



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΕ ΣΥΛΛΟΓΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΣΟΦΙΑΣ Γ. ΚΑΡΑΜΠΑΓΙΑ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

Επιβλέπων: Γεώργιος Κουτσούμπας,
Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ

Οκτώβριος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΕ ΣΥΛΛΟΓΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΣΟΦΙΑΣ Γ. ΚΑΡΑΜΠΑΓΙΑ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. Κουτσούμπας, Αν. Καθ. ΕΜΠ (Επιβλέπων)
Δ. Μπονάτσος, Διευθ. Ερευνών ΕΚΕΦΕ “Δ”
Κ. Παπαδόπουλος, Αν. Καθ. ΕΜΠ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. Κουτσούμπας, Αν. Καθ. ΕΜΠ (Επιβλέπων)
Δ. Μπονάτσος, Διευθ. Ερευνών ΕΚΕΦΕ “Δ”
Κ. Παπαδόπουλος, Αν. Καθ. ΕΜΠ
Ε. Μαυρομαμάτη, Αν. Καθ. ΕΚΠΑ
Γ. Λαλαζήσης, Καθ. ΑΠΘ
Μ. Αξενίδης, Κύρ. Ερευνητής ΕΚΕΦΕ “Δ”
Σ. Χαρισόπουλος, Διευθ. Ερευνών ΕΚΕΦΕ “Δ”

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περίληψη	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Συλλογικότητα στους ατομικούς πυρήνες	1
1.1.1 Παρατηρήσιμες ποσότητες συλλογικότητας	2
1.2 Το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων (IBM)	2
1.3 Η $U(6)$ άλγεβρα και οι αλυσίδες υποαλγεβρών	4
1.3.1 Κατασκευή βάσεων	6
1.3.2 Δυναμικές Συμμετρίες	8
1.3.3 Η Χαμιλτονιανή του IBM	13
1.3.4 Ψευδο-Δυναμικές και Μερικώς Δυναμικές Συμμετρίες	15
2 Θεωρία τυχαίων πινάκων και κβαντικό χάος	17
2.1 Θεωρία Τυχαίων Πινάκων	18
2.2 Το Γκαουσιανό Ορθογώνιο Σύνολο	19
2.3 GOE μέτρα διακυμάνσεων, αναπτύσσοντας το φάσμα	23
2.3.1 Η κατανομή αποστάσεων πλησιέστερων γειτόνων	23
2.3.2 Η κατανομή Δ_3	23
2.3.3 Η κατανομή Porter-Thomas	24
2.3.4 Αναπτύσσοντας το φάσμα	25
2.4 Κβαντικές Στατιστικές Παράμετροι	26
3 Υπολογισμοί χάους στη Χαμιλτονιανή του IBM	29
3.1 Αριθμητικά αποτελέσματα	30
3.2 Μελέτη του χάους στις 0^+ καταστάσεις	32
3.2.1 Χάος στις 0^+ καταστάσεις συναρτήσει της ενέργειας	32
3.2.2 Χάος στις 0^+ καταστάσεις συναρτήσει της παραμέτρου χ	36
3.2.3 Χάος στις 0^+ καταστάσεις συναρτήσει του αριθμού των μποζονίων N	36
3.3 Μελέτη του χάους στις εντάσεις των μεταβάσεων $BE0$	37
3.3.1 Χάος στις εντάσεις των μεταβάσεων $BE0$ συναρτήσει της παραμέτρου χ	38

3.3.2	Χάος στις εντάσεις των μεταβάσεων $B(E0)$ συναρτήσει της ενέργειας	38
4	Εξαγωγή με αναλυτικό τρόπο μιας προσεγγιστικής $SU(3)$ συμμετρίας στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM	43
4.1	Η $SU(3)$ συμμετρία	45
4.1.1	Σχέσεις μετάθεσης	45
4.2	Η $\overline{SU(3)}$ συμμετρία	50
4.3	Η συμμετρία $O(6)$	51
4.3.1	Σχέσεις μετάθεσης	51
4.4	Η συμμετρία $O(5)$	52
5	Αλληλεπίδραση πρωτονίου-νετρονίου και εμφάνιση συλλογικότητας στους πυρήνες	55
5.1	Πρότυπο Nilsson	56
5.1.1	Κυματοσυναρτήσεις στο χώρο διαμόρφωσης	57
5.2	Εμπειρικές αλληλεπιδράσεις π-ν	58
5.3	Ένα απλό πρότυπο για τις αλληλεπιδράσεις π-ν	63
5.4	$0[110]$ ζεύγη και ανάπτυξη συλλογικότητας και παραμόρφωσης	71
5.5	Καινούρια προσέγγιση ψευδοφλοιών στους βαρείς πυρήνες	73
5.5.1	Ψευδο- $SU(3)$ πρότυπο	73
5.5.2	Προσεγγιστική συμμετρία $SU(3)$	75
	Επίλογος	79
	Παράρτημα Α	81
	Παράρτημα Β	85
	Παράρτημα Γ	87
	Παράρτημα Δ	91
	Παράρτημα Ε	95
	Παράρτημα Ζ	97
	Παράρτημα Η	101
	Παράρτημα Θ	103

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε σε συνεργασία της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών και του ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”, υπό την επίβλεψη τριμελούς επιτροπής, με πρόεδρο τον Αναπλ. Καθηγητή του ΕΜΠ, Γεώργιο Κουτσούμπα και μέλη τον Αναπλ. Καθηγητή του ΕΜΠ, Κωνσταντίνο Παπαδόπουλο και τον Διευθυντή Ερευνών του ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”, Διονύσιο Μπονάτσο. Η εκπόνηση αυτής της εργασίας δε θα ήταν δυνατή χωρίς τη μεταπτυχιακή υποτροφία που μου παρείχε το ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”, καθώς και χωρίς την παροχή των αναγκαίων συνθηκών εργασίας και την οικονομική υποστήριξη συμμετοχών μου σε διεθνή συνέδρια από το Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής, όπου μου δόθηκε η δυνατότητα συνεργασιών, εποικοδομητικών συζητήσεων με πολλούς συναδέλφους από το εξωτερικό, καθώς και παρουσιάσης των αποτελεσμάτων μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Διονύση Μπονάτσο ο οποίος με δέχτηκε στην ομάδα της θεωρητικής πυρηνικής φυσικής του ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”. Τον ευχαριστώ για την ελευθερία και την ανεξαρτησία που μου έδωσε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής. Για τη συνεχή ενθάρρυνση, εμπιστοσύνη και στήριξη που μου έδειξε από την πρώτη στιγμή και συνεχίζει να μου δείχνει.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής από το ΕΜΠ, τον Δρ. Γεώργιο Κουτσούμπα και Δρ. Κωνσταντίνο Παπαδόπουλο για τη συνεχή συνδρομή τους και την πάντα άμεση απόκρισή τους σε ό,τι είχε να κάνει με τη διατριβή.

Οφείλω επίσης ένα ευχαριστώ στους ανθρώπους με τους οποίους συνεργάστηκα αυτά τα χρόνια, τον Rick Casten, την Burcu Cakirli και τον Klaus Blaum, η συνεργασία με τους οποίους ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση του διδακτορικού.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ όμως ανήκει στους συναδέλφους, παλιούς και καινούριους, που απαρτίζουν την ομάδα της θεωρητικής πυρηνικής φυσικής στο ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”. Ευχαριστώ θερμά τον μεταδιδάκτορα Δημήτρη Πετρέλλη, για τις πολύωρες παρουσιάσεις του και την προθυμία του να απαντάει στις κάθε λογής απορίες και ερωτήσεις μου. Την Ανδριάννα Μαρτίνου, της οποίας η ενεργή παρουσία και οι καίριες ερωτήσεις που θέτει, δίνουν μια δυναμικότητα σε κάθε μας συνάντηση. Τον Βάιο Μπλάτζιο, ο οποίος αν και παλιός συνάδελφος, οι διασκεδαστικές και άκρως ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις του, έχουν παραμείνει ζωντανές στη μνήμη μου. Ιδιαίτερο ευχαριστώ οφείλω στον συνάδελφο και φίλο Παναγιώτη Γεωργουδή. Ξεκινήσαμε μαζί, τελειώσαμε μαζί και κατά τη διάρκεια του διδακτορικού μοιραστήκαμε πολλά περισσότερα από ένα κοινό γραφείο. Ήταν πάντα δίπλα μου, σε κάθε δυσκολία και σε κάθε

χαρά, αυτά τα τέσσερα χρόνια, ως πραγματικός φίλος.

Αφήνω για το τέλος τους γονείς μου, οι οποίοι είναι οι αφανείς υποστηρικτές κάθε μου προσπάθειας. Ο καθένας με τον τρόπο του, μου δίνουν τη σιγουριά να πατήσω ακόμα πιο μακριά.

Περίληψη

Η έννοια της συμμετρίας κατέχει κεντρικό ρόλο στη φυσική. Μία Χαμιλτονιανή λέγεται ότι έχει μια συγκεκριμένη συμμετρία ή ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς μίας ομάδας συμμετρίας, όταν οι γεννήτορες της συγκεκριμένης ομάδας συμμετρίας μετατίθενται με τη Χαμιλτονιανή. Επακόλουθο της ύπαρξης συμμετρίας είναι η εμφάνιση εκφυλισμών στο φάσμα της Χαμιλτονιανής. Εκτός από την έννοια της συμμετρίας, υπάρχει και η έννοια της δυναμικής συμμετρίας. Δυναμική συμμετρία προκύπτει όταν η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των Casimir (ή αναλλοίωτων) τελεστών μιας αλυσίδας ομάδων συμμετρίας. (Οι τελεστές Casimir μιας ομάδας συμμετρίας είναι συνδυασμοί των γεννητόρων της ομάδας.) Στην περίπτωση δυναμικής συμμετρίας, οι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής χαρακτηρίζονται από τους χαρακτηριστικούς κβαντικούς αριθμούς όλων των συμμετριών των ομάδων που εμπλέκονται στην αλυσίδα, ενώ ο εκφυλισμός του φάσματος “χαλαρώνει”.

Οι δυναμικές συμμετρίες έχουν χρησιμοποιηθεί από καιρό στη μελέτη της πυρηνικής δομής. Μία από τις πρώτες χρήσεις των δυναμικών συμμετριών ήταν στα πλαίσια του SU(3) προτύπου του Elliott, που χρησιμοποιείται για την περιγραφή ελαφρών, μη σφαιρικών πυρήνων του s - d φλοιού. Στα πλαίσια του προτύπου των φλοιών μια ανάλογη προσπάθεια για την περιγραφή παραμορφωμένων πυρήνων επιτεύχθηκε με το πρότυπο του Nilsson, το οποίο υπολογίζει ενέργειες σύνδεσης νουκλεονίων σε παραμορφωμένο δυναμικό. Άλλο χαρακτηριστικό και ευρέως διαδεδομένο παράδειγμα χρήσης δυναμικών συμμετριών είναι στα πλαίσια του προτύπου των αλληλεπιδρώντων μποζονίων (Interacting Boson Model (IBM)), με τις τρεις δυναμικές του συμμετρίες, U(5), SU(3) και O(6), οι οποίες περιγράφουν σφαιρικούς δονητικούς, ωσειδείς αξονικά συμμετρικούς πυρήνες και πυρήνες ασταθείς ως προς την αξονική συμμετρία (γ - ασταθείς πυρήνες), αντίστοιχα.

Το σπάσιμο μιας συμμετρίας μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση προσεγγιστικών συμμετριών, οι οποίες μπορούν να αναγνωριστούν, εκτός των άλλων μεθόδων και με χαοτικά μέτρα. Το σπάσιμο της συμμετρίας SU(3) στους βαρείς πυρήνες, στο πρότυπο του Elliott, οδήγησε στην ανάπτυξη ενός προτύπου που βασίζεται σε μία προσεγγιστική συμμετρία SU(3), το ψευδο - SU(3) σχήμα, κατάλληλο για την περιγραφή βαρέων πυρήνων. Το σπάσιμο των συμμετριών στα πλαίσια του IBM, έχει οδηγήσει σε καινούριες προσεγγιστικές συμμετρίες, τις επεκταμένες έννοιες των Μερικώς Δυναμικών Συμμετριών και Ψευδο - Δυναμικών Συμμετριών, που σε γενικά πλαίσια σχετίζονται με την επιμονή μιας συμμετρίας ή μέρους της συμμετρίας, παρά τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις που οδηγούν στο σπάσιμο της συμμετρίας.

