad (4.67)$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί επαναλήφθηκαν με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης της βαρύτητας πάνω στα πληροφοριακά μας μεγέθη. Έτσι μεταβλήθηκε ο συντελεστής της βαρύτητας  $\bar{G}$  από  $0.9G$  έως  $1.1G$ , ενώ διατηρήθηκε η καταστατική εξίσωση σταθερή. Σκοπός μας είναι να παρατηρηθεί πως η μεταβολή του  $\bar{G}$  επηρεάζει ποσοτικά την πληροφοριακή εντροπία και να γίνει μια σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στα σχήματα (4.16) και (4.17) και στους πίνακες (4.3) και (4.4).



Σχήμα 4.16: (a)  $S(M)$ , (b)  $H(M)$ , (c)  $D(M)$ , και (d)  $C(M)$ , για διάφορες τιμές της βαρυτικής παραμέτρου  $\bar{G}$  και σταθερή ακτίνα  $R = 11.5$  km.



Σχήμα 4.17: (a)  $S(R)$ , (b)  $H(R)$ , (c)  $D(R)$ , και (d)  $C(R)$ , για διάφορες τιμές της βαρυτικής παραμέτρου  $\bar{G}$  και σταθερή μάζα  $M = 1.5M_{\odot}$ .



Πίνακας 4.3:  $M, S, H, D, C$  για διάφορες τιμές του  $\bar{G}$ , για σταθερή ακτίνα  $R = 11.5 \text{ km}$  και  $c = 1$ .

$G/\bar{G}$	$M$	$S$	$H$	$D$	$C$
0.90	2.309	-14.359	$5.808 \times 10^{-7}$	1347.361	0.001
0.95	2.097	-12.809	$2.736 \times 10^{-6}$	1086.119	0.003
1.00	1.888	-11.311	$1.223 \times 10^{-5}$	862.041	0.011
1.05	1.671	-9.788	$5.612 \times 10^{-5}$	660.751	0.037
1.10	1.431	-8.140	$2.915 \times 10^{-4}$	474.664	0.138

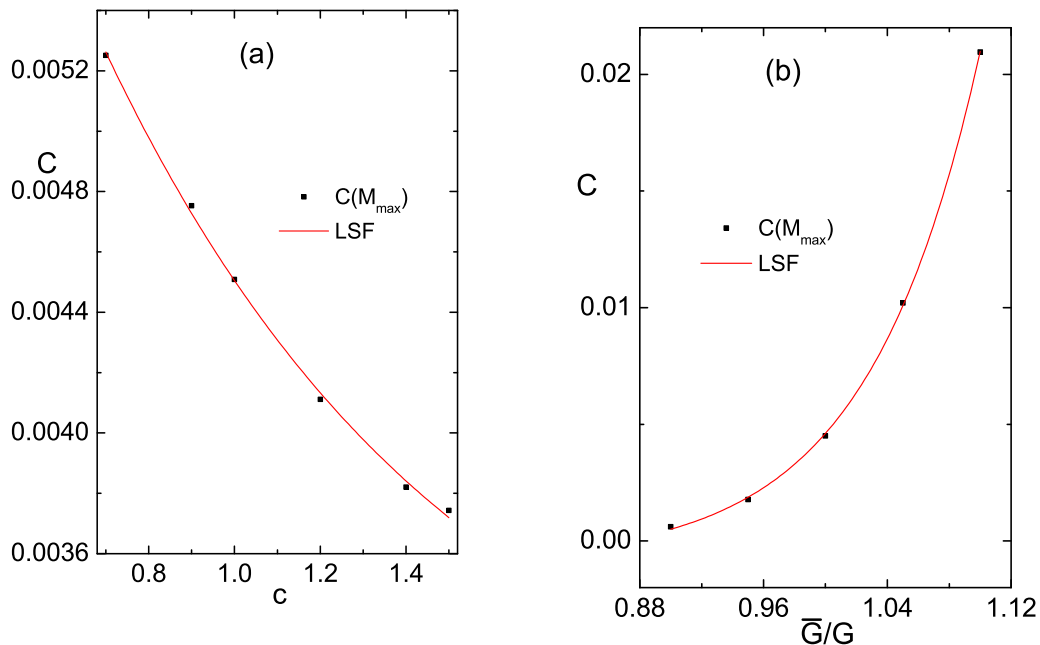
Πίνακας 4.4:  $R, S, H, D, C$  για διάφορες τιμές του  $\bar{G}$ , για σταθερή  $M = 1.5M_{\odot}$  και  $c = 1$ .

$G/\bar{G}$	$R$	$S$	$H$	$D$	$C$
0.90	12.974	-8.054	$3.178 \times 10^{-4}$	355.916	0.113
0.95	12.606	-8.191	$2.772 \times 10^{-4}$	390.412	0.108
1.00	12.227	-8.322	$2.430 \times 10^{-4}$	429.685	0.104
1.05	11.821	-8.518	$1.998 \times 10^{-4}$	483.631	0.097
1.10	11.375	-8.704	$1.660 \times 10^{-4}$	550.010	0.091

Ένα γενικό σχόλιο που μπορεί να γίνει είναι ότι και οι δύο περιπτώσεις παρουσιάζουν ομοιότητες. Οι τάσεις και συμπεριφορές των  $S, D$  και  $C$  για διάφορες τιμές της βαρυτικής σταθεράς  $\bar{G}$ , κρατώντας την καταστατική εξίσωση σταθερή, είναι περίπου ίδιες με αυτές που παρατηρήθηκαν στην προηγούμενη περίπτωση όπου μεταβλήθηκε η δυναμική παράμετρος.

Πιο ειδικά, για σταθερή ακτίνα  $R = 11.5 \text{ km}$ , η  $S$  ελαττώνεται γραμμικά με τη μάζα  $M$  (σχήμα (4.16a)), η  $D$  αυξάνει εκθετικά (σχήμα (4.16b)), ενώ η  $C$  ελαττώνεται εκθετικά αρκετά γρήγορα (σχήμα (4.16d)). Η ενεργειακή πυκνότητα του συστήματος εντοπίζεται καλύτερα στο χώρο όσο αυξάνει το  $\bar{G}$ , για σταθερή ακτίνα  $R$  άρα και όγκο.

Αν διατηρηθεί η μάζα σταθερή  $M = 1.5M_{\odot}$ , η  $S$  αυξάνει γραμμικά με την ακτίνα (σχήμα (4.17a)), η  $D$  ελαττώνεται εκθετικά (σχήμα (4.17c)), ενώ η  $C$  αυξάνει και αυτή γραμμικά με την ακτίνα (σχήμα (4.17d)). Η ενεργειακή πυκνότητα του συστήματος εντοπίζεται λιγότερο στο χώρο όσο αυξάνει το  $\bar{G}$ , για σταθερή μάζα  $M$ .



Σχήμα 4.18: (a) Πολυπλοκότητα σε συνάρτηση με την δυναμική παράμετρο  $c$ , και (b) πολυπλοκότητα σε συνάρτηση με την βαρυτική παράμετρο  $\bar{G}$ , για δοσμένη τιμή της μάζας  $M = M_{\max}$ .

Στο σχήμα (4.18) φαίνεται η απευθείας εξάρτηση της πολυπλοκότητας  $C$  από τις παραμέτρους  $c$  και  $\bar{G}$ . Από το σχήμα (4.18a) φαίνεται ότι η πολυπλοκότητα για μια δοσμένη μάζα  $M_{\max}$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου  $c$  της καταστατικής εξίσωσης (η κλίση της είναι αντίστοιχη με αυτή του σχήματος) ενώ αυξάνει εκθετικά με τη βαρυτική παράμετρο (σχήμα (4.18b)).

## 4.6 Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας, στο εδάφιο 4.4 (Αποτελέσματα I) έγινε μια συστηματική μελέτη της επίδρασης του δυναμικού όρου της ενέργειας συμμετρίας στις ιδιότητες των αστέρων νετρονίων (μάζα, ακτίνα και σύσταση). Ο δυναμικός όρος της ενέργειας συμμετρίας, παραμετροποιήθηκε με μια γενικευμένη μορφή και για υψηλές αλλά και για χαμηλές τιμές της βαρυονικής πυκνότητας με στόχο την επιτυχή αναπαραγωγή αποτελεσμάτων των περισσότερων μικροσκοπικών υπολογισμών πυκνής πυρηνικής ύλης.

Στην περίπτωση της απλής παραμετροποίησης της ενέργειας συμμετρίας, το σημαντικότερο εύρημα ήταν η γραμμική σχέση μεταξύ της μέγιστης μάζας  $M_{max}$ , της ακτίνας  $R_{max}$  και της ακτίνας  $R_{1.4}$  με τη δυναμική παράμετρο  $c$ . Επίσης γραμμική εξάρτηση υπάρχει και μεταξύ της  $R_{1.4}$  και της παραγώγου της ενέργειας συμμετρίας  $E'_{sym}(n)$  για πυκνότητες κοντά στο σημείο κορεσμού ( $n = n_s, 3n_s/2$ ). Τέλος η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-\alpha}$  φαίνεται να είναι σταθερή για τις πυκνότητες  $n = n_s, 3n_s/2, 2n_s$ , όμως η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-1/4}$  παρουσιάζει μια αύξουσα συμπεριφορά αν εκφρασθεί ως συνάρτηση της ακτίνας  $R_{1.4}$  για πυκνότητες  $n = 3n_s/2, n = 2n_s$ .

Στη δεύτερη περίπτωση, όπου χρησιμοποιήθηκαν δύο παράμετροι δίνοντας μια διαφορετική συμπεριφορά για χαμηλές και υψηλές τιμές της πυκνότητας, αντλήθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα. Η ακτίνα είναι συνάρτηση και των δύο δυναμικών παραμέτρων. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της ακτίνας εξαρτάται από την τάση της ενέργειας συμμετρίας και για χαμηλές και για υψηλές πυκνότητες. Για σταθερή τιμή της παραμέτρου  $c_2$  και για πυκνότητες κοντά σε αυτή του κορεσμού ( $n = 3n_s/2$ ), ισχύει μια γραμμική σχέση μεταξύ της  $R_{1.4}$  και της  $E'_{sym}(3n_s/2)$ . Τέλος η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-\alpha} = C(n)$  φαίνεται να είναι σταθερή μετά την επιλογή κατάλληλων τιμών των παραμέτρων  $\alpha$  και  $C(n)$ , όμως παραμένει η εξάρτηση της από τη δεύτερη δυναμική παράμετρο  $c_2$ . Η ποσότητα  $R_{1.4}P^{-1/4}$ , όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, παρουσιάζει αύξουσα συμπεριφορά σε σχέση με την ακτίνα  $R_{1.4}$  για πυκνότητες μεγαλύτερες της πυκνότητας κορεσμού.

Στο εδάφιο 4.5 (Αποτελέσματα II) παρουσιάστηκε μια μελέτη αστέρων νετρονίων με βάση το πληροφοριακό περιεχόμενό τους. Βρέθηκε ότι η πληροφοριακή εντροπία  $S$  και η “ανισορροπία”  $D$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως δείκτες για την μελέτη της δομής και των ιδιοτήτων ενός αστέρα νετρονίων. Πιο συγκεκριμένα, η πληροφοριακή εντροπία είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της μάζας του αστέρα, ενώ είναι μια αύξουσα συνάρτηση της ακτίνας του. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι όσο η μάζα ενός αστέρα νετρονίων αυξάνει, η ακτίνα του ελαττώνεται οδηγώντας σε καλύτερα εντοπισμένη ενέργεια και πυκνότητα μάζας. Η “ανισορροπία” δείχνει την αντίθετη συμπεριφορά. Είναι μια αύξουσα συνάρτηση της μάζας και φθίνουσα συνάρτηση της ακτίνας. Καλά εντοπισμένη ενέργεια και πυκνότητα μάζας έχει αποτέλεσμα υψηλές τιμές της “ανισορροπίας” του συστήματος. Η πολυπλοκότητα  $C$  ενός αστέρα νετρονίων είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της μάζας. Μηδενίζεται για ένα μεγάλο αριθμό ζευγών  $(R, M)$  ενώ αυξάνει απότομα για μάζες μικρότερες από  $\sim 1.3M_{\odot}$  και ακτίνες μεγαλύτερες από 12 km. Οι τιμές αυτές όμως δεν είναι οι συνήθως εξαγόμενες από τις παρατηρήσεις. Για ένα αστέρα νετρονίων παρατηρούνται συνήθως μάζες μεγαλύτερες από  $\sim 1.3M_{\odot}$  και ακτίνες μικρότερες από 12 km. Στις τιμές αυτές αντιστοιχεί περίπου μηδενική πολυπλοκότητα, κάτι που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι αστέρες νετρονίων είναι συστήματα που βρίσκονται σε τάξη και η πολυπλοκότητά τους δεν αυξάνει με την αύξηση της μάζας τους.

Τέλος μελετήθηκε η επίδραση της δυναμικής παραμέτρου  $c$  της καταστατικής εξίσωσης και της βαρυτικής σταθεράς  $G$  στην πληροφοριακή εντροπία  $S$  και την πολυπλοκότητα  $C$ . Η συμπεριφορά τους είναι παρόμοια και στις δυο περιπτώσεις. Η πολυπλοκότητα ελαττώνεται εκθετικά με τη μάζα, ενώ αυξάνει γραμμικά με την ακτίνα. Σε απευθείας υπολογισμούς, η πολυπλοκότητα ελαττώνεται εκθετικά με τη δυναμική παράμετρο  $c$ , ενώ αυξάνει εκθετικά με την βαρυτική σταθερά  $G$ .

## Κεφάλαιο 5

# Στατιστικό μέτρο της πολυπλοκότητας και συσχετισμένη συμπεριφορά συστημάτων Fermi

Το κίνητρο της παρούσας μελέτης [111], είναι να επεκταθούν οι προηγούμενες μελέτες που έγιναν σε διάφορα ομογενή φερμιονικά συστήματα [112], πέραν της πληροφοριακής εντροπίας, προκειμένου να συμπεριληφθεί η πολυπλοκότητα που προτείνουν οι López-Ruiz et al, χρησιμοποιώντας τις κατανομές πιθανότητας στον χώρο των ορμών. Σε ομογενή συστήματα η πυκνότητα  $\rho = N/V$  είναι σταθερή και η αλληλεπίδραση των σωματιδίων αποτυπώνεται στην κατανομή της ορμής, η οποία αποκλίνει από τη μορφή της συνάρτησης βήματος  $\Theta$  που παρουσιάζεται σε ένα ιδανικό αέριο Fermi. Στόχος είναι να συνδεθεί η  $C$  με διάφορες φαινομενολογικές παραμέτρους, όπως για παράδειγμα η ισχύς των συσχετίσεων μεταξύ των σωματιδίων και με πειραματικά μετρήσιμα μεγέθη όπως η ειδική θερμότητα. Έτσι, είναι σημαντικό να εξεταστεί πώς οι συσχετίσεις επηρεάζουν την κατανομή της ορμής και κατ' επέκταση την πολυπλοκότητα. Έγινε επίσης μια προσπάθεια, να συνδεθεί η πολυπλοκότητα  $C$  με ένα κλασικό μέγεθος της στατιστικής φυσικής όπως η θερμοκρασία.

Η πολυπλοκότητα  $C$  δεν μπορεί να μετρηθεί πειραματικά, αλλά είναι δυνατό να υπολογισθεί, ξεκινώντας από τον ορισμό της πολυπλοκότητας και εφαρμόζοντας πληροφοριακές μεθόδους, οι οποίες αναπτύχθηκαν σε προηγούμενες εργασίες [112]. Τα πειραματικά δεδομένα εισέρχονται στη μελέτη μέσα από την “πειραματικά” υπολογιζόμενη κατανομή της ορμής  $n(k)$ . Η κατανομή της ορμής  $n(k)$  μπορεί να υπολογισθεί πειραματικά (π.χ. για πυρηνική ύλη και υγρό  ${}^3\text{He}$  από τη μελέτη βαθιάς ανελαστικής σκέδασης με μεγάλες τιμές μεταφερόμενης ορμής.) Οι πειραματικά υπολογιζόμενες τιμές της  $n(k)$  από τα παραπάνω πειράματα σκέδασης επηρεάζονται από τους περιορισμούς που επιβάλλονται από την πειραματική ανάλυση και τις αλληλεπιδράσεις που έχουμε στην τελική κατάσταση (final state interaction). Ως εκ τούτου, οι πιο ακριβείς πληροφορίες που είναι διαθέσιμες σχετικά με την  $n(k)$ , είναι αυτές που λαμβάνονται με διάφορους θεωρητικούς υπολογισμούς, υποβοηθούμενους από πειραματικές μετρήσεις.

Στην παρούσα μελέτη, τα κβαντικά συστήματα υπό εξέταση είναι η πυρηνική ύλη, το αέριο ηλεκτρονίων και το υγρό  ${}^3\text{He}$ . Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων των εν λόγω συστημάτων διαφέρουν σε γενικές γραμμές αρκετές τάξεις μεγέθους, σε ισχύ αλλά και σε εμβέλεια. Το υγρό  ${}^3\text{He}$  παρουσιάζει τις πιο έντονες αλληλεπιδράσεις σε μικρές αποστάσεις (αλληλεπίδραση σκληρού πυρήνα), ενώ το αέριο ηλεκτρονίων παρουσιάζει τις ασθενέστερες. Η πυρηνική ύλη βρίσκεται κάπου στο ενδιάμεσο. Το υγρό  ${}^3\text{He}$  και τα πυρηνικά δυναμικά έχουν σχετικά ασθενείς ελκτικές ουρές. Το δυναμικό των ηλεκτρονίων είναι αρκετά διαφορετικό. Έχει ασθενές (σε σύγκριση με το υγρό  ${}^3\text{He}$  και την πυρηνική ύλη) κέντρο, αλλά ο ρυθμός μείωσης για μεγάλες τιμές της ακτίνας είναι πολύ μικρότερος. Έτσι, σε μεγάλες αποστάσεις, το δυναμικό των ηλεκτρονίων είναι ισχυρότερο από αυτό των άλλων δύο περιπτώσεων.

Επιπλέον, η υπό έρευνα πυκνότητα επηρεάζει την αποτίμηση της επίδρασης της ισχυρής έναντι της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του αερίου ηλεκτρονίων που διακρίνεται από τα άλλα συστήματα από τη, μεγάλης εμβέλειας, αλληλεπίδραση Coulomb. Ως απο-

τέλεσμα για το αέριο ηλεκτρονίων, στο όριο των χαμηλών πυκνοτήτων, επικρατεί ισχυρή σύζευξη, ενώ στο υγρό  ${}^3\text{He}$  και τα πυρηνικά συστήματα η αλληλεπίδραση γίνεται πιο έντονη στις περιοχές υψηλών πυκνοτήτων. Σε όλες τις περιπτώσεις, η δύναμη της αλληλεπίδρασης μπορεί να εκτιμηθεί από την αποψίλωση (depletion) της θάλασσας Fermi. Ποσοτικά, αυτό μπορεί να αξιολογηθεί ως η απόκλιση του  $Z_F$  από τη μονάδα, όπου  $Z_F$  είναι η ασυνέχεια της κατανομής της ορμής  $n(k)$  για  $k = k_F$ , σε ένα ομογενές σύστημα Fermi. Έχει αποδειχθεί ότι η ασυνέχεια της κατανομής της ορμής για  $k = k_F$  αποτελεί εγγενή ιδιότητα της αλληλεπίδρασης φερμιονίων σε μη πεπερασμένα φυσικά συστήματα (πυρηνική ύλη, ηλεκτρονικό αέριο, κ.τ.λ).

## 5.1 Κατανομή της ορμής, πληροφοριακή εντροπία και πολυπλοκότητα

Ο πίνακας πυκνότητας ενός σωματιδίου είναι η συνάρτηση κλειδί για την περιγραφή της κατανομής της ορμής, τόσο σε άπειρα όσο και πεπερασμένα κβαντικά συστήματα. Ορίζεται ως εξής

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) = \int \Psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (5.1)$$

Τα διαγώνια στοιχεία  $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)$  του πίνακα πυκνότητας δίνουν την τοπική κατανομή της πυκνότητας, η οποία είναι απλώς μια σταθερά  $\rho$  στην περίπτωση ενός ομογενούς και άπειρου συστήματος. Η ομοιογένεια και ισοτροπικότητα του συστήματος απαιτεί  $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) = \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|) \equiv \rho(r)$ .

Η κατανομή της ορμής για ομογενές άπειρο φερμιονικό σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$n(\mathbf{k}) = \nu^{-1} \int \rho(r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (5.2)$$

όπου  $\nu$  είναι ο εκφυλισμός μονοσωματιδιακής κατάστασης, η οποία στα υπό μελέτη συστήματα λαμβάνει τις τιμές

$$\nu = \begin{cases} 2 & \text{για αέριο ηλεκτρονίων και υγρό } {}^3\text{He} \\ 4 & \text{για πυρηνική ύλη.} \end{cases}$$

Η κανονικοποιημένη, στη μονάδα, κατανομή της ορμής,

$$\int n(k) dk = 1 ,$$

δίνεται από τη σχέση

$$n(k) = \frac{1}{V_k} \tilde{n}(k) = \frac{1}{V_k} \begin{cases} \tilde{n}_-(k), & k < k_F \\ \tilde{n}_+(k), & k > k_F \end{cases} , \quad (5.3)$$

όπου  $V_k = \frac{4}{3}\pi k_F^3$ . Η ορμή Fermi  $k_F$  σχετίζεται με τη σταθερή πυκνότητα  $\rho = N\rho_0 = 3/(4\pi r_0^3)$  ως εξής

$$k_F = \left( \frac{6\pi^2 \rho}{\nu} \right)^{1/3} = \left( \frac{9\pi}{2\nu} \frac{1}{r_0^3} \right)^{1/3} . \quad (5.4)$$

Στην περίπτωση ενός ιδανικού αερίου Fermi η κατανομή της ορμής έχει τη μορφή

$$n_0(k) = \frac{1}{V_k} \Theta(k_F - k) . \quad (5.5)$$

Η πληροφοριακή εντροπία στον χώρο των ορμών δίνεται από τη σχέση

$$S_k = - \int n(k) \ln n(k) dk . \quad (5.6)$$

Έτσι, για ένα ιδανικό αέριο Fermi, χρησιμοποιώντας τις εξίσωση (5.5), η  $S_k$  γίνεται

$$S_k = S_0 = \ln V_k = \ln \left( \frac{6\pi^2}{\nu} \frac{1}{r_0^3} \right) . \quad (5.7)$$

Για συσχετισμένα συστήματα Fermi, η πληροφοριακή εντροπία στο χώρο των ορμών, μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση (5.6), αν αντικατασταθεί η  $n(k)$  από την εξίσωση (5.3). Η  $S_k$  μπορεί να γραφεί τώρα [112]

$$S_k = \ln V_k - \frac{4\pi}{V_k} \left( \int_0^{k_F^-} k^2 \tilde{n}_-(k) \ln \tilde{n}_-(k) dk + \int_{k_F^+}^{\infty} k^2 \tilde{n}_+(k) \ln \tilde{n}_+(k) dk \right) . \quad (5.8)$$

Η συσχετισμένη εντροπία  $S_k$  έχει τη μορφή

$$S_k = S_0 + S_{\text{cor}} , \quad (5.9)$$



όπου  $S_0$  είναι η ασυσχέτιστη εντροπία και δίνεται από τη εξίσωση (5.7) και  $S_{cor}$  είναι η συνεισφορά των συσχετίσεων μεταξύ των σωματιδίων στην εντροπία. Αυτή η συνεισφορά, που είναι ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (5.8), μπορεί να υπολογιστεί από την έκφραση

$$S_{cor} = -3 \left( \int_0^{1^-} x^2 \tilde{n}_-(x) \ln \tilde{n}_-(x) dx + \int_{1^+}^{\infty} x^2 \tilde{n}_+(x) \ln \tilde{n}_+(x) dx \right), \quad (5.10)$$

όπου  $x = k/k_F$ .