Στο πρώτο μέρος αυτής της εργασίας, χρησιμοποιούνται στατιστικά μέτρα του χάους, προκειμένου να μελετηθεί η εμφάνιση κανονικότητας μέσα σε χαοτικές περιοχές, στα πλαίσια του IBM. Το σπάσιμο της συμμετρίας οδηγεί τη Χαμιλτονιανή του IBM μακριά από τις δυναμικές της συμμετρίας και όπως θα περίμενε κανείς, μακριά από την κανονικότητα. Παρόλα αυτά, η ύπαρξη προσεγγιστικών συμμετριών στον παραμετρικό χώρο του IBM, οδηγεί στην εμφάνιση ημικανονικών περιοχών, που βασίζονται σε αυτές τις προσεγγιστικές συμμετρίες, οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα σε χαοτικές περιοχές. Μία γνωστή τέτοια περιοχή, η οποία βασίζεται σε μία άγνωστη προσεγγιστική συμμετρία, είναι το τόξο κανονικότητας. Βρέθηκε ότι είτε χρησιμοποιηθεί μικρός, είτε μεγάλος αριθμός μποζονίων, η θέση του τόξου κανονικότητας παραμένει αμετάβλητη. Επίσης, από τη μελέτη του χάους συναρτήσεως της ενέργειας, βρέθηκε ότι ο βαθμός χαοτικότητας μεταβάλλεται συναρτήσεως της ενέργειας και μάλιστα, ακόμα και για τα πιο χαοτικά σημεία, καθώς η ενέργεια αυξάνεται, το χάος δίνει τη θέση του στην κανονικότητα.

Εν συνεχεία, μελετήθηκε η φύση της υποκείμενης προσεγγιστικής συμμετρίας που χαρακτηρίζει το τόξο κανονικότητας. Εξήχθη, με αναλυτικό τρόπο, στον παραμετρικό χώρο του IBM, μία γραμμή η οποία βασίζεται σε μία προσεγγιστική συμμετρία $SU(3)$. Η εξαγωγή της γραμμής βασίστηκε στην ιδέα ότι προκειμένου να υπάρχει συμμετρία $SU(3)$, θα πρέπει η Χαμιλτονιανή του IBM να μετατίθεται με τους γεννήτορες της $SU(3)$. Η γραμμή προέκυψε από τη μελέτη Χαμιλτονιανών, οι οποίες στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων του IBM, μετατίθενται προσεγγιστικά με τους γεννήτορες της $SU(3)$. Η συγκεκριμένη γραμμή ακολουθεί στενά το τόξο κανονικότητας και δίνει μία εξήγηση της ύπαρξής του.

Τέλος, εισάγεται ένα καινούριο σχήμα σύζευξης πρωτονίων και νετρονίων, τα οποία βρίσκονται σε τροχιές μεγάλης χωρικής αλληλεπικάλυψης, το οποίο βασίζεται σε μία προσεγγιστική συμμετρία $SU(3)$. Το καινούριο σχέδιο σύζευξης, προτάθηκε μετά την παρατήρηση ότι η μέγιστη αλληλεπίδραση του τελευταίου πρωτονίου με το τελευταίο νετρόνιο εμφανίζεται στους πυρήνες των οποίων οι κυματοσυναρτήσεις του τελευταίου πρωτονίου και νετρονίου διαφέρουν κατά $0[110]$ στους κβαντικούς αριθμούς Nilsson. Χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα των κυματοσυναρτήσεων των συγκεκριμένων ζευγών, φαίνεται ότι αυτά έχουν μεγάλη χωρική επικάλυψη. Τελικά, το καινούριο σχέδιο σύζευξης, βασίζεται σε αυτά τα $0[110]$ ζεύγη.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Συλλογικότητα στους ατομικούς πυρήνες

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η χαμηλοενεργειακή δομή των πυρήνων, έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα το σφαιρικό πρότυπο των φλοιών. Στο σφαιρικό πρότυπο των φλοιών, τα νουκλεόνια κινούνται γύρω από ένα σφαιρικό δυναμικό, το οποίο παράγει δομή φλοιών, καθώς και κλειστούς φλοιούς, οι οποίοι δίνουν τους μαγικούς αριθμούς. Το σφαιρικό πρότυπο των φλοιών μπορεί να περιγράψει καλά πυρήνες που βρίσκονται κοντά στους κλειστούς φλοιούς. Αυτοί οι πυρήνες έχουν σφαιρικό σχήμα. Η συλλογικότητα μπορεί να γίνει κατανοητή ως συσχετισμένη κίνηση νουκλεονίων. Καθώς προστίθενται νουκλεόνια σθένους, ξεκινά ο ανταγωνισμός μεταξύ της αλληλεπίδρασης ζεύγους, που ευνοεί τη σφαιρική σύζευξη ίδιων νουκλεονίων και της τετραπολικής αλληλεπίδρασης, μεταξύ ανόμοιων νουκλεονίων, που ευνοεί την παραμόρφωση. Ενώ η αλληλεπίδραση ζεύγους είναι ανάλογη του αριθμού των νουκλεονίων σθένους, η τετραπολική αλληλεπίδραση είναι ανάλογη του τετραγώνου του. Έτσι, σταδιακά επικρατεί η παραμόρφωση. Πυρήνες με εκπεφρασμένη παραμόρφωση δεν μπορούν πια να περιγραφούν στα πλαίσια του σφαιρικού προτύπου των φλοιών. Το πρότυπο Nilsson [1], το οποίο κάνει χρήση παραμορφωμένου δυναμικού, αντί του σφαιρικού δυναμικού στο πρότυπο των φλοιών, έχει αποδειχτεί μάλλον ένα από τα πιο επιτυχημένα πρότυπα περιγραφής παραμορφωμένων πυρήνων. Οι παραμορφωμένοι πυρήνες έχουν περιγραφεί και στα πλαίσια αλγεβρικών προτύπων. Έχει αποδειχτεί ότι το φάσμα παραμορφωμένων ελαφρών πυρήνων (που ανήκουν το πολύ μέχρι τον sd φλοιό) ομοιάζει αυτό του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, που είναι γνωστό ότι χαρακτηρίζεται από SU(3) συμμετρία. Από αυτήν την ομοιότητα, αναπτύχθηκε το SU(3) πρότυπο του Elliott [2], κατάλληλο για την περιγραφή τέτοιων πυρήνων. Για βαρύτερους πυρήνες, η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς, σπάει την SU(3) συμμετρία. Προκειμένου να καλυφθεί το σπάσιμο της SU(3) συμμετρίας, αναπτύχθηκε το ψευδο- SU(3) σχήμα [3, 4].

Η συλλογική δομή των πυρηνικών σχημάτων για χαμηλές ενέργειες διέγερσης, κυριαρχείται από επιφανειακές παραμορφώσεις, όπου ένα επιφανειακό στρώμα νουκλεονίων δονείται γύρω από ένα σφαιρικό σχήμα ή προσδίδει στον πυρήνα παραμορφωμένο σχήμα. Οι παραμορφωμένοι πυρήνες μπορούν ακόμη και να περιστρέφονται. Αυτές οι

συλλογικές καταστάσεις μπορούν να περιγραφούν γεωμετρικά στα πλαίσια του προτύπου του Bohr [5]. Το συγκεκριμένο πρότυπο έχει δύο παραμέτρους δομής: τη β η οποία ορίζει το σχήμα του πυρήνα (αν $\beta=0$ ο πυρήνας είναι σφαιρικός, αν $\beta >0$ ο πυρήνας είναι ωσειδής, ενώ αν $\beta <0$ ο πυρήνας είναι πεπλατυσμένος στους πόλους) και τη γ η οποία ορίζει αν ο πυρήνας είναι αξονικά συμμετρικός ή όχι (γ -ασταθής). Το πρότυπο του Bohr έχει τρεις αναλυτικές λύσεις. Μία που περιγράφει σφαιρικούς αρμονικούς δονητές, μία που περιγράφει τριαξονικούς, γ -ασταθείς πυρήνες και τέλος μία που περιγράφει συμπαγείς περιστροφείς.

1.1.1 Παρατηρήσιμες ποσότητες συλλογικότητας

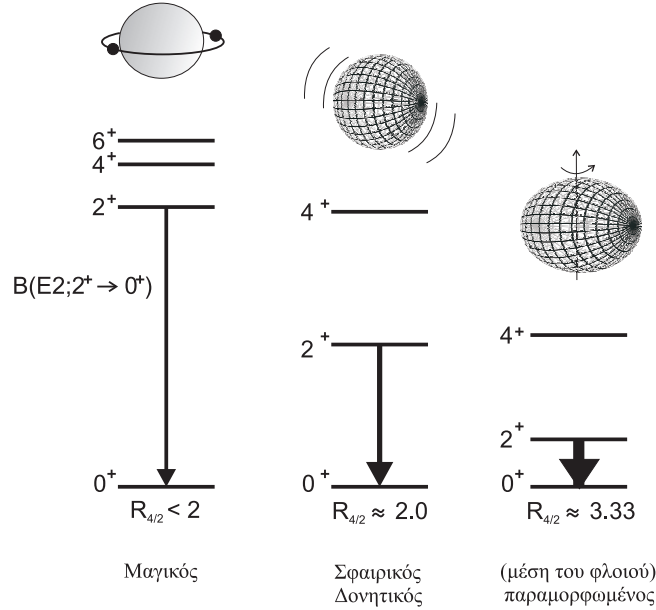
Διάφορες χαρακτηριστικές ποσότητες χρησιμοποιούνται για να δείξουν την εμφάνιση της συλλογικότητας και την επακόλουθη αλλαγή στη δομή των πυρήνων. Χρήσιμο μέτρο συλλογικότητας είναι ο λόγος

$$R_{4/2} = \frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)}, \quad (1.1)$$

όπου με $E(J^+)$ συμβολίζουμε την ενέργεια της στάθμης της θεμελιώδους ζώνης με στροφορμή J . Σε πυρήνες με μικρό αριθμό νουκλεονίων σθένους, όπου η συλλογικότητα δεν έχει εμφανιστεί ακόμα, ο λόγος $R_{4/2}$ είναι < 2 . Ένα χαρακτηριστικό του φάσματος αυτών των πυρήνων είναι ότι υπάρχει μεγάλο ενεργειακό χάσμα, μεταξύ της 0^+ κατάστασης και της πρώτης διεγερμένης 2^+ κατάστασης. Καθώς προστίθενται νουκλεόνια σθένους, κάνει την εμφάνισή της η παραμόρφωση, με τη μορφή συλλογικών δονήσεων γύρω από ένα σφαιρικό σχήμα και ο λόγος $R_{4/2}$ γίνεται ≈ 2 . Ακόμη, η πρώτη διεγερμένη 2^+ κατάσταση χαμηλώνει σε ενέργεια. Καθώς περισσότερα νουκλεόνια προστίθενται, ο πυρήνας παραμορφώνεται και οι καταστάσεις που απαρτίζουν το φάσμα του, ακολουθούν τον κανόνα $L(L+1)$. Τότε, ο λόγος $R_{4/2} \approx 3.33$. Επίσης, η πρώτη διεγερμένη 2^+ κατάσταση χαμηλώνει ακόμη περισσότερο σε ενέργεια. Στο Σχήμα (1.1) έχει επίσης σχεδιαστεί και η μετάβαση $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$. Ουσιαστικά, το πάχος του βέλους που συμβολίζει τη μετάβαση είναι ανάλογο της ισχύος της μετάβασης. Έτσι, η μετάβαση $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ακόμα μέτρο συλλογικότητας, αφού όσο πιο συλλογικός είναι ο πυρήνας, τόσο πιο ισχυρή είναι η μετάβαση.