Η “ανισορροπία”  $D_k$  (ή πληροφοριακή ενέργεια, όπως ορίστηκε από τον Onicescu [20]), στον χώρο των ορμών γράφεται ως εξής

$$D_k = \int n^2(k) dk \quad (5.11)$$

και για ένα ιδανικό αέριο Fermi με τη βοήθεια της εξίσωση (5.5), γίνεται

$$D_k = D_0 = \frac{1}{V_k}. \quad (5.12)$$

Στην περίπτωση συσχετισμένου συστήματος Fermi, η  $D_k$  γράφεται ως εξής

$$D_k = \frac{1}{V_k} \frac{4\pi}{V_k} \left( \int_0^{k_F^-} k^2 \tilde{n}_-(k) dk + \int_{k_F^+}^{\infty} k^2 \tilde{n}_+(k) dk \right). \quad (5.13)$$

Η συσχετισμένη “ανισορροπία”  $D_k$  έχει τη μορφή

$$D_k = D_0 D_{cor}, \quad (5.14)$$

όπου η  $D_0$  δίνεται από την εξίσωση (5.12) και η  $D_{cor}$  δίνεται από τη σχέση

$$D_{cor} = 3 \left( \int_0^{1^-} x^2 n_-^2(x) dx + \int_{1^+}^{\infty} x^2 n_+^2(x) dx \right). \quad (5.15)$$

Το στατιστικό μέγεθος της πολυπλοκότητας  $C_{LMC}$ , ορίζεται στο χώρο των ορμών ως εξής [21]

$$C_{LMC} = S_k D_k,$$

όπου  $S_k$  είναι η πληροφοριακή εντροπία κατά Shannon ενώ  $D_k$  είναι η “ανισορροπία” στον χώρο των ορμών.

Η τροποποιημένη εκδοχή της πολυπλοκότητας όπως προτάθηκε από τους Catalan et al [22], στο χώρο των ορμών ορίζεται ως εξής

$$C = H_k D_k, \quad (5.16)$$

όπου το  $H_k$  αντιπροσωπεύει το πληροφοριακό περιεχόμενο του συστήματος και ορίζεται ακολούθως

$$H_k = e^{S_k}, \quad (5.17)$$

για να διασφαλίζει τη θετικότητα της πληροφορίας κάτω από όλες τις συνθήκες.

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$C = C_0 C_{\text{cor}} = e^{S_{\text{cor}}} D_{\text{cor}}, \quad C_0 = e^{S_0} D_0 = 1. \quad (5.18)$$

Η φυσική σημασία της εξίσωση (5.18) είναι σαφής. Στην περίπτωση ιδανικού αερίου Fermi (5.5), η  $C$  είναι ελάχιστη με τιμή  $C_0 = 1$ . Επιπλέον, όπως τονίζεται στην [22], η  $C$  δεν είναι άνω φραγμένη και μπορεί επομένως να λάβει απείρως μεγάλες τιμές. Από την παραπάνω ανάλυση είναι σαφές ότι η πολυπλοκότητα  $C$  αποτελεί δείκτη των συσχετίσεων σε ένα άπειρο σύστημα Fermi. Έτσι, το επόμενο βήμα είναι να βρεθεί η σχέση μεταξύ της  $C$  και των παραμέτρων συσχετίσεων των συστημάτων μας. Οι συσχετίσεις προκαλούν διάχυση της κατανομής της ορμής και αυτό αναμένεται να φανεί στις τιμές της  $C$ .

Στην περίπτωση της πυρηνικής ύλης εφαρμόστηκε μία χαμηλής τάξης προσέγγιση για τον υπολογισμό της κατανομής της ορμής [114, 115, 116], ενώ για το υγρό  ${}^3\text{He}$  και το αέριο ηλεκτρονίων χρησιμοποιήθηκαν οι υπολογισμοί των Moroni et al [117] και P. Gori-Giorgi et al [118] αντίστοιχα. Επίσης, θα πρέπει εδώ να τονιστεί το γεγονός ότι ο κύριος στόχος ήταν ο ακριβής υπολογισμός του συσχετισμένου μέρους της πληροφοριακής εντροπίας και της πολυπλοκότητας, με βάση αξιόπιστα δεδομένα, και όχι η λεπτομερής ανάλυση της ίδιας της κατανομής της ορμής.

### 5.1.1 Πυρηνική ύλη

Το πρότυπο που θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στην προσέγγιση Jastrow για την κυματοσυνάρτηση βασικής κατάστασης της πυρηνικής ύλης

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} f(r_{ij}) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (5.19)$$

όπου  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ ,  $\Phi$  είναι η ορίζουσα Slater και  $f(r)$  είναι η συνάρτηση συσχετίσεων δυο σωμάτων, που είναι ανεξάρτητη της κατάστασης [119]. Ως συνάρτηση συσχετίσεων εκλέχτηκε η συνάρτηση τύπου Jastrow

$$f(r) = 1 - \exp[-\beta^2 r^2], \quad (5.20)$$

όπου  $\beta$  είναι η παράμετρος συσχετίσεων. Η συνάρτηση συσχετίσεων  $f(r)$  έχει τις ιδιότητες

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1.$$

Ο μονοσωματιδιακός πίνακας πυκνότητας  $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1)$  υπολογίστηκε από τους Gaudin, Gillespie και Ripka [114, 115, 116] για τη δοκιμαστική συνάρτηση Jastrow (5.19).

Σε προσέγγιση χαμηλής τάξεως, η κατανομή της ορμής παίρνει τη μορφή [116]

$$n_{\text{LOA}}(k) = \theta(k_F - k) [1 - k_{\text{dir}} + Y(k, 8)] + 8 [k_{\text{dir}} Y(k, 2) - [Y(k, 4)]^2], \quad (5.21)$$

όπου

$$c_{\mu}^{-1} Y(k, \mu) = \frac{e^{-\tilde{k}_+^2} - e^{-\tilde{k}_-^2}}{2\tilde{k}} + \int_0^{\tilde{k}_+} e^{-y^2} dy + \text{sgn}(\tilde{k}_-) \int_0^{|\tilde{k}_-|} e^{-y^2} dy \quad (5.22)$$

και

$$c_{\mu} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{3/2}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{\beta\sqrt{\mu}}, \quad \tilde{k}_{\pm} = \frac{k_F \pm k}{\beta\sqrt{\mu}}, \quad \mu = 2, 4, 8. \quad (5.23)$$

ενώ  $\text{sgn}(x) = x/|x|$ . Η αδιάστατη παράμετρος Jastrow  $k_{\text{dir}}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο των συσχετίσεων ενώ το μέτρο σύγκλισης του αναπτύγματος ορίζεται ως εξής

$$k_{\text{dir}} = \rho \int [f(r) - 1]^2 dr. \quad (5.24)$$

Όσον αφορά την κανονικοποίηση της κατανομής της ορμής πρέπει να ισχύει

$$\int_0^{\infty} n_{\text{LOA}}(k)k^2 dk = \frac{1}{3} k_F^3. \quad (5.25)$$

Από την εξίσωση (5.24) εξάγεται η παρακάτω σχέση μεταξύ της παραμέτρου  $k_{\text{dir}}$  και της παραμέτρου συσχετίσεων  $\beta$

$$k_{\text{dir}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \left( \frac{k_F}{\beta} \right)^3. \quad (5.26)$$

Είναι φανερό ότι οι μεγάλες τιμές της  $k_{\text{dir}}$  προϋποθέτουν ισχυρές συσχετίσεις και κακή σύγκλιση του αναπτύγματος. Με αριθμητικούς υπολογισμούς, η παράμετρος συσχετίσεων  $\beta$  είναι μέσα στο διάστημα:  $1.01 \leq \beta \leq 2.482$ . Αυτό το διάστημα τιμών του  $\beta$  αντιστοιχεί σε  $0.3 \geq k_{\text{dir}} \geq 0.02$  κάτι που είναι λογικό στην περίπτωση της πυρηνικής ύλης [116].

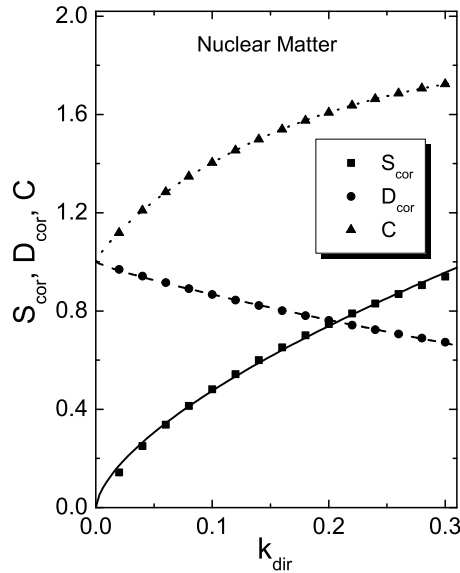
Οι τιμές που υπολογίζονται για τα μεγέθη  $S_{\text{cor}}$ ,  $D_{\text{cor}}$  και  $C$  για την πυρηνική ύλη συναρτήσει της παραμέτρου  $k_{\text{dir}}$  εμφανίζονται στο σχήμα (5.1). Η  $S_{\text{cor}}$  και η  $C$  αυξάνουν με την παράμετρο  $k_{\text{dir}}$ , ενώ η  $D_{\text{cor}}$  μειώνεται. Με προσαρμογή των αριθμητικών τιμών των προαναφερθέντων ποσοτήτων, με απλές συναρτήσεις της  $k_{\text{dir}}$ , βρέθηκαν οι παρακάτω εκφράσεις για κάθε περίπτωση

$$S_{\text{cor}} = \alpha k_{\text{dir}}^{\beta}, \quad \alpha = 2.0586, \quad \beta = 0.6365. \quad (5.27)$$

$$D_{\text{cor}} = 1 + \alpha k_{\text{dir}}^{\beta}, \quad \alpha = -0.9009, \quad \beta = 0.8325. \quad (5.28)$$

$$C = 1 + \alpha k_{\text{dir}}^{\beta} e^{\gamma k_{\text{dir}}}, \quad \alpha = 3.1760, \quad \beta = 0.8257, \quad \gamma = -1.6176. \quad (5.29)$$

Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , για κάθε περίπτωση, υπολογίστηκαν με τη βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

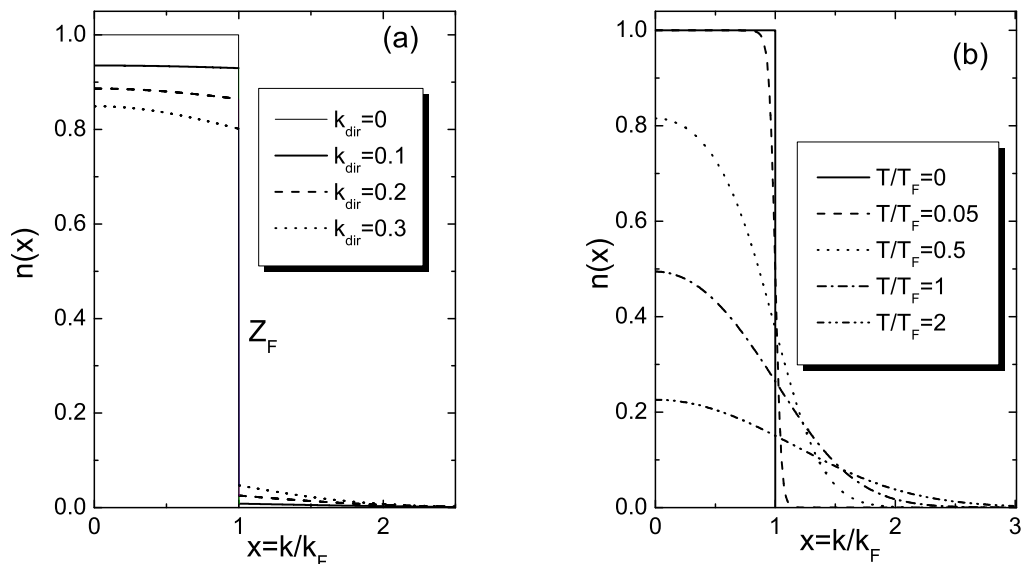


Σχήμα 5.1:  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  για πυρηνική ύλη συναρτήσει της παραμέτρου συσχετίσεων  $k_{dir}$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στις εκφράσεις (5.27), (5.28), (5.29), που υπολογίσθηκαν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Μια ακόμα χαρακτηριστική ποσότητα που δίνει το μέτρο της ισχύος των συσχετίσεων ενός ομογενούς συστήματος Fermi είναι η ασυνέχεια  $Z_F$  της κατανομής της ορμής για  $k/k_F = 1$  που ορίζεται ως εξής

$$Z_F = n(l^-) - n(l^+).$$

Η συμπεριφορά της κατανομής της ορμής, ως συνάρτηση της παραμέτρου  $k/k_F$  για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $k_{dir}$  αποτυπώνεται στο σχήμα (5.2a). Η ασυνέχεια  $Z_F$  φαίνεται επίσης για διάφορες τιμές του  $k_{dir}$ . Για ιδανικά συστήματα Fermi ισχύει  $Z_F = 1$  ενώ για αλληλεπιδρώντα συστήματα  $Z_F < 1$ . Στο όριο, δηλαδή για πολύ ισχυρές αλληλεπιδράσεις  $Z_F = 0$ , η ασυνέχεια εξαφανίζεται εντελώς. Η ποσότητα  $(1 - Z_F)$  μετράει την ικανότητα των συσχετίσεων να αποψιλώσουν τη θάλασσα Fermi διεγείροντας σωματίδια από τις χαμηλότερες στάθμες και μεταφέροντας τα σε υψηλότερες στάθμες [116].