1.2 Το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων (IBM)

Το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων (IBM) [6, 7], που εισήχθη από τους Arima και Iachello [8, 9, 10, 11], παρέχει ένα αλγεβρικό πλαίσιο περιγραφής συλλογικών κινήσεων στους άρτιους - άρτιους πυρήνες. Λαμβάνονται υπόψη μόνο νουκλεόνια σθένους, τα οποία θεωρούνται μποζόνια, συζευγμένα σε τροχιακή στροφορμή 0 και 2. Σε αυτήν την εκδοχή του προτύπου, η οποία είναι και η πιο απλή, δε γίνεται διαχωρισμός μεταξύ μποζονίων πρωτονίων και νετρονίων. Ο αριθμός των μποζονίων είναι



Σχήμα 1.1: Από τα αριστερά προς τα δεξιά, η μεταβολή του λόγου $R_{4/2}$, για πυρήνες κοντά σε κλειστούς φλοιούς, όπου η συλλογικότητα δεν έχει εμφανιστεί ακόμα, για πυρήνες που πραγματοποιούν συλλογικές δονήσεις και για παραμορφωμένους πυρήνες. Το βέλος αναφέρεται στη μετάβαση $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$, της οποίας η ισχύς είναι ανάλογη του πάχους του βέλους και φυσικά της αύξησης της συλλογικότητας.

ο μισός του αριθμού των πρωτονίων και νετρονίων σθένους. Τα πρωτόνια και τα νετρόνια σθένους μετρώνται από τον κοντινότερο κλειστό φλοιό και ανάλογα με το αν λιγότερο ή περισσότερο από το μισό του φλοιού έχει συμπληρωθεί, μπορεί να είναι είτε σωματίδια είτε οπές, αντίστοιχα.

Οι καταστάσεις και οι τελεστές στο IBM κατασκευάζονται από μποζονικούς τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα νουκλεόνια συζεύγνυνται είτε σε τροχιακή στροφορμή $L = 0$, οπότε δημιουργούν ένα μποζόνιο s , το οποίο δεν έχει μαγνητική υποκατάσταση, είτε σε τροχιακή στροφορμή $L = 2$, δημιουργώντας ένα μποζόνιο d με πέντε μαγνητικές υποκαταστάσεις. Οι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας και καταστροφής είναι οι,

$$\begin{cases} s^\dagger, d_\mu^\dagger & (\mu = 0, \pm 1, \pm 2), \\ s, d_\mu & (\mu = 0, \pm 1, \pm 2), \end{cases}$$

που ικανοποιούν τις μποζονικές σχέσεις μετάθεσης,

$$\begin{aligned} [s, s^\dagger] &= 1, & [s, s] &= [s^\dagger, s^\dagger] = 0 \\ [d_\mu, d_\mu^\dagger] &= \delta_{\mu, \mu'}; & [d_\mu, d_{\mu'}] &= [d_\mu^\dagger, d_{\mu'}^\dagger] = 0 \\ [s, d_\mu^\dagger] &= [s, d_\mu] = [s^\dagger, d_\mu^\dagger] &= [s^\dagger, d_\mu] = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Για εφαρμογές, οι μποζονικοί τελεστές πρέπει να μετασχηματίζονται σε σφαιρικοί ταυστές. Ενώ οι τελεστές δημιουργίας ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα, δε συμβαίνει

το ίδιο και με τους τελεστές καταστροφής, οπότε και εισάγονται καινούριοι τελεστές καταστροφής

$$\tilde{s} = s, \quad \tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}. \quad (1.3)$$

Έχοντας τους σφαιρικούς ταυιστές, μπορούν να κατασκευαστούν ταυιστικά γινόμενα, των οποίων η χρήση θα φανεί στην επόμενη ενότητα. Το ταυιστικό γινόμενο δύο σφαιρικών ταυιστών, $T_{\kappa_1}^{k_1}, T_{\kappa_2}^{k_2}$ είναι

$$T_\kappa^k = [T_{\kappa_1}^{k_1} \times T_{\kappa_2}^{k_2}]_\kappa^k = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} (k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | K \kappa) T_{\kappa_1}^{k_1} T_{\kappa_2}^{k_2}. \quad (1.4)$$

Όταν στο ταυιστικό γινόμενο οι σφαιρικοί ταυιστές συζεύγνυνται σε στροφορμή μηδέν, προκύπτει το βαθμωτό γινόμενο, που ορίζεται ως,

$$(U^{(k)} \cdot V^{(k)}) = (-1)^k (2k+1)^{1/2} [U^{(k)} \times V^{(k)}]_0^{(0)} = \sum_{\kappa} (-1)^\kappa U_\kappa^{(k)} V_\kappa^{(k)}. \quad (1.5)$$

1.3 Η $U(6)$ άλγεβρα και οι αλυσίδες υποαλγεβρών

Εισάγουμε τους τελεστές - ταυιστικά γινόμενα

$$G_\kappa^{(k)} = [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_\kappa^{(k)}, \quad (1.6)$$

όπου $l, l' = 0, 2 \equiv s, d$. Ο συμβολισμός σημαίνει ότι τα αντικείμενα στις αγκύλες με τροχιακή στροφορμή l και l' αντίστοιχα, συζεύγνυνται ώστε να δημιουργήσουν έναν σφαιρικό ταυιστή τροχιακής στροφορμής k .

Γράφοντας όλα τα ταυιστικά γινόμενα των σφαιρικών ταυιστών $\tilde{s}, s^\dagger, \tilde{d}_\mu, d_\mu^\dagger$, της μορφής (1.6) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετάθεσης

$$[G_\kappa^{(k)}(l, l'), G_{\kappa''}^{(k')}(l'', l''')] = \sum_{\kappa', \kappa''} \sqrt{(2k+1)(2k'+1)(k\kappa k' \kappa' | k'' \kappa'')} (-1)^{k-k'} \left[(-1)^{k+k'+k''} \begin{Bmatrix} k & k' & k'' \\ l''' & l & l' \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} G_{\kappa''}^{(k'')}(l, l''') - \begin{Bmatrix} k & k' & k'' \\ l'' & l' & l \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} G_{\kappa''}^{(k'')}(l'', l') \right], \quad (1.7)$$

παρατηρείται ότι οι σχέσεις μετάθεσης αυτών των τελεστών είναι ίδιες με τις σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας Lie της ομάδας $U(6)$. Έτσι, συγκροτούν τους γεννήτορες της $U(6)$. Για ευκολία, παραλείπουμε το σύμβολο \times από τα ταυιστικά γινόμενα και αντικαθιστούμε τις αγκύλες $[\]$, με παρενθέσεις, $(\)$.

$$\begin{aligned} G_0^{(0)}(s, s) &= (s^\dagger \tilde{s})_0^{(0)} \\ G_0^{(0)}(d, d) &= (d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
G_\mu^{(1)}(d, d) &= (d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)} \\
G_\mu^{(2)}(d, d) &= (d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)} \\
G_\mu^{(3)}(d, d) &= (d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(3)} \\
G_\mu^{(4)}(d, d) &= (d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(4)} \\
G_\mu^{(2)}(d, s) &= (d^\dagger \tilde{s})_\mu^{(2)} \\
G_\mu^{(2)}(s, d) &= (s^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)}
\end{aligned}$$

Αυτοί οι 36 τελεστές είναι οι γεννήτορες της $U(6)$. Επιλέγοντας συγκεκριμένα τανυστικά γινόμενα, αποκαλύπτονται οι υποάλγεβρες της $U(6)$ άλγεβρας και κατασκευάζονται αλυσίδες υποαλγεβρών. Για εφαρμογές στην πυρηνική φυσική, οι καταστάσεις πρέπει να χαρακτηρίζονται από καλή τροχιακή στροφορμή, έτσι, κάθε αλυσίδα θα πρέπει να περιέχει μία $O(3)$ άλγεβρα. Αφού ληφθεί υπόψη και αυτός ο περιορισμός, κατασκευάζονται τρεις αλυσίδες υποαλγεβρών

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \quad (\text{I}) \quad (1.9)$$

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \quad (\text{II})$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \quad (\text{III}),$$

ενώ αποκαλύπτονται και οι $U(5)$, $SU(3)$ και $O(6)$ δυναμικές συμμετρίες [12], που είναι οι δυναμικές συμμετρίες του προτύπου.

Μπορούμε να δούμε ρητά πως αποκαλύπτονται οι συγκεκριμένες υποάλγεβρες, επιλέγοντας τα κατάλληλα τανυστικά γινόμενα, των οποίων οι σχέσεις μετάθεσης κλείνουν κάτω από τις συγκεκριμένες άλγεβρες. Για την κατασκευή της πρώτης αλυσίδας, (I), από τους 36 γεννήτορες της $U(6)$, παραλείπονται αυτοί που περιέχουν το s μποζόνιο και οι εναπομείναντες τελεστές, $(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(3)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(4)}$, έχουν σχέσεις μετάθεσης που κλείνουν κάτω από την άλγεβρα $U(5)$. Κρατώντας τώρα τους δέκα τελεστές, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(3)}$, προκύπτει η ορθογώνια άλγεβρα σε πέντε διαστάσεις, $O(5)$. Τέλος, οι τελευταίοι τρεις τελεστές $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$, είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας $O(3)$.

Για τη δεύτερη αλυσίδα, (II), θεωρούνται οι τελεστές $(s^\dagger \tilde{s})_0^{(0)} + \sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$, $(d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)}$. Αυτοί οι τελεστές είναι κλειστοί κάτω από μετάθεση και σχηματίζουν τη $U(3)$ άλγεβρα. Ο τελεστής $(d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)}$ έχει \pm σύμβολο. Το $+$, αντιστοιχεί σε ωσειδή πυρηνικά σχήματα, ενώ το $-$, σε πεπλατυσμένα ως προς τους πόλους πυρηνικά σχήματα. Ο τελεστής $(s^\dagger \tilde{s})_0^{(0)} + \sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}$ είναι ο τελεστής του συνολικού αριθμού των μποζονίων, \hat{N} . Στο IBM, ο ολικός αριθμός των μποζονίων, N , διατηρείται και οι ιδιοτιμές του \hat{N} είναι σταθερές, ώστε μπορούν να παραλειφθούν, με τους τελεστές που μένουν να σχηματίζουν την $SU(3)$ άλγεβρα. Τέλος, η άλγεβρα των περιστροφών, $O(3)$, προκύπτει κρατώντας μόνο τους $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$ τελεστές.

Η τελευταία αλυσίδα, (III), προκύπτει εάν πρώτα μείνουν οι δεκαπέντε τελεστές $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(3)}$, $(d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)}$, οι οποίοι σχηματίζουν την άλγεβρα $O(6)$, εν συνεχεία,

κρατώντας τους δέκα τελεστές, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$, $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(3)}$, προκύπτει η $O(5)$ άλγεβρα, ενώ κρατώντας μόνο τους $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(1)}$ τελεστές, υπεισέρχεται η τελευταία άλγεβρα της αλυσίδας, η $O(3)$.

1.3.1 Κατασκευή βάσεων

Η κατασκευή των αλυσίδων αλγεβρών, επιτρέπει την κατασκευή βάσεων στην οποία η Χαμιλτονιανή μπορεί να διαγωνοποιηθεί. Οι βάσεις κάθε αλυσίδας γράφονται συναρτήσει των κβαντικών αριθμών που χαρακτηρίζουν τις μη αναγωγίμες αναπαραστάσεις (μ.α.α.) των αλγεβρών που εμφανίζονται στην αλυσίδα. Αυτό που χρειάζεται να είναι γνωστό, είναι οι επιτρεπτοί κβαντικοί αριθμοί των μ.α.α. της άλγεβρας G' δεδομένων των τιμών των κβαντικών αριθμών των μ.α.α. της άλγεβρας, G , που την περιέχει, ($G \supset G'$). Οι αναπαραστάσεις ερμηνεύονται ως κβαντομηχανικές καταστάσεις για τις οποίες χρησιμοποιείται ο συμβολισμός του μπράκετ.

Αλυσίδα I

Γενικά, οι πίνακες Young (Young tableaux) [13] που αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις της $U(n)$ άλγεβρας, συμβολίζονται με $[f_1, \dots, f_n]$. Οι αναπαραστάσεις της $U(n)$ που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή μποζονίων είναι εντελώς συμμετρικές και οι πίνακες Young που αντιστοιχούν σε αυτές συμβολίζονται με, $[N, 0, 0, \dots, 0] \equiv [N]$, όπου στις αγκύλες περιέχονται $n-1$ μηδενικά. Έτσι, οι μ.α.α. της $U(6)$ θα συμβολίζονται ως

$$U(6) : [N, 0, 0, 0, 0, 0] \equiv [N], \quad (1.10)$$

όπου N είναι ο ολικός αριθμός των μποζονίων. Παρόμοια, οι μ.α.α. της $U(5)$ θα είναι

$$U(5) : [n_d, 0, 0, 0, 0] \equiv [n_d], \quad (1.11)$$

όπου n_d ο αριθμός των d μποζονίων. Οι επιτρεπτές τιμές του n_d είναι $n_d = N, N - 1, \dots, 0$. Στη γενική περίπτωση της άλγεβρας $O(n)$, ο αριθμός των κβαντικών αριθμών που χρειάζονται για να περιγραφούν οι ολικά συμμετρικές μ.α.α. είναι είτε $n/2$, για άρτιο n , είτε $(n-1)/2$ για περιττό n . Δηλαδή, οι μ.α.α. της $O(5)$ θα χαρακτηρίζονται από δύο κβαντικούς αριθμούς

$$O(5) : [v, 0] \equiv [v], \quad (1.12)$$

όπου το v ονομάζεται αρχαιότητα και είναι ο αριθμός των ζευγών μποζονίων που δεν είναι συζευγμένα σε στροφορμή μηδέν. Οι επιτρεπτές τιμές του v είναι $v = n_d, n_d - 2, \dots, 1$ ή 0 , για n_d =περιττό ή άρτιο. Οι μ.α.α. της τελευταίας άλγεβρας αυτής της αλυσίδας, χαρακτηρίζονται από έναν κβαντικό αριθμό, που είναι η στροφορμή, L . Κατά την εύρεση των επιτρεπτών τιμών της στροφορμής, L , παρουσιάζεται ένα πρόβλημα: παραπάνω από μία καταστάσεις με συγκεκριμένη τιμή της στροφορμής, L , περιέχονται σε συγκεκριμένη αναπαράσταση v της $O(5)$. Χρειάζεται λοιπόν ένας επιπλέον κβαντικός αριθμός για να χαρακτηριστούν με μοναδικό τρόπο οι καταστάσεις. Αυτός είναι ο κβαντικός αριθμός n_Δ , που είναι ο αριθμός των τριπλετών μποζονίων

ενωμένα σε στροφορμή μηδέν. Προκειμένου να βρεθούν οι τιμές του L που περιέχονται σε κάθε αναπαράσταση του ν , το n_d διαμερίζεται με τον εξής τρόπο, $n_d = 2n_\beta + 3n_\Delta + \lambda$, όπου $n_\Delta = 0, 1, \dots$ και $n_\beta = (n_d - \nu)/2 = 0, 1, \dots, \frac{n_d}{2}$ ή $\frac{n_d-1}{2}$. Εν συνεχεία η τιμές του L βρίσκονται ως εξής, $L = \lambda, \lambda + 1, \dots, 2\lambda - 2, 2\lambda$. Η βάση θα έχει τη μορφή $|Nn_d n_\Delta L \rangle$.

Αλυσίδα II

Όπως και παραπάνω, οι μ.α.α. της $U(6)$ γράφονται ως $[N]$. Οι μ.α.α. της $SU(3)$ γράφονται με τη βοήθεια των χβαντικών αριθμών του Elliott, (λ, μ) [2].

$$SU(3) : \quad (\lambda, \mu). \quad (1.13)$$

Οι τιμές των (λ, μ) που περιέχονται στην $[N]$ είναι

$$\begin{aligned} (2N, 0) \oplus (2N - 4, 2) \oplus \dots &\oplus \left\{ \begin{array}{l} (0, N) \quad N = \text{even} \\ (2, N - 1) \quad N = \text{odd} \end{array} \right\} \oplus \\ (2N - 6, 0) \oplus (2N - 10, 2) \oplus \dots &\oplus \left\{ \begin{array}{l} (0, N - 3) \quad N - 3 = \text{even} \\ (2, N - 4) \quad N - 3 = \text{odd} \end{array} \right\} \oplus \\ (2N - 12, 0) \oplus (2N - 16, 2) \oplus \dots &\oplus \left\{ \begin{array}{l} (0, N - 6) \quad N - 6 = \text{even} \\ (2, N - 7) \quad N - 6 = \text{odd} \end{array} \right\} \oplus \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Για την τελευταία άλγεβρα της αλυσίδας, $O(3)$, της οποίας οι μ.α.α. χαρακτηρίζονται από τον χβαντικό αριθμό L , χρειάζεται ένας επιπλέον χβαντικός αριθμός προκειμένου να βρεθούν οι τιμές του L που περιέχονται σε κάθε (λ, μ) , ο χβαντικός αριθμός K . Με αυτόν τον τρόπο, $L = K, K + 1, K + 2, \dots, (K + \max\{\lambda, \mu\})$, όπου $K = \text{ακέραιος} = \min\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, 1$ ή 0 και για $K = 0, L = \max\{\lambda, \mu\}, \max\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, 1$ ή 0 . Η βάση θα έχει τη μορφή $|N(\lambda, \mu)KL \rangle$.

Αλυσίδα III

Με τον ίδιο τρόπο, για την τελευταία αλυσίδα, οι μ.α.α. της $U(6)$ γράφονται ως $[N]$. Οι μ.α.α. της $O(6)$ είναι οι

$$O(6) : \quad [\sigma, 0, 0, 0] \equiv \sigma, \quad (1.15)$$

όπου οι επιτρεπτοί χβαντικοί αριθμοί του σ είναι $\sigma = N, N - 2, \dots, 1$ ή 0 . Οι μ.α.α. της $O(5)$ είναι

$$O(5) : \quad [\tau, 0] \equiv \tau, \quad (1.16)$$

όπου οι επιτρεπτοί χβαντικοί αριθμοί του τ είναι $\tau = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0$. Για τις μ.α.α. της $O(3)$, που χαρακτηρίζονται από τον χβαντικό αριθμό L , ξανά, χρειάζεται ένας επιπλέον χβαντικός αριθμός προκειμένου να βρεθούν οι επιτρεπτές τιμές του L , ο χβαντικός αριθμός ν_Δ . Προκειμένου να βρεθούν οι τιμές του L που περιέχονται σε κάθε αναπαράσταση τ , ο τ διαμερίζεται ώστε $\tau = 3\nu_\Delta + \lambda$, όπου $\nu_\Delta = 0, 1, \dots$. Έτσι προκύπτει, $L = \lambda, \lambda + 1, \dots, 2\lambda - 2, 2\lambda$. Η βάση θα έχει τη μορφή $|N\sigma \tau \nu_\Delta L \rangle$.

1.3.2 Δυναμικές Συμμετρίες

Δυναμική συμμετρία προκύπτει όταν η Χαμιλτονιανή H μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τελεστών, που ονομάζονται τελεστές Casimir μιας αλυσίδας αλγεβρών

$$G \supset G' \supset \dots, \quad (1.17)$$

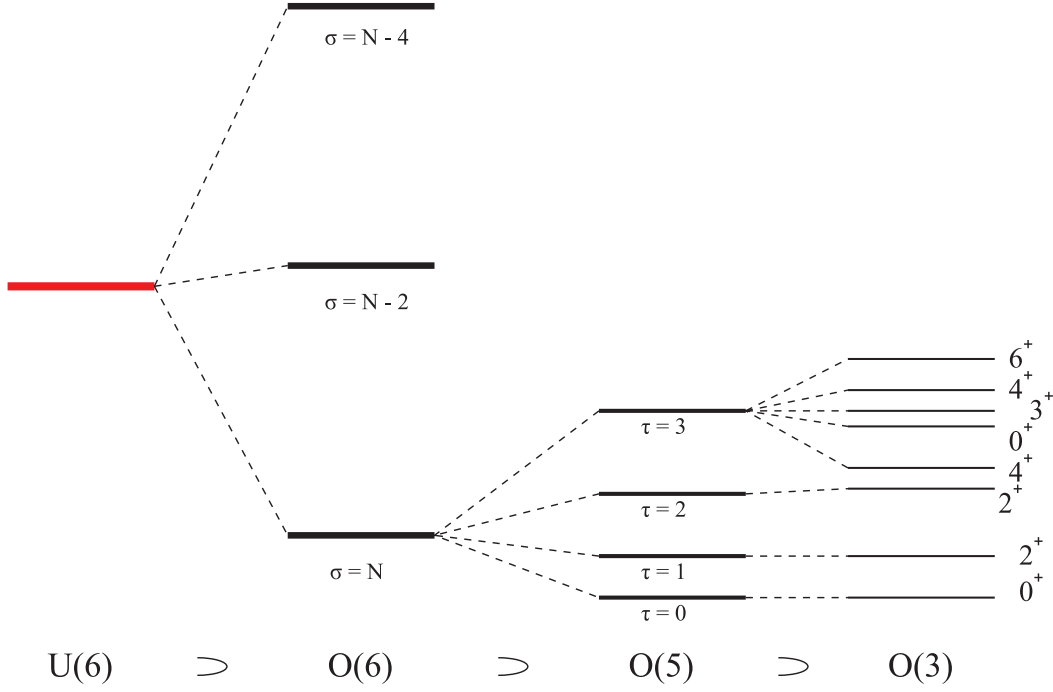
δηλαδή η Χαμιλτονιανή θα έχει τη μορφή $H = aC(G) + a'C(G') + \dots$, όπου $C(G)$ είναι ο τελεστής Casimir της άλγεβρας G . Οι τελεστές Casimir της άλγεβρας G , είναι γραμμικοί ή μεγαλύτερης τάξης συνδυασμοί γεννητόρων της άλγεβρας G . Επίσης, έχουν το χαρακτηριστικό ότι μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της άλγεβρας G . Οι τελεστές Casimir είναι επίσης διαγώνιοι στην αναπαράσταση της αντίστοιχης άλγεβρας G και έχουν ιδιοτιμές που είναι συναρτήσεις μόνο των χαρακτηριστικών κβαντικών αριθμών της συγκεκριμένης άλγεβρας. Αυτά τα χαρακτηριστικά έχουν άμεση εφαρμογή στις αλυσίδες αλγεβρών που περιγράφηκαν προηγουμένως. Έτσι, όταν η Χαμιλτονιανή γράφεται συναρτήσει μόνο των τελεστών Casimir μιας ολοκληρωμένης αλυσίδας υποάλγεβρων της $U(6)$, η Χαμιλτονιανή θα είναι διαγώνια στη βάση της αντίστοιχης αλυσίδας και μπορεί να βρεθεί αναλυτική λύση στο πρόβλημα ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής του IBM. Στο IBM υπάρχουν τρεις αλυσίδες υποάλγεβρων, οπότε υπάρχουν τρεις δυναμικές συμμετρίες.