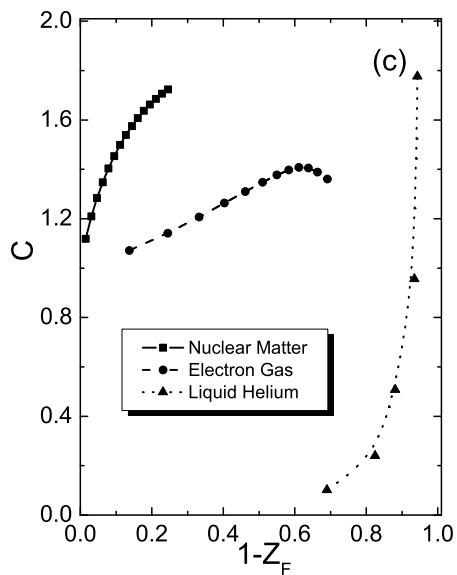
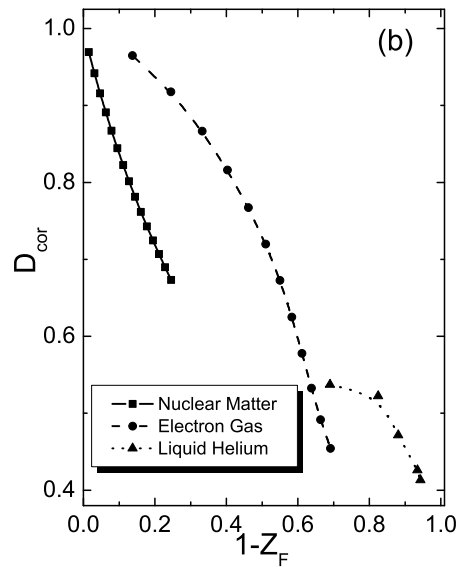
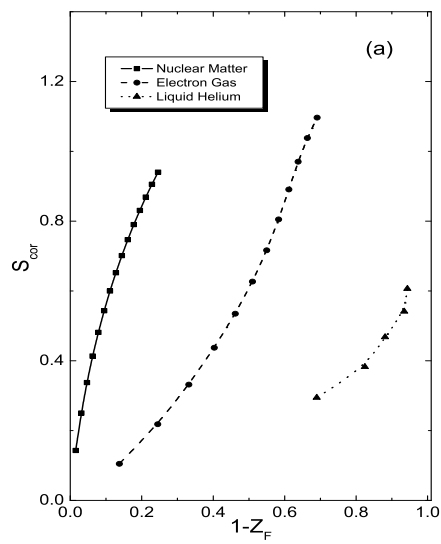


Σχήμα 5.2: Η κατανομή της ορμής ως συνάρτηση του  $k/k_F$ : (a) για συσχετισμένη πυρηνική ύλη για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $k_{dir}$ , (b) ιδανικού αερίου ηλεκτρονίων για διάφορες τιμές του λόγου  $T/T_F$ .

Η εξάρτηση των  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  από την ποσότητα  $(1 - Z_F)$  φαίνεται στο σχήμα (5.3). Παρατηρείται ότι η  $S_{cor}$  και η  $C$  είναι αύξουσες συναρτήσεις του  $(1 - Z_F)$ , ενώ η  $D_{cor}$  παρουσιάζει αντίθετη συμπεριφορά, λόγω της εξάρτησης των παραπάνω από την παράμετρο συσχετίσεων  $k_{dir}$ . Η εξάρτηση αυτή μπορεί πολύ εύκολα να αναπαραχθεί με τη βοήθεια απλών εκφράσεων όπως φαίνεται στις εξισώσεις (5.27), (5.28) και (5.29) με αντικατάσταση της  $k_{dir}$  με  $(1 - Z_F)$ . Για παράδειγμα η έκφραση

$$C(Z_F) = 1 + \alpha(1 - Z_F)^\beta e^{\gamma(1 - Z_F)}, \quad (5.30)$$

με  $\alpha = 3.6227$ ,  $\beta = 0.8024$  και  $\gamma = -1.9750$  δίνει τις αριθμητικές τιμές της  $C$  με αρκετή ακρίβεια.



Σχήμα 5.3: (a)  $S_{\text{cor}}$  (b)  $D_{\text{cor}}$  και (c)  $C$  για πυρηνική ύλη, αέριο ηλεκτρονίων και υγρό  ${}^3\text{He}$  συναρτήσει της παραμέτρου ασυνέχειας  $(1 - Z_F)$ . Στην περίπτωση του υγρού Ηλίου, οι τιμές της  $S_{\text{cor}}$  είναι διαιρεμένες με 10 και οι τιμές του  $C$  με 100.

Από την παραπάνω ανάλυση βγαίνει το συμπέρασμα ότι η πολυπλοκότητα  $C$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο για την ισχύ των συσχετίσεων με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούνται η παράμετρος επουλώσεως (wound parameter) και η παράμετρος ασυνέχειας. Μια εξήγηση της παραπάνω συμπεριφοράς της  $C$  είναι η εξής: Το αποτέλεσμα των συσχετίσεων μεταξύ νουκλεονίων είναι η αλλαγή της μορφής της κατανομής της ορμής από την απότομη ασυνέχεια (ιδανικό αέριο) που είχε, σε μια συμπεριφορά με μεγάλη ουρά για  $k > k_F$ . Αυτή η διάχυση της κατανομής οδηγεί σε μείωση της τάξης του συστήματος (η “ανισορροπία”  $D_k$  μειώνεται ενώ η πληροφοριακή εντροπία  $S_k$  αυξάνεται). Συνολικά, η συνεισφορά της  $S_k$  στο  $C$  επικρατεί από αυτή της  $D_k$ , με αποτέλεσμα η πολυπλοκότητα να αυξάνει με τις συσχετίσεις (τουλάχιστον στην υπό εξέταση περιοχή).

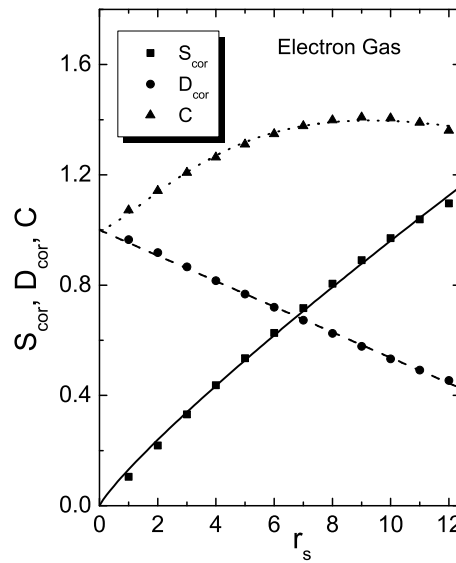
### 5.1.2 Αέριο ηλεκτρονίων

Ως αέριο ηλεκτρονίων, θεωρείται ένα σύστημα φερμιονίων που αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού Coulomb. Το αέριο ηλεκτρονίων είναι ένα πρότυπο αγωγίμων ηλεκτρονίων σε ένα μέταλλο, όπου το περιοδικό θετικό δυναμικό λόγω ιόντων αντικαθίσταται από μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου. Η πυκνότητα ομογενούς αερίου ηλεκτρονίων (Jellium) είναι  $\rho = 3/(4\pi r_0^3)$  ενώ η κατανομή της ορμής είναι  $n(x, r_s)$ , και είναι συνάρτηση των  $x = k/k_F$  και  $r_s = r_0/\alpha_B$  (όπου  $\alpha_B = \hbar^2/me^2$  είναι η ακτίνα Bohr).

Η ασυνέχεια  $Z_F(r_s)$  είναι μονάδα για  $r_s = 0$  και είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της ισχύος της αλληλεπίδρασης  $r_s$ , καθώς αυτή αυξάνεται. Το εύρος της ασυνέχειας της κατανομής της ορμής  $n(k)$  στην επιφάνεια Fermi στενεύει όσο ελαττώνεται η πυκνότητα, κάτι που αποτελεί μια σαφή ένδειξη ότι το σύστημα γίνεται πιο έντονα συζευγμένο. Αυτή η συμπεριφορά οφείλεται στο γεγονός ότι η, μεγάλης εμβέλειας, αλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ των ηλεκτρονίων γίνεται λιγότερο σημαντική σε χαμηλότερες πυκνότητες. Η πυρηνική ύλη και το υγρό  $^3\text{He}$  εμφανίζουν μια αντίστροφη συμπεριφορά, όπου οι βασικές αλληλεπιδράσεις είναι μικρής εμβέλειας και η  $Z_F$  μειώνεται



καθώς αυξάνεται η πυκνότητα. Για μεγάλες τιμές του  $r_s$ , τα ηλεκτρόνια σχηματίζουν ένα κρύσταλλο Wigner με ομοιόμορφη  $n(x, r_s)$ . Η ένταση της αλληλεπίδρασης  $r_s \ll 1$  είναι το ασθενώς συσχετισμένο όριο και  $r_s \gg 1$  είναι το ισχυρά συσχετισμένο όριο, αντίστοιχα.