Μία σημαντική ιδιότητα της δυναμικής συμμετρίας είναι ότι οι αναπαραστάσεις μιας άλγεβρας σπάνε ενεργειακά, αλλά δεν αναμειγνύονται με τις αναπαραστάσεις των αλγεβρών που εμπλέκονται στην αλυσίδα. Ο τρόπος που οι αναπαραστάσεις μιας άλγεβρας σπάνε ενεργειακά είναι με τη μετακίνηση στην επόμενη υποάλγεβρα της αλυσίδας. Για παράδειγμα, οι καταστάσεις μιας αναπαράστασης μιας άλγεβρας χαρακτηρίζονται όλες από τον ίδιο κβαντικό αριθμό, οπότε είναι εκφυλισμένες. Ο εκφυλισμός σπάει μετακινούννοι στην επόμενη άλγεβρα της αλυσίδας, όπου τα επίπεδα υποκατηγοριοποιούνται σύμφωνα με τον επόμενο κβαντικό αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο, οι αναπαραστάσεις σπάνε ενεργειακά, αλλά δεν αναμειγνύονται. Τα παραπάνω φαίνονται με χαρακτηριστικό τρόπο στο Σχήμα (1.2).

Τελεστές Casimir

Παρακάτω παρατίθεται η λίστα των τελεστών Casimir [15] των υποάλγεβρων της $U(6)$

$$\begin{aligned} C_1(U(6)) &= (s^\dagger \tilde{s})_0^{(0)} + \sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)} = \hat{n}_s + \hat{n}_d = \hat{N} \\ C_1(U(5)) &= \sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)} = \hat{n}_d \\ C_2(U(5)) &= \sum_{k=0}^4 (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \cdot (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} = \hat{n}_d(\hat{n}_d + 4) \\ C_2(SU(3)) &= \frac{4}{3}((d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}) \cdot ((d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.18)$$



$$E = E_0 + A\sigma(\sigma+4) + B\tau(\tau+3) + C L(L+1)$$

Σχήμα 1.2: Χαρακτηριστικό σπάσιμο του εκφυλισμού με τη μετακίνηση στην επόμενη άλγεβρα της αλυσίδας (το παράδειγμα αναφέρεται στην αλυσίδα $O(6)$). Οι αναπαραστάσεις σπάνε ενεργειακά, αλλά δεν αναμειγνύονται, με τη βοήθεια του χβαντικού αριθμού της επόμενης άλγεβρας της αλυσίδας. Το Σχήμα είναι από το [14].

$$\begin{aligned}
 & + 5(d^\dagger \tilde{d})^{(1)} \cdot (d^\dagger \tilde{d})^{(1)} = \frac{4}{3} \hat{Q} \cdot \hat{Q} + \frac{1}{2} \hat{L} \cdot \hat{L} \\
 C_2(O(6)) & = 2(d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} \cdot (d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} + 4 \sum_{k=1,3} (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \cdot (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \\
 & = 2\hat{N}(\hat{N} + 4) - 8 \hat{P}^\dagger \cdot \hat{P} \\
 C_2(O(5)) & = 4 \sum_{k=1,3} (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \cdot (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} = \frac{2}{5} \hat{L} \cdot \hat{L} + 4 \hat{T}_3 \cdot \hat{T}_3 \\
 C_2(O(3)) & = 20(d^\dagger \tilde{d})^{(1)} \cdot (d^\dagger \tilde{d})^{(1)} = 2 \hat{L} \cdot \hat{L},
 \end{aligned}$$

όπου $\hat{P} = \frac{1}{2}(\tilde{d} \cdot \tilde{d}) - \frac{1}{2}(\tilde{s} \cdot \tilde{s})$ είναι ο τελεστής σύζευξης, $\hat{L} = \sqrt{10}(d^\dagger \tilde{d})^{(1)}$ είναι ο τελεστής της στροφορμής, $\hat{Q} = (d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός τελεστής και $\hat{T}_3 = (d^\dagger \tilde{d})^{(3)}$ είναι το τελεστής μετάβασης, $M3$.

Οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir στην αναπαράσταση στην οποία είναι διαγώνιοι είναι

$$\begin{aligned}
 \langle [N] | C_1(U(6)) | [N] \rangle & = N \\
 \langle [n_d] | C_1(U(5)) | [n_d] \rangle & = n_d
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
\langle [n_d] | C_2(U(5)) | [n_d] \rangle &= n_d(n_d + 4) \\
\langle (\lambda, \mu) | C_2(SU(3)) | (\lambda, \mu) \rangle &= \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu \\
\langle (\sigma, 0, 0) | C_2(O(6)) | (\sigma, 0, 0) \rangle &= \sigma(\sigma + 4) \\
\langle (\tau, 0) | C_2(O(5)) | (\tau, 0) \rangle &= \tau(\tau + 3) \\
\langle (L) | C_2(O(3)) | (L) \rangle &= L(L + 1).
\end{aligned}$$

Δυναμική συμμετρία I

Έτσι, η δυναμική συμμετρία της πρώτης αλυσίδας αλγεβρών $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$ προκύπτει όταν η Χαμιλτονιανή γράφεται συναρτήσει των τελεστών Casimir των αλγεβρών της αλυσίδας, δηλαδή

$$H^{(I)} = E_0 + \epsilon C_1(U(5)) + a C_2(U(5)) + \beta C_2(O(5)) + \gamma C_2(O(3)). \quad (1.20)$$

Οι ιδιοτιμές στη βάση $|N n_d u n_\Delta L\rangle$ σύμφωνα με την ενότητα 1.3.2 είναι

$$E^{(I)} = E_0 + \epsilon n_d + a n_d(n_d + 4) + \beta v(v + 3) + \gamma L(L + 1). \quad (1.21)$$

Ένα τυπικό φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 1.3(α). Τα κύρια χαρακτηριστικά του φάσματος, δηλαδή τα επίπεδα που ισαπέχουν, η τριπλέτα καταστάσεων $L = 0, 2, 4$ για $n_d = 2$, σε ενέργεια διπλάσια της κατάστασης με $L = 2$ για $n_d = 1$, δείχνουν ότι πρόκειται για ένα δονητικό φάσμα. Αυτή είναι μία δυναμική συμμετρία $U(5)$.

Δυναμική συμμετρία II

Η Χαμιλτονιανή της δεύτερης αλυσίδας αλγεβρών $U(6) \supset SU(3) \supset O(3)$ γράφεται συναρτήσει των τελεστών Casimir των αλγεβρών της αλυσίδας

$$H^{(II)} = E_0 + \kappa C_2(SU(3)) + \kappa' C_2(O(3)). \quad (1.22)$$

Οι ιδιοτιμές στη βάση $|N(\lambda, \mu)KL\rangle$ είναι

$$E^{(II)} = E_0 + \kappa(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + \kappa' L(L + 1). \quad (1.23)$$

Ένα τυπικό φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 1.3(β). Το φάσμα είναι ισοδύναμο με το φάσμα ενός αξονικά συμμετρικού περιστροφικού πυρήνα, με την έννοια ότι οι ενέργειες σε κάθε ζώνη αυξάνουν ακολουθώντας τον κανόνα $L(L + 1)$. Οι ζώνες που ανήκουν στη (2,2) μ.α.α. (ουσιαστικά στη (2N-4,2) μ.α.α.) με $K = 0$ και $K = 2$ ονομάζονται β_1 και γ_1 ζώνες αντίστοιχα. Οι ζώνες που ανήκουν στη (2N-8,4) μ.α.α. ονομάζονται β_2 και γ_2 , κτλ. Ένα χαρακτηριστικό του φάσματος της δυναμικής συμμετρίας $SU(3)$ είναι ότι οι ζώνες που έχουν ίδια στροφορμή και ανήκουν στην ίδια μ.α.α., είναι εκφυλισμένες. Η μ.α.α. (2N,0), στην οποία ανήκει η ζώνη βασικής κατάστασης, ονομάζεται πιο κυρίαρχη μ.α.α., επειδή μεγιστοποιεί την τιμή του δεύτερης τάξης Casimir της $SU(3)$, $C_2(SU(3))$, που σημαίνει ότι η τετραπολική αλληλεπίδραση ($\hat{Q} \cdot \hat{Q}$) μεγιστοποιείται σε αυτή τη μ.α.α..

Δυναμική συμμετρία III

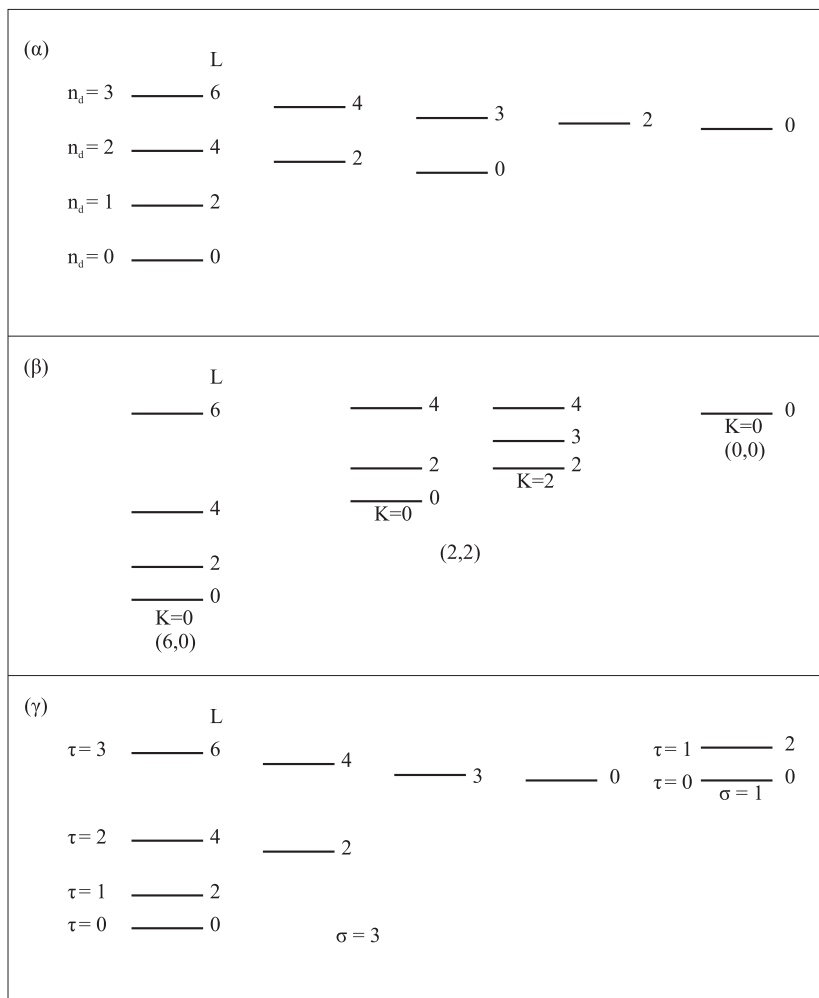
Η Χαμιλτονιανή της τρίτης αλυσίδας αλγεβρών $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$ γράφεται συναρτήσει των τελεστών Casimir των αλγεβρών της αλυσίδας

$$H^{(I)} = E_0 + AC_2(O(6)) + BC_2(SO(5)) + C C_2(O(3)). \quad (1.24)$$

Οι ιδιοτιμές στη βάση $|N\sigma \tau\nu_\Delta L \rangle$ είναι

$$E^{(III)} = E_0 + A\sigma(\sigma + 4) + B\tau(\tau + 3) + C L(L + 1). \quad (1.25)$$

Ένα τυπικό φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 1.3(γ). Χαρακτηριστική ιδιότητα της $O(6)$ δυναμικής συμμετρίας είναι η επαναλαμβανόμενη εμφάνιση των καταστάσεων $0^+, 2^+$ και της διπλέτας $2^+, 4^+$, όπου η ενεργειακή διαφορά μεταξύ της διπλέτας και της 0^+ κατάστασης είναι περίπου 2.5 φορές η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των καταστάσεων 2^+ και 0^+ . Το φάσμα αντιστοιχεί στο φάσμα ενός γ -ασταθούς πυρήνα.



Σχήμα 1.3: Το φάσμα των τριών δυναμικών συμμετριών της άλγεβρας $U(6)$ του IBM για $N=3$. (α) είναι το φάσμα της δυναμικής συμμετρίας $U(5)$ $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$, (β) είναι το φάσμα της δυναμικής συμμετρίας $SU(3)$ $U(6) \supset SU(3) \supset O(3)$ και (γ) είναι το φάσμα της δυναμικής συμμετρίας $O(6)$ $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$. Το Σχήμα είναι από το [15].