Σχήμα 5.4:  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  αερίου ηλεκτρονίων σε σχέση με την παράμετρο συσχετίσεων  $r_s$ . Οι γραμμές αντιστοιχούν στις εκφράσεις (5.31), (5.32) και (5.33), που υπολογίσθηκαν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Εξετάστηκε η εξάρτηση των  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  για το αέριο ηλεκτρονίων από την παράμετρο συσχετίσεων  $r_s$ , (ή  $\rho = 3/(4\pi r_s^3)$ ) και την παράμετρο ασυνέχειας  $(1 - Z_F)$ . Η εξάρτηση αυτή εμφανίζεται στο σχήμα (5.4). Είναι φανερό ότι, όπως και στην περίπτωση της πυρηνικής ύλης, η  $S_{cor}$  εξαρτάται από τις ποσότητες αυτές μέσω μιας έκφρασης δύο παραμέτρων που είναι της μορφής

$$S_{cor}(r_s) = \alpha r_s^\beta, \quad \alpha = 0.1312, \quad \beta = 0.8648, \quad (5.31)$$

ενώ η “ανισορροπία”  $D_{\text{cor}}$  με μια σχέση της μορφής

$$D_{\text{cor}} = 1 - \alpha r_s, \quad \alpha = 0.0463, \quad (5.32)$$

και η πολυπλοκότητα  $C$  συμπεριφέρεται ως εξής

$$C = 1 + \alpha r_s^\beta e^{\gamma r_s}, \quad \alpha = 0.0700, \quad \beta = 1.4144, \quad \gamma = -0.1525. \quad (5.33)$$

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, στην περίπτωση του αερίου ηλεκτρονίων, είναι η παρουσία μιας ανώτατης τιμής της  $C$  για τις υψηλές τιμές της παραμέτρου συσχετίσεων  $r_s$  σε αντίθεση με την περίπτωση της πυρηνικής ύλης και το υγρό  $^3\text{He}$ , όπου η  $C$  είναι μια μονότονα αύξουσα συνάρτηση των συσχετίσεων. Για υψηλές τιμές της  $r_s$ , ο “ανταγωνισμός” μεταξύ των  $D_{\text{cor}}$  και  $e^{S_{\text{cor}}}$  (5.18) οδηγεί στην κυριαρχία της τάσης της  $D_{\text{cor}}$ . Πιο συγκεκριμένα, η κλίση της  $C$  δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dC}{dr_s} = C \left( \frac{d \ln D_{\text{cor}}}{dr_s} + \frac{dS_{\text{cor}}}{dr_s} \right). \quad (5.34)$$

Έτσι, σύμφωνα με την εξίσωση (5.34) το πρόσημο της κλίσης της  $C$  εξαρτάται από το άθροισμα των όρων  $\frac{d \ln D_{\text{cor}}}{dr_s}$  και  $\frac{dS_{\text{cor}}}{dr_s}$  (που είναι πάντα αρνητικό και θετικό αντίστοιχα, καθώς η  $r_s$  αυξάνει). Είναι εύκολο να δειχθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.31) και (5.32), ότι η  $C$  φτάνει στη μέγιστη τιμή της  $C_{\text{max}} \simeq 1.4052$  για  $r_s \simeq 9.589$ .

Το παραπάνω χαρακτηριστικό αντικατοπτρίζεται επίσης και στην εξάρτηση του  $1 - Z_F$  από την  $C$  όπως εκτίθεται στο σχήμα (5.3). Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και η τάση των  $S_{\text{cor}}$  και  $D_{\text{cor}}$ .

### Κατανομή της ορμής και πολυπλοκότητα στον κρύσταλλο Wigner

Για χαμηλές τιμές της πυκνότητας  $r_s \rightarrow \infty$ , το αέριο ηλεκτρονίων μετατρέπεται σε κρύσταλλο Wigner. Σε αυτήν την περίπτωση η κατανομή της ορμής μοιάζει με αυτήν του αρμονικού ταλαντωτή.

$$n(k, r_s \rightarrow \infty) = \left( \frac{1}{z} \frac{1}{\pi k_F^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{k^2}{k_F^2} \frac{1}{z}}, \quad 4\pi \int_0^\infty k^2 n(k, r_s \rightarrow \infty) dk = 1. \quad (5.35)$$

οπου  $z = \omega/k_F^2 = 0.24r_s^{1/2}$  [118]. Η  $S_{\text{cor}}$  βρίσκεται από την έκφραση

$$S_{\text{cor}} = \frac{3}{2} + \ln \frac{3\pi^{1/2}}{4} + \frac{3}{2} \ln z. \quad (5.36)$$

Επιπλέον, η  $D_{\text{cor}}$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$D_{\text{cor}} = \frac{2^{1/2}}{3\pi^{1/2}} z^{-3/2}. \quad (5.37)$$

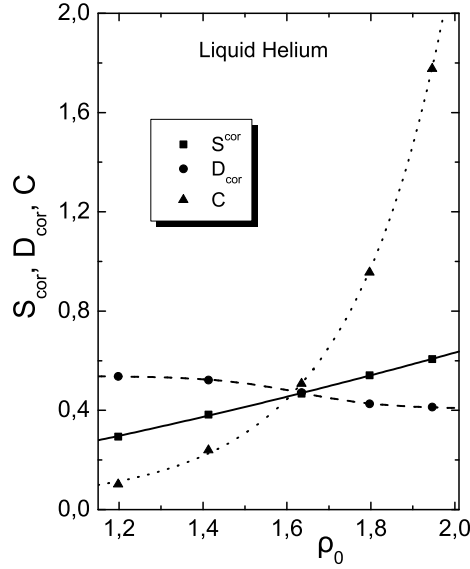
Απο τις εξισώσεις (5.36), (5.37) βρέθηκε

$$C = e^{S_{\text{cor}}} D_{\text{cor}} = \left(\frac{e}{2}\right)^{3/2} \simeq 1.5845. \quad (5.38)$$

Έτσι, για χαμηλές πυκνότητες (άρα πολύ ισχυρές συσχετίσεις) η πολυπλοκότητα είναι ανεξάρτητη από την παράμετρο συσχετίσεων  $r_s$ . Η παραπάνω συμπεριφορά είναι παρόμοια με αυτή ιδανικού αερίου Fermi σε υψηλές θερμοκρασίες.

### 5.1.3 Υγρό $^3\text{He}$

Το δυναμικό αλληλεπίδρασης για το υγρό  $^3\text{He}$  είναι πολύ ισχυρό στις μικρές αποστάσεις και ο απωστικός πυρήνας του είναι πολύ σκληρός (αλλά όχι άπειρης ισχύος). Κατά συνέπεια, υπάρχει μια ασυνέχεια στην επιφάνεια Fermi περίπου ίση με  $Z_F \sim 0.3$ . Αυτή η μικρή τιμή της ασυνέχειας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το υγρό  $^3\text{He}$  είναι το σύστημα Fermi όπου παρουσιάζονται οι πιο έντονες αλληλεπιδράσεις από τα τρία συστήματα που εξετάζονται. Η κατανομή της ορμής υπολογίστηκε στην αναφορά [117] με προσομοιώσεις Monte Carlo και τη χρήση δοκιμαστικών συναρτήσεων που είχαν βελτιστοποιηθεί μέσω της μεθόδου Euler-Monte Carlo.



Σχήμα 5.5:  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  για υγρό  ${}^3\text{He}$  συναρτήσει της παραμέτρου συσχετίσεων  $\rho_0$ . Οι τιμές της  $S_{cor}$  είναι διαιρεμένες με 10 και της  $C$  με 100. Οι γραμμές αντιστοιχούν στις εκφράσεις (5.39), (5.40), (5.41), που υπολογίσθηκαν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Εξετάστηκε η εξάρτηση των  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  από την πυκνότητα  $\rho = 3/(4\pi r_0^3)$  και την παράμετρο ασυνέχειας  $(1 - Z_F)$ . Η εξάρτηση των  $S_{cor}$ ,  $D_{cor}$  και  $C$  από την πυκνότητα  $\rho = 3/(4\pi r_0^3)$  φαίνεται στο σχήμα (5.5). Οι τιμές της πληροφοριακής εντροπίας  $S_{cor}$  προσαρμόζονται με τη συνάρτηση δύο παραμέτρων

$$S_{cor}(\rho_0) = \alpha \rho_0^\beta, \quad \rho_0 = 100\rho, \quad (5.39)$$

με

$$\alpha = 2.2736, \quad \beta = 1.4757,$$

ενώ οι τιμές της “ανισορροπίας”  $D_{cor}$  προσαρμόζονται καλύτερα με τη σιγμοειδή συνάρτηση

$$D_{cor} = \frac{\alpha}{1 + e^{(\rho_0 - \beta)/\gamma}} + \delta \quad (5.40)$$

με

$$\alpha = 0.1321, \quad \beta = 1.6288, \quad \gamma = 0.1031, \quad \delta = 0.4062.$$

Τέλος οι τιμές της πολυπλοκότητας  $C$  προσαρμόζονται με τη συνάρτηση

$$C = 1 + \alpha \rho_0^\beta e^{\gamma \rho_0}, \quad \alpha = 0.0166, \quad \beta = -3.1849, \quad \gamma = 5.8556. \quad (5.41)$$

Η εξάρτηση των  $S_{\text{cor}}$ ,  $D_{\text{cor}}$  και  $C$  από τη ποσότητα  $(1 - Z_F)$  φαίνεται στο σχήμα (5.3). Για να γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων των διαφόρων συστημάτων, στην περίπτωση του υγρού  ${}^3\text{He}$  οι τιμές της  $S_{\text{cor}}$  έχουν διαιρεθεί με το 10 και οι τιμές της  $C$  με το 100. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παραπάνω ανάλυσης, στα διάφορα συστήματα, είναι η διαφορετική συμπεριφορά των  $S_{\text{cor}}$ ,  $D_{\text{cor}}$  και  $C$  σε σχέση με την ασυνέχεια  $(1 - Z_F)$ . Για το ίδιο  $(1 - Z_F)$  τόσο οι τιμές όσο και η συμπεριφορά των ποσοτήτων αυτών είναι διαφορετικές στα εν λόγω συστήματα.

## 5.2 Επίδραση της θερμοκρασίας στην πολυπλοκότητα ενός αερίου ηλεκτρονίων

Σε θερμοκρασία  $T = 0$ , τα ηλεκτρόνια του αερίου ηλεκτρονίων ξεκινούν να καταλαμβάνουν διαδοχικά τις κατώτερες στάθμες, μέχρι την επιφάνεια Fermi. Με την αύξηση της θερμοκρασίας, τα ηλεκτρόνια του αερίου ηλεκτρονίων διεγείρονται με αποτέλεσμα να καταλαμβάνουν ανώτερες στάθμες που βρίσκονται ενεργειακά υψηλότερα από την επιφάνεια Fermi. Ο αριθμός κατάληψης για το αέριο ηλεκτρονίων  $n(\epsilon)$ , δίνεται από την κατανομή Fermi-Dirac

$$n(\epsilon) = \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{k_B T}(\epsilon - \mu)\right] + 1}, \quad (5.42)$$

όπου  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$  ( $p = \hbar k$ ) είναι η ενέργεια των ηλεκτρονίων,  $k_B$  είναι η σταθερά του Boltzmann και  $\mu$  είναι το χημικό δυναμικό. Για  $T = 0$ , το χημικό δυναμικό ενός αερίου συμπίπτει με την ενέργεια Fermi  $\epsilon_F$ , η οποία είναι εξ ορισμού

η ενέργεια της υψηλότερα κατειλημμένης στάθμης που καταλαμβάνεται από ένα σωματίδιο σε θερμοκρασία  $T = 0$ . Δηλαδή

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \rho \right)^{2/3}, \quad (5.43)$$

ενώ η θερμοκρασία Fermi ορίζεται από τη σχέση

$$\epsilon_F = k_B T_F. \quad (5.44)$$

Στη συνέχεια θα εξεταστεί πώς η πληροφοριακή εντροπία και η πολυπλοκότητα επηρεάζονται από τη θερμοκρασία, όταν αυτή αυξάνει πάνω από το μηδέν. Τα όρια της χαμηλής θερμοκρασίας (κβαντική περιοχή) και υψηλής θερμοκρασίας (κλασική περιοχή) θα μελετηθούν χωριστά στα επόμενα εδάφια.

### 5.2.1 Κβαντική περιοχή ( $T \ll T_F$ )

Με τον όρο χαμηλή ενέργεια, αναφερόμαστε στο όριο  $T \ll T_F$ , αφού υπάρχει μόνο μια χαρακτηριστική θερμοκρασία, η θερμοκρασία Fermi. Σε πρώτη προσέγγιση, το χημικό δυναμικό, για την περίπτωση αυτή είναι [120, 121, 122]

$$\mu = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \quad (5.45)$$

έτσι η εξίσωση (5.42) γίνεται

$$n(x) = \frac{1}{\exp \left[ \frac{1}{\xi} \left( x^2 - 1 + \frac{\pi^2}{12} \xi^2 \right) \right] + 1}, \quad (5.46)$$

όπου  $x = (\epsilon/\epsilon_F)^{1/2} = k/k_F$ ,  $\xi = T/T_F \ll 1$  και  $\int_0^\infty x^2 n(x) dx = 1/3$ .

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και προηγουμένως, η πληροφοριακή εντροπία  $S_k$  ενός αερίου ηλεκτρονίων σε θερμοκρασία  $T \ll T_F$  γράφεται

$$S_k = S_0 + S_{\text{thermal}}, \quad (5.47)$$

όπου η  $S_0$  δίνεται από την εξίσωση (5.7) και

$$S_{\text{thermal}} = -3 \int_0^{\infty} x^2 n(x) \ln n(x) dx. \quad (5.48)$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκεται ότι η  $D_k$  μπορεί να γραφεί

$$D_k = D_0 D_{\text{thermal}}, \quad (5.49)$$

όπου η  $D_0$  δίνεται στην εξίσωση (5.12) και η  $D_{\text{thermal}}$  μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της έκφρασης

$$D_{\text{thermal}} = 3 \int_0^{\infty} x^2 n^2(x) dx. \quad (5.50)$$

Τελικά μπορεί να δειχθεί ότι

$$C = C_0 C_{\text{cor}} = e^{S_{\text{thermal}}} D_{\text{thermal}}, \quad C_0 = 1. \quad (5.51)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συσχετίσεις μεταξύ των σωματιδίων Fermi προκαλούν μια ασυνέχεια στη κατανομή της ορμής για  $k = k_F$  (σχήμα 5.2a), ενώ οι θερμικές επιπτώσεις προκαλούν μόνο ελαφρά απόκλιση από την απότομη ασυνέχεια (συνάρτηση βήματος) στο  $T = 0$ . Αυτό φαίνεται στο σχήμα (5.2b), όπου απεικονίζεται η κατανομή της ορμής για ιδανικό αέριο ηλεκτρονίων, για διάφορες τιμές της  $T/T_F$  σε σχέση με το  $k/k_F$ . Η προέλευση των δύο επιδράσεων (συσχετίσεις και θερμοκρασία) είναι διαφορετική και είναι φανερό ότι επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο την κατανομή της ορμής. Έτσι, μπορεί να είναι σκόπιμο να μελετηθούν ποιοτικά και ποσοτικά οι παραπάνω επιδράσεις για τα διάφορα πληροφοριακά μεγέθη και την πολυπλοκότητα.

Οι υπολογιζόμενες τιμές της  $S_{\text{thermal}}$  για διάφορες τιμές της θερμοκρασίας στο χαμηλό όριο της ενέργειας ( $T \ll T_F$ ) εμφανίζονται στο σχήμα (5.6). Η  $S_{\text{thermal}}$  είναι μια αύξουσα γραμμική συνάρτηση της θερμοκρασίας. Η γραμμική εξίσωση

$$S_{\text{thermal}} = \alpha \frac{T}{T_F}, \quad \alpha = 2.5466 \quad (5.52)$$

αναπαράγει αρκετά καλά τις υπολογιζόμενες τιμές της  $S_{thermal}$ .

Αυτή η έκφραση της πληροφοριακής εντροπίας είναι παρόμοια με την έκφραση που δίνει τη θερμοδυναμική εντροπία,  $S_{TE}$ , για  $T \ll T_F$ . Η  $S_{TE}$  για το όριο των χαμηλών θερμοκρασιών έχει τη μορφή [120, 122]

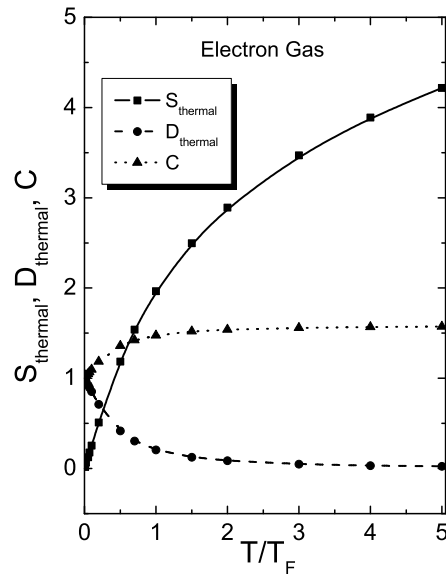
$$S_{TE} = \frac{\pi^2}{2} Nk_B \frac{T}{T_F}. \quad (5.53)$$

Από τις εξισώσεις (5.52) και (5.53), βρίσκεται η σχέση που συνδέει τις εντροπίες,  $S_{thermal}$  και  $S_{TE}$  στο όριο  $T \ll T_F$ . Η σχέση αυτή είναι της μορφής

$$S_{thermal} = \frac{2\alpha}{\pi^2} \frac{S_{TE}}{Nk_B}. \quad (5.54)$$

Οι υπολογιζόμενες τιμές της  $D_{thermal}$ , απεικονίζονται στο σχήμα (5.6), και αναπαράγονται με επιτυχία από την παρακάτω σχέση

$$D_{thermal} = e^{-1.647\left(\frac{T}{T_F}\right)}. \quad (5.55)$$



Σχήμα 5.6:  $S_{thermal}$ ,  $D_{thermal}$  και  $C$  ενός ιδανικού αερίου ηλεκτρονίων σε σχέση με το λόγο  $T/T_F$ .



Τέλος οι υπολογιζόμενες τιμές της  $C$  συναρτήσει της  $T/T_F$  φαίνονται στο σχήμα (5.6). Η  $C$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση του  $T/T_F$  και παρουσιάζει μια γραμμική τάση, η οποία αναπαράγεται αρκετά καλά με την σχέση

$$C = 1 + 0.962 \frac{T}{T_F}. \quad (5.56)$$

### 5.2.2 Κλασική περιοχή ( $T \gg T_F$ )

Στην κλασική περίπτωση (όπου η πυκνότητα είναι χαμηλή  $n(k) \ll 1$  και/ή η θερμοκρασία είναι υψηλή), μπορούν να εξαχθούν παρόμοιες σχέσεις για την πληροφοριακή εντροπία  $S$ , την “ανισορροπία”  $D$  και την πολυπλοκότητα  $C$  ως συναρτήσεις της θερμοκρασίας. Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή της ορμής έχει γκαουσιανή μορφή [121]

$$n(k) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha k^2}, \quad \alpha = \frac{\hbar^2}{2mk_B T}, \quad (5.57)$$

και είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα ( $\int n(k) dk = 1$ ). Η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$n(k) = \left(\frac{1}{\xi} \frac{1}{\pi k_F^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{k^2}{k_F^2} \frac{1}{\xi}}, \quad \xi = T/T_F. \quad (5.58)$$

Απο τις εξισώσεις (5.48) και (5.58), μπορεί να εξαχθεί η παρακάτω σχέση και να συνδεθεί η  $S_{\text{thermal}}$  με την θερμοκρασία [112]

$$S_{\text{thermal}} = \frac{3}{2} + \ln \frac{3\pi^{1/2}}{4} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_F}. \quad (5.59)$$

Επιπροσθέτως μπορεί να υπολογιστεί η  $D_{\text{thermal}}$  από την σχέση

$$D_{\text{thermal}} = \frac{2^{1/2}}{3\pi^{1/2}} \left(\frac{T}{T_F}\right)^{-3/2}. \quad (5.60)$$

Απο τις εξισώσεις (5.59) και (5.60) βρίσκεται

$$C = C_{\text{thermal}} = e^{S_{\text{thermal}}} D_{\text{thermal}} = \left(\frac{e}{2}\right)^{3/2} \simeq 1.5845. \quad (5.61)$$

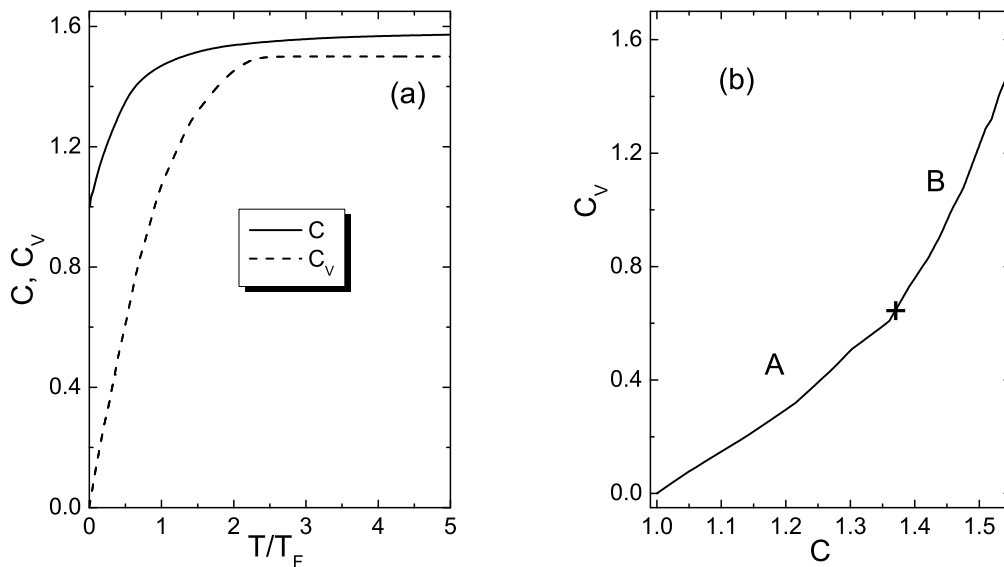
Η φυσική σημασία της εξίσωσης (5.61) είναι πολύ σαφής. Για υψηλές τιμές της θερμοκρασίας ( $T \gg T_F$ ), όπου η κατανομή της ορμής του αερίου περιγράφεται από μια γκαουσιανή συνάρτηση, η πολυπλοκότητα  $C$  είναι ανεξάρτητη της  $T$  και έχει σταθερή τιμή. Βρέθηκε ότι η περίπτωση ενός ιδανικού αερίου Fermi για  $T \gg T_F$ , έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση του συσχετισμένου αερίου Fermi για  $T = 0$ , όπου, σε γενικές γραμμές, η  $C$  δεν παρουσιάζει κάποιο άνω φράγμα. Επιπλέον, η πολυπλοκότητα έχει διαφορετική συμπεριφορά στο κβαντικό όριο ( $T \rightarrow 0$ ) σε σύγκριση με το κλασικό όριο ( $T \rightarrow \infty$ ). Στην κλασική περίπτωση, η  $C$  δεν επηρεάζεται από τις διακυμάνσεις της θερμοκρασίας και είναι μια σταθερά του συστήματος. Ωστόσο, για χαμηλές τιμές της  $T$ , η πολυπλοκότητα παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση από τη θερμοκρασία.

Στο σχήμα (5.6) παρουσιάζεται η πολυπλοκότητα σε σχέση με το  $\xi = T/T_F$  τόσο για χαμηλές όσο και υψηλές τιμές της θερμοκρασίας. Στην πραγματικότητα, υπολογίστηκε το χημικό δυναμικό για κάθε τιμή του  $\xi$  και, κατά συνέπεια, βρέθηκε ακριβώς η εξάρτηση της ορμής από τους αριθμούς κατάληψης όπως δίνονται στην εξίσωση (5.42). Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την αριθμητική προσέγγιση της  $C$  όπως δόθηκε στην εξίσωση (5.56) για τις χαμηλές τιμές του  $\xi$  καθώς και την αναλυτική προσέγγιση της εξίσωσης (5.61) για υψηλές τιμές του  $\xi$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξάρτηση της  $C$  από τη θερμοκρασία, είναι παρόμοια με εκείνη της ειδικής θερμότητας  $C_V$  σε ιδανικό αέριο Fermi [122]. Πιο συγκεκριμένα, η  $C_V$  είναι μια γραμμική συνάρτηση της  $T$  για  $T \ll T_F$ , ενώ προσεγγίζει την τιμή  $3/2Nk_B$  για  $T \rightarrow \infty$  [122]. Για επιβεβαίωση, παρουσιάζεται στο σχήμα (5.7) η εξάρτηση της  $C$  και της ειδικής θερμότητας  $C_V$  από την  $T$  (σε μονάδες  $T_F$ ). Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να εξηγηθεί ως εξής:

Ας θεωρηθούν δύο κατανομές της ορμής  $n(k)$ , μία για  $T = 0$  και άλλη μία για  $T > 0$ . Στην ουσία πρόκειται για διαφορετικές κατανομές, διότι για  $T > 0$  ορισμένα φερμιόνια είναι διεγερμένα και βρίσκονται πάνω από το επίπεδο Fermi  $\epsilon_F$ . Συγκεκριμένα, φερμιόνια με ενέργειες της τάξης  $k_B T$

που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο  $\epsilon_F$  διεγείρονται σε ενέργειες της ίδιας τάξης ( $k_B T$ ), πάνω όμως από το επίπεδο  $\epsilon_F$ . Ωστόσο, αυτό ισχύει μόνο για φερμιόνια με ενέργειες με τιμές ( $\simeq k_B T$ ) κοντά στο επίπεδο Fermi, ενώ τα υπόλοιπα με διαφορετικές τιμές της ενέργειας δεν έχουν που να πάνε μιας και οι στάθμες είναι κατειλημμένες [123].