1.3.3 Η Χαμιλτονιανή του IBM

Μέχρι στιγμής έχουμε αποφύγει να γράψουμε μία γενική Χαμιλτονιανή για το πρότυπο. Έχουν προταθεί διάφορες εκφράσεις για τη Χαμιλτονιανή, αλλά η έκφραση που συνήθως χρησιμοποιείται για εφαρμογές στην πυρηνική δομή έχει τη μορφή [16, 17]

$$\hat{H}(\zeta, \chi) = c \left[(1 - \zeta) \hat{n}_d - \frac{\zeta}{4N} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (1.26)$$

όπου $\hat{n}_d = d^\dagger \cdot \tilde{d}$ είναι ο αριθμός των d -μποζονίων (ο Casimir τελεστής πρώτης τάξης της $U(5)$) και $\hat{Q}^x = (d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} + \chi (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός τελεστής, όπου N είναι ο αριθμός των μποζονίων σθένους και c ένας συντελεστής κλίμακας. Η συγκεκριμένη Χαμιλτονιανή ικανοποιεί τις απαιτήσεις για διατήρηση του αριθμού των μποζονίων (η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με τον τελεστή του αριθμού των μποζονίων), έχοντας ίσο αριθμό τελεστών δημιουργίας και καταστροφής και την απαίτηση για τη διατήρηση της στροφορμής (η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με τον τελεστή της στροφορμής), κάνοντας σύζευξη όλων των όρων σε στροφορμή μηδέν. Σε αυτήν την παραμετροποίηση, που είναι γνωστή ως συνεπής ως προς το Q φορμαλισμός, ο τετραπολικός τελεστής που χρησιμοποιείται στη Χαμιλτονιανή και στον τελεστή μετάβασης $E2$, $T^{(E2)} = e_B \hat{Q}^x$, είναι ο ίδιος, όπου το e_B αντιστοιχεί στο ενεργό φορτίο του μποζονίου. Η Χαμιλτονιανή έχει δύο παραμέτρους, τις ζ και χ , που χρησιμεύουν στο σπάσιμο της συμμετρίας. Η παράμετρος ζ παίρνει τιμές από 0 μέχρι 1 και το χ από 0 μέχρι $-\frac{\sqrt{7}}{2}$. Μεταβάλλοντας τις τιμές των ζ και χ , μπορούν να προκύψουν οι τρεις δυναμικές συμμετρίες του προτύπου και να περιγραφούν πυρήνες με ιδιότητες κοντά σε αυτές τις δυναμικές συμμετρίες. Η $U(5)$, που περιγράφει δονητικούς πυρήνες, αντιστοιχεί σε $\zeta = 0$, η $SU(3)$, που περιγράφει αξονικά συμμετρικούς περιστροφικούς πυρήνες, αντιστοιχεί σε $(\zeta, \chi) = (1, -\frac{\sqrt{7}}{2})$ και η $O(6)$, που περιγράφει παραμορφωμένους γ -σταθείς πυρήνες, αντιστοιχεί σε $(\zeta, \chi) = (1, 0)$. Οι τρεις δυναμικές συμμετρίες τοποθετούνται στις κορυφές του τριγώνου συμμετρίας (τρίγωνο του Casten) [14, 18], (Σχήμα 1.4) που είναι ο παραμετρικός χώρος του προτύπου. Η παράμετρος ζ αυξάνει καθώς προχωράμε από τη $U(5)$ κορυφή προς την $O(6)$ - $SU(3)$ γραμμή του τριγώνου και έχει σταθερή τιμή κατά μήκος των γραμμών που είναι παράλληλες στη γραμμή $O(6)$ - $SU(3)$. Η παράμετρος χ μεταβάλλεται πηγαίνοντας από την $SU(3)$ προς την $O(6)$ κορυφή του τριγώνου και έχει σταθερή τιμή κατά μήκος των γραμμών που ενώνουν τη $U(5)$ κορυφή με την $O(6)$ - $SU(3)$ γραμμή.

Ένα ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης στην πυρηνική δομή είναι η μελέτη των μεταβάσεων σχήματος/φάσης στους πυρήνες, οι οποίες αναφέρονται στην αλλαγή της δομής της ζώνης της βασικής κατάστασης του πυρήνα, από σφαιρική σε παραμορφωμένη. Μία αλλαγή φάσης/σχήματος προκύπτει όταν μία παρατηρήσιμη ποσότητα αλλάζει απότομα συναρτήσει μίας παραμέτρου ελέγχου. Εμπειρικά, διάφορες παρατηρήσιμες ποσότητες έχουν εξεταστεί, π.χ. ενέργειες των ενεργειακών επιπέδων, ενέργειες διαχωρισμού [19], οι οποίες δείχνουν απότομες ασυνέχειες στη συμπεριφορά σε ένα συγκεκριμένο σημείο, το οποίο ονομάζεται κρίσιμο σημείο.

Σύμφωνα με την ταξινόμηση κατά Ehrenfest, μία αλλαγή φάσης/σχήματος, είναι πρώτης τάξης, αν η πρώτη παράγωγος της παρατηρήσιμης ποσότητας είναι ασυνεχής στο κρίσιμο σημείο ή δεύτερης τάξης αν η ασυνέχεια παρουσιάζεται στη δεύτερη παράγωγο. Οι αλλαγές φάσης/σχήματος έχουν μελετηθεί στο πλαίσιο του IBM [20], χρησιμοποιώντας το κλασικό όριο του προτύπου [21, 22]. Σύμφωνα με την ταξινόμηση κατά Ehrenfest, βρέθηκε ότι αλλαγή φάσης/σχήματος πρώτης τάξης προκύπτει μεταξύ των $U(5)$ και $SU(3)$ ορίων και αλλαγή φάσης/σχήματος δεύτερης τάξης μεταξύ των $U(5)$ και $O(6)$ ορίων. Οι αλλαγές φάσης/σχήματος πρώτης και δεύτερης τάξης φαίνονται στο τρίγωνο συμμετρίας (Σχήμα 1.4). Γενικά, το τρίγωνο χωρίζεται σε δύο περιοχές, τη σφαιρική και την παραμορφωμένη, μέσω μίας λεπτής περιοχής συνύπαρξης φάσεων, [23] (οι λοξές γραμμές που φαίνονται στο Σχήμα), που εκτείνεται γύρω από τη γραμμή που ενώνει τα δύο σημεία που συμβαίνει η αλλαγή φάσης/σχήματος. Οι αλλαγές φάσης/σχήματος έχουν μελετηθεί και στα πλαίσια του γεωμετρικού προτύπου. Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ [24] και $X(5)$ [25] αναπτύχθηκαν για την περιγραφή αλλαγών φάσης/σχήματος, με την $E(5)$ να αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο δεύτερης τάξης μεταξύ των $U(5)$ και $O(6)$ και η $X(5)$ στο κρίσιμο σημείο πρώτης τάξης μεταξύ $U(5)$ και $SU(3)$, χρησιμοποιώντας ειδικές λύσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr [5]. Αν και δε σχετίζονται με το IBM, οι $E(5)$ και $X(5)$ τοποθετούνται και αυτές στο τρίγωνο συμμετρίας χάριν πληρότητας.

Τόξο κανονικότητας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι παράμετροι της Χαμιλτονιανής (1.26) χρησιμεύουν για το σπάσιμο της συμμετρίας. Το σπάσιμο της συμμετρίας μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση προσεγγιστικών συμμετριών, οι οποίες μπορούν να αναγνωριστούν μεταξύ άλλων μεθόδων, με χαοτικά μέτρα. Περίπου είκοσι χρόνια πριν, οι Alhassid και Whelan, μελετούσαν τη διάδραση μεταξύ κανονικής και χαοτικής συμπεριφοράς στα πλαίσια του IBM, χρησιμοποιώντας τόσο κλασικά, όσο και κβαντικά μέτρα χάους [26, 27, 28, 29, 30]. Στη μελέτη τους, είχαν παρατηρήσει κανονικότητα στα όρια των τριών δυναμικών συμμετριών καθώς και στην $O(6)$ - $U(5)$ πλευρά του τριγώνου, ενώ μακριά από αυτές τις κανονικές περιοχές, κυριαρχούσε χαοτική συμπεριφορά. Η μελέτη του εσωτερικού του τριγώνου συμμετρίας του IBM, έφερε στην επιφάνεια ένα αναπάντεχο αποτέλεσμα, μία περιοχή σχεδόν κανονικής συμπεριφοράς [27], που συνέδεε τις $U(5)$ και $SU(3)$ κορυφές, γνωστή ως «τόξο κανονικότητας των Alhassid–Whelan» ή απλώς «τόξο κανονικότητας». Αυτή η ημικανονική περιοχή φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Είναι το τόξο που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο και ενώνει τις $U(5)$ και $SU(3)$ κορυφές.

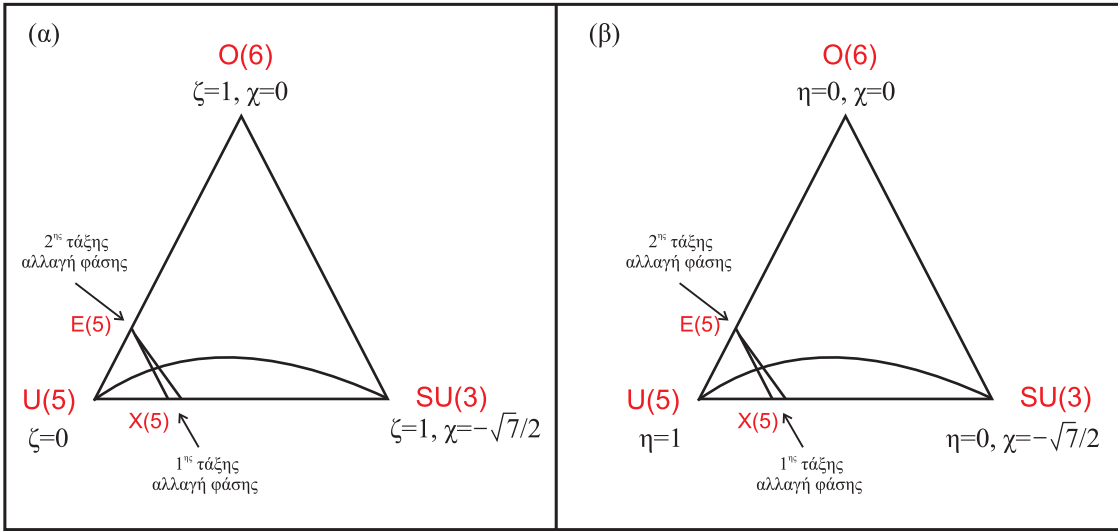
Οι Alhassid και Whelan χρησιμοποίησαν διαφορετική παραμετροποίηση της Χαμιλτονιανής του IBM, όπου η παράμετρος ζ αντικαθίσταται από την παράμετρο η , ενώ η παράμετρος χ παραμένει ίδια (Σχήμα 1.4 (β)). Σε αυτήν την παραμετροποίηση η Χαμιλτονιανή του IBM αλλάζει μορφή και γράφεται ως

$$\hat{H}(\eta, \chi) = c \left[\eta \hat{n}_d - \frac{\eta - 1}{N} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (1.27)$$

όπου τα η και ζ συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\eta = \frac{4(\zeta - 1)}{3\zeta - 4}. \quad (1.28)$$

Τα σημεία πάνω στο τόξο δίνονται από τη σχέση, $\chi(\eta) = \frac{\sqrt{7}-1}{2}\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}$ [29]. Από εδώ και πέρα στο κείμενο θα χρησιμοποιούμε τη συγκεκριμένη παραμετροποίηση για τη Χαμιλτονιανή.



Σχήμα 1.4: Το τρίγωνο συμμετρίας του IBM στις δύο διαφορετικές παραμετροποιήσεις. Οι λοξές γραμμές κλείνουν την περιοχή συνύπαρξης φάσεων. Οι δύο γραμμές ταυτίζονται κοντά στη δεύτερη τάξης αλλαγή φάσης/σχήματος ($X(5)$). Το τόξο που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο και ενώνει τις $U(5)$ και $SU(3)$ κορυφές είναι το τόξο κανονικότητας.

1.3.4 Ψευδο-Δυναμικές και Μερικώς Δυναμικές Συμμετρίες

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάστηκαν οι δυναμικές συμμετρίες της $U(6)$ συμμετρίας. Τα πλεονεκτήματα της παρουσίας δυναμικής συμμετρίας είναι προφανή. Οι ιδιοκαταστάσεις της δυναμικής συμμετρίας προκύπτουν εύκολα και είναι απλό να βρεθούν οι αναλυτικές εκφράσεις των ενεργειών στο όριο της δυναμικής συμμετρίας, καθώς και άλλων παρατηρήσιμων ποσοτήτων. Πέρα τούτα, οι δυναμικές συμμετρίες, σπάνια μπορούν να εφαρμοστούν στους πυρήνες. Για παράδειγμα, οι εκφυλισμοί που προβλέπονται στις δυναμικές συμμετρίες σπάνια παρουσιάζονται στους πυρήνες. Η εύρεση πιο γενικών συμμετριών, σε σχέση με τις δυναμικές συμμετρίες που βρίσκονται μόνο στις κορυφές του τριγώνου συμμετρίας, μπορεί να πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας σπάσιμο συμμετρίας. Με αυτόν τον τρόπο, προκύπτουν οι έννοιες των μερικώς δυναμικών συμμετριών (partial dynamical symmetries (PDS)) και ψευδο-δυναμικών συμμετριών (quasi-dynamical symmetries (QDS)).

Μία PDS επιτυγχάνεται όταν το σπάσιμο της συμμετρίας κρατά κάποια, αλλά όχι όλα τα χαρακτηριστικά της δυναμικής συμμετρίας. Υπάρχουν τρεις τύποι PDS [31, 32, 33, 34, 35]. Στον τύπο I, μέρος των καταστάσεων διατηρεί ολόκληρη τη δυναμική συμμετρία. Στον τύπο II, όλες οι καταστάσεις διατηρούν μέρος της δυναμικής συμμετρίας. Στον τύπο III, μέρος των καταστάσεων διατηρεί μέρος της δυναμικής συμμετρίας. Οι QDS [36, 37, 38, 39, 40] ορίζονται ως οι καταστάσεις όπου, διάφορες παρατηρήσιμες ποσότητες που σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο υποσύνολο ιδιοκαταστάσεων μπορεί να είναι συνεπείς με τη συγκεκριμένη συμμετρία, παρά το ισχυρό σπάσιμο της συμμετρίας. Η εμφανής επιμονή της συμμετρίας έχει να κάνει με το ότι οι κυματοσυναρτήσεις αυτών των καταστάσεων αναμειγνύονται με συνεκτικό τρόπο. Πρόσφατα, βρέθηκε ένας σύνδεσμος μεταξύ των PDS και QDS [41]. Στην αναφορά [41], βρέθηκε μια περιοχή ακριβούς συμμετρίας $O(6)$ της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης, μακριά από τη δυναμική συμμετρία $O(6)$, αναλύοντας τις *yrast* καταστάσεις σε βασικές καταστάσεις της $O(6)$ συμμετρίας. (Η *yrast* κατάσταση είναι η κατάσταση με τη μικρότερη ενέργεια για συγκεκριμένη στροφορμή. Έτσι, αν έχεις μια σειρά από 0^+ καταστάσεις του πυρήνα, η *yrast* κατάσταση θα είναι αυτή η 0^+ κατάσταση που βρίσκεται χαμηλότερα σε ενέργεια. Αντίστοιχα, αν έχεις μια σειρά από 2^+ , 4^+ κοκ καταστάσεις, οι *yrast* θα είναι αυτές που βρίσκονται χαμηλότερα σε ενέργεια για κάθε στροφορμή.) Σε αυτήν την περιοχή, ο κβαντικός αριθμός σ διατηρείται. Ταυτόχρονα, βρέθηκε ότι για τις ίδιες καταστάσεις, η ανάλυση των καταστάσεων σε βασικές καταστάσεις της $SU(3)$ συμμετρίας, έδειξε ότι η $SU(3)$ συμμετρία ήταν σπασμένη, εξαιτίας της ανάμειξης των αναπαραστάσεων της $SU(3)$, αλλά την ίδια στιγμή η ανάμειξη γινόταν με συνεκτικό συνεκτικό τρόπο, (ανεξάρτητα από τη στροφορμή των καταστάσεων, L), ένα χαρακτηριστικό της $SU(3)$ μερικώς δυναμικής συμμετρίας. Έτσι, η ανάμειξη με συνεκτικό τρόπο των καταστάσεων μιας συμμετρίας (της $SU(3)$ εδώ) μπορεί να οδηγήσει στην καθαρότητα ενός κβαντικού αριθμού που σχετίζεται με την μερική διατήρηση μίας διαφορετικής, ασύμβατης συμμετρίας (της $O(6)$ εδώ).

Κεφάλαιο 2

Θεωρία τυχαίων πινάκων και κβαντικό χάος

Πριν δώσουμε κάποιον ορισμό του κβαντικού χάους, θα ήταν ενδιαφέρον να περιγράψουμε πως το χάος αποκαλύπτεται στην κλασική μηχανική. Οι λύσεις των εξισώσεων της κίνησης των συστημάτων στην κλασική μηχανική οπτικά είναι τροχιές, οι οποίες ξεκινούν από συγκεκριμένα σημεία στο χώρο των φάσεων, σε συγκεκριμένο χρόνο t_0 και εν συνεχεία εξελίσσονται με το χρόνο στον διαθέσιμο χώρο των φάσεων. Εν γένει, τροχιές που έχουν απειροστά μικρές μεταβολές στις αρχικές συνθήκες, θα πρέπει να βρίσκονται σε κοντικές αποστάσεις στο χώρο των φάσεων.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό κάποιων συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων της κίνησης [42], είναι ότι απειροστά μικρές μεταβολές στις αρχικές συνθήκες μπορεί να οδηγήσουν σε εκθετική απόκλιση με το χρόνο, των τροχιών τους. Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται χάος. Ο φασικός χώρος ενός τελείως χαοτικού συστήματος θα είναι γεμάτος με τέτοιες χαοτικές τροχιές και δε θα έχει καθόλου νησίδες κανονικής δυναμικής.

Τα κβαντομηχανικά συστήματα δεν αναπαρίστανται με σημεία στο χώρο των φάσεων, αλλά με διανύσματα στο χώρο Hilbert. Η εξέλιξη με το χρόνο αυτών των διανυσμάτων κυβερνάται από τη γραμμική εξίσωση του Schrödinger. Έτσι, ο όρος κβαντικό χάος μπορεί να είναι παραπλανητικός, αφού η εξίσωση του Schrödinger είναι γραμμική, οπότε οι λύσεις της δεν μπορούν να είναι χαοτικές. Το κβαντικό χάος θα πρέπει να γίνει κατανοητό ως μία έννοια που αποδίδεται σε κβαντικά συστήματα που είναι χαοτικά στο κλασικό όριο [43, 44].

Τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη του κβαντικού χάους περιλαμβάνουν τη θεωρία τυχαίων πινάκων [45, 46, 47], τη δυναμική των επιπέδων [44] και τα αναπτύγματα περιοδικών τροχιών [43]. Εδώ θα εξετάσουμε την πρώτη μέθοδο, που εφαρμόζεται καλά σε πυρήνες. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες της διακύμανσης των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της Χαμιλτονιανής του IBM.

2.1 Θεωρία Τυχαίων Πινάκων

Οι τυχαίοι πίνακες εισήχθησαν στην πυρηνική φυσική τη δεκαετία του 1960 από τους Wigner, Dyson και άλλους προκειμένου να εξηγηθούν οι συντονισμοί των νετρονίων που παρατηρούνταν κατά τη σκέδαση χαμηλοενεργειακών νετρονίων από μεσαίου βάρους και βαρείς πυρήνες (π.χ. [48, 49]). Απουσία μιας πυρηνικής θεωρίας (το πυρηνικό πρότυπο των φλοιών είχε μόλις ανακαλυφθεί και δεν είχε ακόμα αποκτήσει καθολική αποδοχή), δόθηκε έμφαση στις στατιστικές ιδιότητες του πυρηνικού φάσματος όπως προέκυπτε από τα δεδομένα σκέδασης των νετρονίων.

Προκειμένου να αναπτυχθεί μια στατιστική θεωρία για τα φάσματα [50, 51, 52, 53, 54, 55], χρησιμοποιήθηκε η Θεωρία Τυχαίων Πινάκων, (Random Matrix Theory (RMT)). Αντί της θεώρησης μίας συγκεκριμένης Χαμιλτονιανής, ένα σύνολο Χαμιλτονιανών χρησιμοποιήθηκε, κάθε μία σε μορφή πίνακα και έχοντας μία συγκεκριμένη πιθανότητα. Η χρήση συνόλων είναι συνηθισμένη διαδικασία στη στατιστική μηχανική, αλλά διαφέρει αρκετά από τον τρόπο που τα σύνολα χρησιμοποιήθηκαν στην RMT. Στη στατιστική μηχανική, θεωρείται ένα σύνολο όμοιων φυσικών συστημάτων, που όλα διέπονται από την ίδια Χαμιλτονιανή, αλλά διαφέρουν ως προς τις αρχικές συνθήκες και οι θερμοδυναμικές συναρτήσεις υπολογίζονται κατά μέσο όρο σε αυτό το σύνολο. Έτσι, ενώ στη στατιστική μηχανική τα μέλη του συνόλου είναι διαφορετικές καταστάσεις της ίδιας Χαμιλτονιανής, στην RMT, τα μέλη είναι διαφορετικές Χαμιλτονιανές. Οι Χαμιλτονιανές του συνόλου έχουν κοινές ιδιότητες συμμετρίας (αναλλοίωτο ως προς το χρόνο, ως προς την περιστροφή, ημιακέραια στροφορμή), που εξαρτώνται από τις συμμετρίες του συστήματος. Η RMT δε λαμβάνει καθόλου υπόψη τις ειδικές ιδιότητες της πυρηνικής Χαμιλτονιανής, π.χ. τις αλληλεπιδράσεις δύο σωμάτων, τη μεγάλη σύζευξη, τις τετραπολικές ροπές, παρά μόνο την αναλλοιώτητα που υπαγορεύεται από τη συμμετρία των πινάκων. Έτσι, η προσοχή στρέφεται στις γενικότερες ιδιότητες που είναι κοινές σε (σχεδόν) όλα τα μέλη του συνόλου και που καθορίζονται από τις βασικές συμμετρίες. Η εφαρμογή των αποτελεσμάτων από αυτήν την προσέγγιση δικαιολογείται εφόσον υπάρχει ένα κατάλληλο εργοδικό θεώρημα (βλέπε επόμενη ενότητα). Η RMT δε στοχεύει στην παραγωγή φασμάτων για σύγκριση με τα δεδομένα, αλλά μάλλον στον υπολογισμό μέτρων φασματικών διακυμάνσεων (βλέπε επόμενες ενότητες) ως μέσους όρους επί του συνόλου.

Τα σύνολα των Χαμιλτονιανών πινάκων που θεωρήθηκαν από τους Wigner και Dyson [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64] ορίζονται συναρτήσει των απαιτήσεων της αναλλοιώτητας. Με κάθε Χαμιλτονιανό πίνακα να ανήκει στο σύνολο, όλοι οι πίνακες που δημιουργούνται από κατάλληλους μοναδιαίους μετασχηματισμούς του χώρου Hilbert είναι παρομοίως μέλη του συνόλου. Με αυτές τις παραδοχές, εισήγαγαν τρία σύνολα τυχαίων πινάκων. Αυτά είναι το Ορθογώνιο Γκαουσιανό Σύνολο (Gaussian orthogonal ensemble (GOE)), το Μοναδιακό Γκαουσιανό Σύνολο (Gaussian unitary ensemble (GUE)) και το Συμπλεκτικό Γκαουσιανό Σύνολο (Gaussian symplectic ensemble (GSE)).