Σχήμα 5.7: (a) Η πολυπλοκότητα  $C$  και η ειδική θερμότητα  $C_V$  (σε μονάδες  $k_B N$ ) ενός ιδανικού αερίου ηλεκτρονίων σε σχέση με το λόγο  $T/T_F$  (b) Η ειδική θερμότητα  $C_V$  σε σχέση με την πολυπλοκότητα  $C$ .

Οι θερμικές επιδράσεις οδηγούν σε μια αλλοίωση της επιφάνειας Fermi που σημαίνει ότι η συνάρτηση της κατανομής  $n(\epsilon)$  αυξάνει το εύρος της κατά  $k_B T$ . Κατά συνέπεια, για χαμηλές θερμοκρασίες, επηρεάζεται μόνο η κατανομή της ορμής (ή ο αριθμός κατάληψης) κοντά στην επιφάνεια Fermi από την  $T$  και αυτό οδηγεί σε μια γραμμική εξάρτηση της  $C$  από την  $T$ . Για  $T \gg T_F$ , η κατανομή της ορμής επηρεάζεται τόσο για χαμηλές όσο και

υψηλές τιμές του  $k$  κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πολυπλοκότητα  $C$  τείνει να γίνει σταθερή.

### 5.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίστηκαν τα πληροφοριακά μεγέθη (πληροφοριακή εντροπία και “ανισορροπία”) καθώς και το στατιστικό μέτρο της πολυπλοκότητας  $C$ , στο χώρο των ορμών, για ρεαλιστικά συστήματα Fermi, δηλαδή την πυρηνική ύλη, το αέριο ηλεκτρονίων και το υγρό  ${}^3\text{He}$ . Αναλύθηκε η εξάρτηση των παραπάνω μεγεθών από την ένταση των συσχετίσεων. Από την παρούσα ανάλυση έγινε σαφές ότι οι παραπάνω ποσότητες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως μέτρο των συσχετίσεων των σωματιδίων για ένα σύστημα Fermi. Διαπιστώθηκε ότι η πολυπλοκότητα είναι αύξουσα συνάρτηση των συσχετίσεων, τόσο για την πυρηνική ύλη όσο και για το υγρό  ${}^3\text{He}$ . Ωστόσο, στην περίπτωση του αερίου ηλεκτρονίων, η πολυπλοκότητα παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά. Στην πραγματικότητα, η συνάρτηση της  $C(r_s)$  έχει ένα ανώτατο όριο για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου συσχετίσεων  $r_s$ . Επιπλέον, βρέθηκε ότι για πολύ ισχυρές συσχετίσεις, όπου το αέριο ηλεκτρονίων υφίσταται κρυστάλλωση Wigner, η πολυπλοκότητα είναι ανεξάρτητη από τις συσχετίσεις και λαμβάνει μια σταθερή τιμή. Για να υπάρξει ένα κοινό μέτρο των διαφόρων πληροφοριακών μεγεθών, χρησιμοποιήθηκε το χάσμα ασυνέχειας,  $(1 - Z_F)$ . Το πιο χαρακτηριστικό εύρημα της παραπάνω ανάλυσης στα διάφορα συστήματα, είναι η διαφορετική συμπεριφορά που επέδειξαν τα μεγέθη  $S_{\text{cor}}$ ,  $D_{\text{cor}}$  και  $C$  ως συνάρτηση του  $(1 - Z_F)$ . Για τις ίδιες τιμές του  $(1 - Z_F)$  τόσο οι τιμές όσο και η συμπεριφορά των ποσοτήτων αυτών ήταν διαφορετικές. Λαμβάνοντας υπόψη ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, το  $Z_F$  μπορεί να υπολογισθεί πειραματικά, φαίνεται μια πρώτη ένδειξη ότι τα πληροφοριακά μεγέθη μπορεί να σχετιστούν και με πειραματικά αποτελέσματα.

Η θερμοκρασία επηρεάζει επίσης την κατανομή της ορμής ενός ιδανικού

αερίου Fermi και, κατά συνέπεια, όλες τις σχετικές πληροφοριακές ιδιότητες του. Διαπιστώθηκε ότι για χαμηλές τιμές του λόγου  $T/T_F$ , η πολυπλοκότητα είναι γραμμική συνάρτηση της  $T$ . Ωστόσο, στο όριο υψηλών θερμοκρασιών, (κλασική Maxwell-Boltzmann κατανομή), η πολυπλοκότητα είναι ανεξάρτητη από την  $T$  και λαμβάνει μια σταθερή τιμή (ακριβώς την ίδια όπως και στην περίπτωση της κρυστάλλωσης Wigner). Έτσι, ανεξάρτητα από την αιτία που προκαλεί την κατανομή της ορμής να παρουσιάζει μια γκαουσιανού τύπου εξάρτηση από την ορμή  $k$ , η τιμή της πολυπλοκότητας είναι σταθερή. Επιπλέον, φαίνεται ότι η εξάρτηση της  $C$  από τη θερμοκρασία είναι παρόμοια με εκείνη της ειδικής θερμότητας  $C_V$  σε ιδανικό αέριο Fermi [122] τόσο για χαμηλές όσο και υψηλές τιμές της  $T$ . Αυτή είναι μια δεύτερη ένδειξη ότι μπορεί κάποιος να συνδέσει το στατιστικό μέτρο της πολυπλοκότητας  $C$  με πειραματικά δεδομένα (όπως η ειδική θερμότητα  $C_V$ ). Ωστόσο, χρειάζεται περαιτέρω μελέτη προτού καθιερωθεί μια σαφής σύνδεση μεταξύ των πληροφοριακών μεγεθών και πειραματικών δεδομένων.

Αποδεικνύεται ότι η  $C(T)$  και η ειδική θερμότητα  $C_V(T)$  είναι και οι δυο συναρτήσεις της θερμοκρασίας  $T$ , με παρόμοια συμπεριφορά, όπως φαίνεται στο σχήμα (5.7a). Η εξάρτηση της  $C_V$  από την  $C$  παρουσιάζεται στο σχήμα (5.7b). Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι υπάρχουν δύο περιοχές της  $C$  με γραμμική εξάρτηση διαφορετικής κλίσης. Οι περιοχές αυτές χωρίζονται στο σχήμα με ένα σταυρό. Με προσαρμογή στα αριθμητικά δεδομένα βρέθηκαν οι εκφράσεις

$$C_V = -1.7353 + 1.7114C \quad (\text{περιοχή A}),$$

$$C_V = -6.3777 + 5.0783C \quad (\text{περιοχή B}).$$

Κατά μία έννοια, μπορεί κανείς να αναφέρει ότι η  $C_V(T)$  μπορεί να χρησιμοποιήσει ως δείκτης που θα αντανακλά την αναμενόμενη αύξηση της πολυπλοκότητας καθώς αυξάνει η  $T$ . Επιπλέον, για θερμοκρασίες  $T \gg T_F$  η πολυπλοκότητα φθάνει σε μια μέγιστη τιμή (κορεσμός), και δεν παρατηρείται περαιτέρω αύξηση. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι παρατηρείται μια εμπειρική σχέση μιας περίπου ενεργειακής ποσότητας (ειδική θερμότητα) με την πολυπλοκότητα και την πληροφοριακή εντροπία σε αντίθεση με την

θερμοδυναμική εντροπία που συνδέεται απευθείας με την ενέργεια του υπό μελέτη συστήματος.

# Βιβλιογραφία

- [1] J.N.Kapur **Maximum-Entropy Models in Science and Engineering**  
John Wiley & Sons (1989)
- [2] N.Canosa, A.Plastino, R.Rossignoli **Phys. Rev. A** **40** 519 (1989)  
N.Canosa, R.Rossignoli, A.Plastino **Nucl. Phys. A** **512** 492 (1990)  
N.Canosa, A.Plastino, R.Rossignoli **Nucl. Phys. A** **550** 453 (1992)
- [3] C.E.Shannon **Bell System Tech. J.** **27** 379 (1948)
- [4] I.Bialynicki-Birula, J.Mycielski **Commun. Math. Phys.** **44** 129 (1975)
- [5] S.R.Gadre **Phys. Rev. A** **30** 620 (1984)  
S.R.Gadre, S.B.Sears, S.J.Chakravorty, R.D.Bendale **Phys. Rev. A** **32** 2602 (1985)  
S.R.Gadre, R.D.Bendale **Phys. Rev. A** **36** 1932 (1987)
- [6] M.Ohya, P.Petz **Quantum entropy and its use**  
Springer Verlag (1993)
- [7] A.Nagy, R.G.Parr **Int. J. Quant. Chem.** **58** 323 (1996)
- [8] V.Majernic, T.Opatrny **J. Phys. A** **29** 2187 (1996)
- [9] C.P.Panos, S.E.Massen **Int. J. Mod. Phys. E** **6** 497 (1997)
- [10] G.A.Lalazisis, S.E.Massen, C.P.Panos, S.S.Dimitrova  
**Int. J. Mod. Phys. E** **7** 485 (1998)
- [11] S.E.Massen, C.P.Panos **Phys. Lett. A** **246** 530 (1998)  
S.E.Massen, C.P.Panos **Phys. Lett. A** **280** 65 (2001)

- [12] S.E.Massen, Ch.C.Moustakidis, C.P.Panos **Phys. Lett. A** **299** 131 (2002)
- [13] C.P.Panos **Phys. Lett. A** **289** 287 (2001)
- [14] S.E.Massen **Phys. Rev. C** **67** 014314 (2003)
- [15] Ch.C.Moustakidis, S.E.Massen **Phys. Rev. B** **71** 045102 (2005)
- [16] Q.Shi, S.Kais **J. Chem. Phys.** **121** 5611 (2004)
- [17] N.H.March **Electron Density Theory of Atoms and Molecules**  
Academic Press (1992)
- [18] P.Ziesche **Int. J. Quant. Chem.** **56** 363 (1995)
- [19] Ch.C.Moustakidis, S.E.Massen, C.P.Panos, M.E.Grypeos, A.N.Antonov  
**Phys. Rev. C** **64** 014314 (2001)
- [20] O.Onicescu **C. R. Acad. Sci. Paris** **263** (1966)
- [21] R.López-Ruiz, H.L.Mancini, X.Calbet **Phys. Lett. A** **209** 321 (1995)
- [22] R.G.Catalán, J.Garay, R.López-Ruiz **Phys. Rev. E** **66** 011102 (2002)
- [23] J.S.Shiner, M.Davison, P.T.Landsberg **Phys. Rev. E** **59** 1459 (1999)
- [24] P.M.Binder, N.Perry **Phys. Rev. E** **62** 2998 (2000)
- [25] K.Ch.Chatzisavvas, Ch.C.Moustakidis, C.P.Panos  
**J. Chem. Phys.** **123** 174111 (2005)
- [26] M.T.Martin, A.Plantino, O.A.Rosso **Phys. Lett. A** **311** 126 (2003)
- [27] K.D.Sen, C.P.Panos, K.Ch.Chatzisavvas, Ch.C.Moustakidis  
**Phys. Lett. A** **364** 286 (2007)
- [28] C.P.Panos, K.Ch.Chatzisavvas, Ch.C.Moustakidis, E.G.Kyrkou  
**Phys. Lett. A** **363** 78 (2007)
- [29] C.P.Panos, N.S.Nikolaidis, K.Ch.Chatzisavvas, C.C.Tsouros  
**Phys. Lett. A** **373** 2343 (2009)



- [30] R.López-Ruiz **Biophys. Chem.** **115** 215 (2005)
- [31] T.Yamano **J. Math. Phys.** **45** 1974 (2004)
- [32] C.Anteneodo, A.R.Plastino **Phys. Lett. A** **223** 348 (1996)
- [33] A.Borgoo, F.De Proft, P.Geerlings, K.D.Sen **Chem. Phys. Lett.** **444** 186 (2007)
- [34] H.E.Montgomery, K.D.Sen **Phys. Lett. A** **372** 2271 (2008)
- [35] X.Calbet, R.López-Ruiz **Physica A** **382** 523 (2007)
- [36] J.C.Angulo, J.Antolín **J. Chem. Phys.** **128** 164109 (2008)
- [37] J.C.Angulo, J.Antolín, K.D.Sen **Phys. Lett. A** **372** 670 (2008)
- [38] J.Sañudo, R.López-Ruiz **Phys. Lett. A** **372** 5283 (2008)
- [39] J.Sañudo, R.López-Ruiz **J. Phys. A** **41** 265303 (2008)
- [40] K.Ch.Chatzisavvas, V.P.Psonis, C.P.Panos, Ch.C.Moustakidis  
**Phys. Lett. A** **373** 3901 (2009)
- [41] S.E.Massen, V.P.Psonis, A.N.Antonov **Int. J. Mod. Phys. E** **14** 1251 (2005)
- [42] H.De Vries, C.W.De Jager, C.De Vries **At. Data Nucl. Data Tables** **36** 495 (1987)
- [43] V.V.Burov, D.N.Kadrev, V.K.Lukyanov, Y.S.Pol **Phys. Atom. Nucl.** **61** 525 (1998)
- [44] A.N.Antonov, M.K.Gaidarov, D.N.Kadrev, M.V.Ivanov, E.M.De Guerra, J.M.Udias  
**Phys. Rev. C** **69** 044321 (2004)
- [45] A.N.Antonov, M.K.Gaidarov, M.V.Ivanov, D.N.Kadrev, E.M.De Guerra, J.M.Udias  
**Phys. Rev. C** **71** 014317 (2005)
- [46] T.W.Donnely, I.Sick **Phys. Rev. Lett.** **82** 3212 (1999)  
T.W.Donnely, I.Sick **Phys. Rev. C** **60** 065502 (1999)
- [47] A.N.Antonov, V.A.Nikolaev, I.Zh.Petkov **Bulg. J. Phys.** **6** 151 (1979)  
A.N.Antonov, V.A.Nikolaev, I.Zh.Petkov **Z. Phys. A** **297** 257 (1980)  
A.N.Antonov, V.A.Nikolaev, I.Zh.Petkov **Z. Phys. A** **304** 239 (1982)

- [48] A.N.Antonov, V.A.Nikolaev, I.Zh.Petkov **Nuovo Cimento A** **86** 23 (1985)
- [49] A.N.Antonov, P.E.Hodgson, I.Zh.Petkov **Nucleon Momentum and Density Distributions in Nuclei** Clarendon Press (1988)  
A.N.Antonov, P.E.Hodgson, I.Zh.Petkov **Nucleon Correlations in Nuclei** Springer Verlag (1993)
- [50] A.N.Antonov, E.N.Nikolov, I.Zh.Petkov, C.V.Christov, P.E.Hodgson  
**Nuovo Cimento A** **102** 1701 (1989)  
A.N.Antonov, D.N.Kadrev, P.E.Hodgson **Phys. Rev C** **50** 164 (1994)
- [51] M.J.W.Hall **Phys. Rev A** **59** 2602 (1999)
- [52] B.Krusche **Eur. Phys. J. A** **26** 7 (2005)
- [53] A.Kohana, K.Lida, K.Oyamatsu **Phys. Rev. C** **69** 064316 (2004)
- [54] G.D.Alkhazov et al **Phys. Rev. Lett.** **78** 2313 (1997)
- [55] R.H.McCamis et al **Phys. Rev. C** **33** 1624 (1986)
- [56] L.Ray, W.R.Coker, G.W.Hoffmann **Phys. Rev. C** **16** 2641 (1978)
- [57] M.Lacombe, B.Loiseau, J.M.Richard, R.V.Mau, J.Cote, P.Pires, R.De Tourreil  
**Phys. Rev. C** **21** 861 (1980)
- [58] V.G.J.Stoks, R.A.M.Klomp, M.C.M.Rentmeester, J.J.De Swart  
**Phys. Rev. C** **48** 792 (1993)  
V.G.J.Stoks, R.A.M.Klomp, C.P.F.Terheggen, J.J.De Swart  
**Phys. Rev. C** **49** 2950 (1993)
- [59] [www.phys.anl.gov/theory/](http://www.phys.anl.gov/theory/)
- [60] M.Prakash, T.L.Ainsworth, J.M.Lattimer **Phys. Rev. Lett.** **61** 2518 (1988)
- [61] J.M.Lattimer, M.Prakash **Science** **304** 536 (2004)
- [62] S.L.Shapiro, S.A.Teukolsky **Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects** Wiley (1983)

- [63] N.K.Glendenning **Compact Stars-Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity** Springer Verlag (2000)
- [64] F.Weber **Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics** Bristol Institute of Physics Publishing (1999)
- [65] M.Prakash **The Equation of State and Neutron Star** Lectures (1994)
- [66] H.Heiselberg, M.Hjorth-Jensen **Phys. Rep.** **328** 237 (2000)
- [67] A.W.Steiner, M.Prakash, J.M.Lattimer, P.J.Ellis **Phys. Rep.** **411** 325 (2005)
- [68] M.Prakash, I.Bombaci, M.Prakash, P.J.Ellis, J.M.Lattimer, R.Knorren **Phys. Rep.** **280** 1 (1997)
- [69] V.P.Psonis, Ch.C.Moustakidis, S.E.Massen **Mod. Phys. Lett. A** **22** 1233 (2007)
- [70] J.M.Lattimer, M.Prakash **Phys. Rep.** **333** 121 (2000)
- [71] G.S.Sahakian **Equilibrium configurations of degenerate gaseous masses** Halsten-Wiley (1974)
- [72] R.C.Tolman **Phys. Rev.** **55** 364 (1939)
- [73] J.R.Oppenheimer, G.M.Volkov **Phys. Rev.** **55** 374 (1939)
- [74] A.E.L.Dieperink, Y.Dewulf, D.Van Neck, M.Waroquier, V.Rodin **Phys. Rev. C** **68** 064307 (2003)
- [75] A.E.L.Dieperink, D.Van Neck **J. Phys. Conf. Ser.** **20** 160 (2005)
- [76] J.R.Stone, P.D.Stevenson, J.C.Miller, M.R.Strayer **Phys. Rev. C** **65** 064312 (2002)
- [77] J.R.Stone, J.C.Miller, R.Koncowicz, P.D.Stevenson, M.R.Strayer **Phys. Rev. C** **68** 034324 (2003)
- [78] J.R.Stone, P.G.Reinhard **Progr. Part. Nucl. Phys.** **58** 587 (2007)
- [79] D.V.Shetty, S.J.Yennello, G.A.Souliotis **Phys. Rev. C** **75** 034602 (2007)
- [80] T.Klöhn et al **Phys. Rev. C** **74** 035802 (2006)

- [81] P.Danielewicz **Nucl. Phys. A** **727** 233 (2003)
- [82] P.Danielewicz **nucl-th/0607030**
- [83] P.Danielewicz **nucl-th/0411115**
- [84] R.B.Wiringa, V.Fiks, A.Fabrocini **Phys. Rev. C** **38** 1010 (1988)
- [85] Q.Li, Z.Li, S.Soff, R.K.Gupta, M.Bleicher, H.J.Stocker **J. Phys. G** **31** 1359 (2005)
- [86] W.Zuo, A.Lejeune, U.Lombardo, J.F.Mathiot **Eur. Phys. J. A** **14** 469 (2002)
- [87] F.Douchin, P.Haensel **Astron. Astrophys.** **380** 151 (2001)
- [88] M.Baldo, I.Bombaci, G.F.Burgio **Astron. Astrophys.** **328** 274 (1997)
- [89] C.H.Lee, T.T.S.Kuo, G.Q.Li, G.E.Brown **Phys. Rev. C** **57** 3488 (1998)
- [90] B.Liu, H.Guo, V.Creco, U.Lombardo, M.Di Toro, C.D.Lu  
**Eur. Phys. J. A** **22** 337 (2004)
- [91] P.G.Krastev, F.Sammarruca **Phys. Rev. C** **74** 025808 (2006)
- [92] B.A.Li, W.U.Schröder **Isospin Physics in Heavy-Ion Collisions at Intermediate Energies** Nova Science (2001)
- [93] B.A.Li, A.W.Steiner **Phys. Lett. B** **642** 436 (2006)
- [94] B.A.Li, C.B.Das, S.D.Gupta, C.Gale **Phys. Rev. C** **69** 011603 (2004)
- [95] D.Vretenar, T.Nikšić, P.Ring **Phys. Rev. C** **68** 024310 (2003)
- [96] J.M.Lattimer, M.Prakash **Astrophys. J.** **550** 426 (2001)
- [97] A.Akmal, V.R.Pandharipande **Phys. Rev. C** **56** 2261 (1997)
- [98] A.Akmal, V.R.Pandharipande, D.G.Ravenhall **Phys. Rev. C** **58** 1804 (1998)
- [99] J.Morales, V.R.Pandharipande, D.G.Ravenhall **Phys. Rev. C** **66** 054308 (2002)
- [100] X.R.Zhou, G.F.Burgio, U.Lombardo, H.J.Schulze, W.Zuo  
**Phys. Rev. C** **69** 018801 (2004)

- [101] L.W.Chen, C.M.Ko, B.A.Li **Phys. Rev. Lett.** **94** 032701 (2005)
- [102] B.A.Li, L.W.Chen **Phys. Rev. C** **72** 064611 (2005)
- [103] A.W.Steiner, B.A.Li **Phys. Rev. C** **72** 041601 (2005)
- [104] L.W.Chen, C.M.Ko, B.A.Li **Phys. Rev. C** **72** 064309 (2005)
- [105] J.M.Lattimer **J. Phys. G.** **30** 479 (2004)
- [106] C.J.Pethick **Rev. Mod. Phys.** **64** 1133 (1992)
- [107] J.M.Lattimer, C.J.Pethick, M.Prakash, P.Haensel **Phys. Rev. Lett.** **66** 2701 (1991)
- [108] R.P.Feynman, N.Metropolis, E.Teller **Phys. Rev.** **75** 1561 (1949)
- [109] G.Baym, C.Pethik, P.Sutherland **Astrophys. J.** **170** 299 (1971)
- [110] J.Sañudo, A.F.Pacheco **Phys. Lett. A** **373** 807 (2009)
- [111] Ch.C.Moustakidis, V.P.Psonis, K.Ch.Chatzisavvas, C.P.Panos, S.E.Massen  
**Phys. Rev. E** **81** 011104 (2010)
- [112] Ch.C.Moustakidis, S.E.Massen **Phys. Rev. B** **71** 045102 (2005)
- [113] A.B.Migdal **Theory of Finite Fermi-Systems and Applications to Atomic Nuclei**  
Wiley Interscience (1967)
- [114] M.Gaudin, J.Gillespie, G.Ripka **Nucl. Phys. A** **176** 237 (1971)
- [115] M.Dal.Ri, S.Stringari, O.Bohigas **Nucl. Phys. A** **376** 81 (1982)
- [116] M.F.Flynn, J.W.Clark, R.M.Panoff, O.Bohigas, S.Stringari  
**Nucl. Phys. A** **427** 253 (1984)
- [117] S.Moroni, G.Senatore, S.Fantoni **Phys. Rev. B** **55** 1040 (1997)
- [118] P.Gori-Giorgi, P.Ziesche **Phys. Rev. B** **66** 235116 (2002)
- [119] R.Jastrow **Phys. Rev.** **98** 1479 (1955)
- [120] D.L.Goodstein **States of Matter** Dover Publications (1985)

- [121] F.Mandl **Statistical Physics** John Wiley (1978)
- [122] K.Huang **Statistical Mechanics** John Wiley (1987)
- [123] R.P.Feynman **Statistical Mechanics** Addison-Wesley (1972)