- Το πρώτο, GOE, χρησιμοποιείται σε συστήματα αναλλοίωτα ως προς την α-

ναστροφή του χρόνου, με περιστροφική συμμετρία. Για αυτά τα συστήματα, η Χαμιλτονιανή επιλέγεται να είναι πραγματική και συμμετρική. Συστήματα αναλλοίωτα ως προς την αναστροφή του χρόνου με αθέρατο σπιν και σπασμένη περιστροφική συμμετρία, μπορούν επίσης να συμπεριληφθούν στο συγκεκριμένο σύνολο. Το σύνολο αυτό χρησιμοποιείται για τη μελέτη των πυρήνων.

- Το GUE είναι το Γκαουσιανό σύνολο ερμιτιανών (αλλά όχι κατ' ανάγκη) πραγματικών πινάκων. Αυτό το σύνολο παίζει ρόλο σε συστήματα στα οποία έχει παραβιαστεί το αναλλοίωτο ως προς την αναστροφή του χρόνου.
- Τέλος, έρχεται το GSE, που εφαρμόζεται σε συστήματα με ημιαθέρατο σπιν που είναι αναλλοίωτα ως προς την αναστροφή του χρόνου, αλλά με σπασμένη περιστροφική συμμετρία. Το GSE δεν εφαρμόζεται στους πυρήνες.

Και τα τρία σύνολα είναι αντίστοιχα αναλλοίωτα ως προς ορθογώνιους, μοναδιακούς και συμπλεκτικούς μετασχηματισμούς. Ξεχωρίζονται συχνά από το σύμβολο β , το οποίο δείχνει το βαθμό άπωσης [65], καθώς δύο ιδιοτιμές πλησιάζουν η μία την άλλη. Ορθογώνιοι, μοναδιακοί και συμπλεκτικοί κανονικοί μετασχηματισμοί αντιστοιχούν σε γραμμικό, τετραπολικό και οκταπολικό βαθμό ($\beta = 1$, $\beta = 2$, $\beta = 4$) άπωσης επιπέδων, αντίστοιχα. Από τους τρεις βαθμούς άπωσης επιπέδων, μόνο ο γραμμικός και ο τετραπολικός έχουν παρατηρηθεί πειραματικά. Η πρώτη πειραματική ένδειξη γραμμικής άπωσης ήρθε από την πυρηνική φυσική [45, 50, 66, 67], ενώ αργότερα επιβεβαιώσεις γραμμικής άπωσης ήρθαν από τα μικροκύματα [68, 69, 70, 71], τη μοριακή [72, 73] και την ατομική [74] φασματοσκοπία και τα ακουστικά κύματα [75, 76]. Ο τετραπολικός βαθμός άπωσης δεν έχει παρατηρηθεί στους πυρήνες, αφού το σπάσιμο της αναλλοιωτητάς ως προς την αναστροφή του χρόνου είναι ασθενές ώστε να γίνει ορατό στις κατανομές των διαστημάτων των ενεργειακών επιπέδων. Η πρώτη πειραματική παρατήρηση τετραπολικής άπωσης επιπέδων έγινε σε πειράματα μικροκυμάτων [77, 78], ενώ το πρώτο πειραματικό πραγματοποιημένο παράδειγμα σε κβαντικό σύστημα ήρθε αργότερα [79, 80].

Εφόσον οι πυρήνες είναι αναλλοίωτοι ως προς την αναστροφή του χρόνου και η πυρηνική Χαμιλτονιανή μπορεί να επιλεχθεί πραγματική και συμμετρική, το σύνολο τυχαίων πινάκων που θα θεωρηθεί από εδώ και πέρα θα είναι το GOE.

2.2 Το Γκαουσιανό Ορθογώνιο Σύνολο

Στο GOE θεωρείται μία οικογένεια πραγματικών συμμετρικών πινάκων, διάστασης N . Έχοντας $i, j = 1, \dots, N$, τα στοιχεία πίνακα υπακούουν σε $H_{ij} = H_{ji} = H_{ij}^*$. Κάθε πίνακας αυτής της οικογένειας εξαρτάται από $N(N+1)/2$ τυχαίες μεταβλητές, που είναι ουσιαστικά τα στοιχεία H_{ij} με $i \leq j$. Εικάζεται ότι αυτές οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες. Τα υπόλοιπα στοιχεία ορίζονται από τη συμμετρία.

Αυτό που κάποιος φάχνει είναι η πυκνότητα πιθανότητας $P(H)$ για τα ανεξάρτητα στοιχεία πίνακα H_{ij} , κανονικοποιημένη έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \leq j} dH_{ij} P(H) = 1 \quad (2.1)$$

και υποκειμένη σε δύο συνθήκες. Πρώτον, η $P(H)$ πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, έτσι ώστε για κάθε πραγματικό ορθογώνιο πίνακα O να ισχύει,

$$P(H) = P(OH\tilde{O}), \quad (2.2)$$

όπου $\tilde{O} = O^{-1}$.

Δεύτερον, τα στοιχεία του τυχαίου πίνακα H_{ij} πρέπει να είναι στατιστικά ανεξάρτητα, δηλαδή η συνάρτηση $P(H)$ πρέπει να είναι γινόμενο των πυκνοτήτων πιθανότητας κάθε H_{ij} .

$$P(H) = \prod_{i \leq j} P_{ij}(H_{ij}). \quad (2.3)$$

Έχει βρεθεί ότι κάτω από αυτές τις δύο συνθήκες, τα στοιχεία πίνακα H_{ij} πρέπει να έχουν Γκαουσιανή κατανομή. Η πυκνότητα πιθανότητας μπορεί να ξαναγραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} P(H) &= N_0 \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \left(\sum_j H_{jj}^2 + 2 \sum_{i < j} H_{ij}^2 \right) \right) \\ &= N_0 \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_{i,j} H_{ij}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Σα αυτήν την έκφραση όλα τα στοιχεία πίνακα έχουν μέσο 0, τα διαγώνια στοιχεία έχουν διακύμανση $2\sigma^2$ και τα μη διαγώνια διακύμανση σ^2 .

Παρατηρώντας ότι $\sum_{i,j} (H_{ij})^2 = \sum_{i,j} H_{ij}H_{ji} = (H^2)_{ii}$, η έκφραση (2.4) μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} P(H) &= N_0 \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_i (H^2)_{ii} \right) \\ &= N_0 \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \text{Tr}(H^2) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.4) μπορεί να υπολογιστεί η κατανομή πιθανότητας των ιδιοτιμών. Εν συντομία, η Χαμιλτονιανή ξαναγράφεται ως $H = O \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N) \tilde{O}$, όπου O είναι ένας ορθογώνιος πίνακας που μπορεί να καθοριστεί με τη βοήθεια το πολύ $N(N-1)/2$ παραμέτρων και $\text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N)$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας που περιέχει ιδιοτιμές. Αυτή η Χαμιλτονιανή εκφράζει τα H_{ij} συναρτήσει των E_1, \dots, E_N . Τέλος, χρησιμοποιώντας την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, η κατανομή των ιδιοτιμών παίρνει τη μορφή

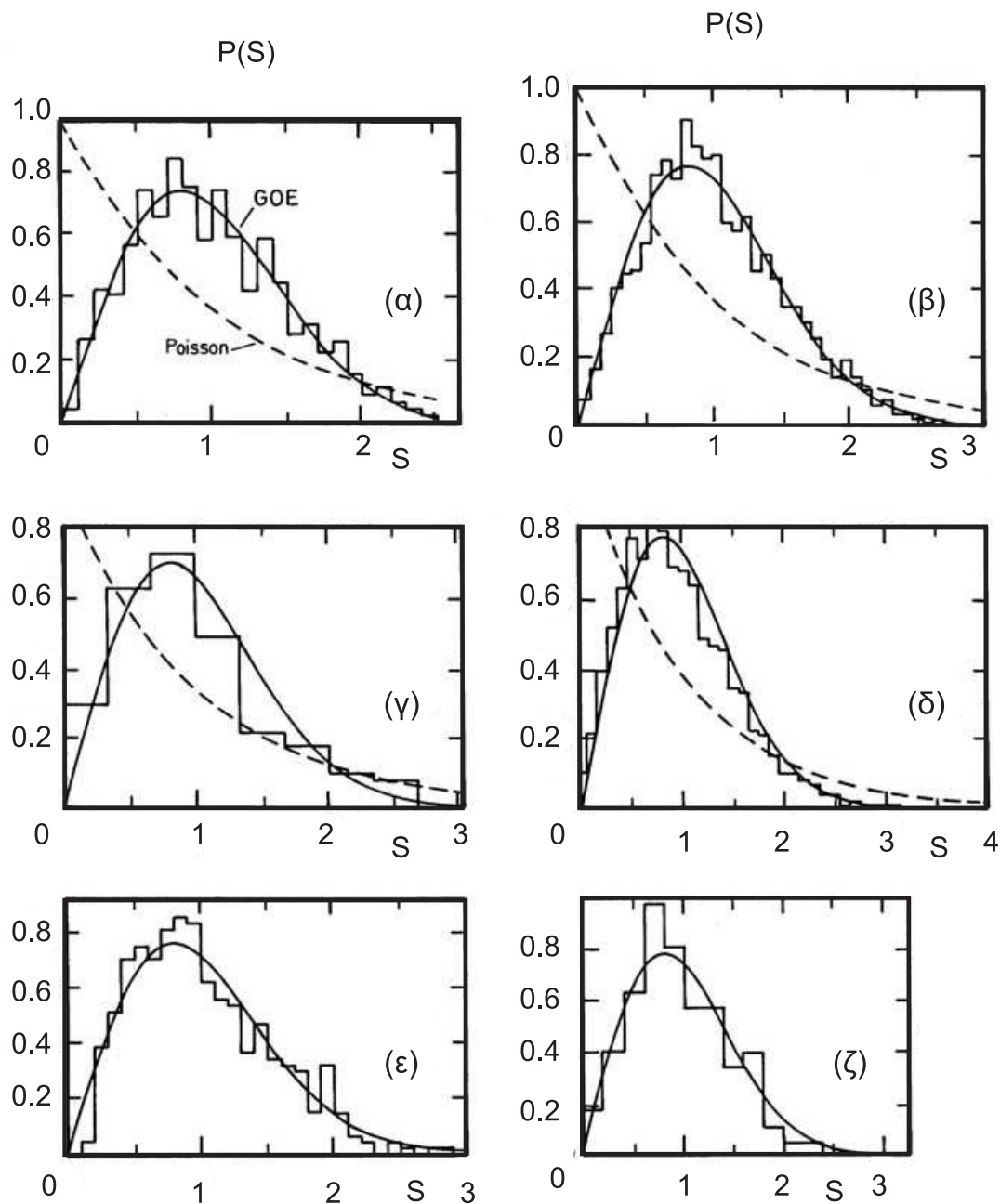
$$P(E_1, \dots, E_N) = N_0 \prod_{i < j} |E_i - E_j| \cdot \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_i E_i^2 \right) \quad (2.6)$$

Ο παράγοντας $\prod_{i < j} |E_i - E_j|$ δείχνει την έκφραση της άπωσης των επιπέδων. Όταν δύο ιδιοτιμές πλησιάζουν η μία την άλλη, η κατανομή των ιδιοτιμών μηδενίζεται.

Μία αναπάντεχη ιδιότητα της RMT (και του GOE φυσικά), που την κάνει τόσο επιτυχημένη, είναι η καθολικότητα της τοπικής στατιστικής των ιδιοτιμών. (Εδώ, τοπική στατιστική σημαίνει η προσαρμογή της κλίμακας των ιδιοτιμών, έτσι ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους να είναι τάξης ένα.) Αποδεικνύεται ότι όταν το μέγεθος του πίνακα είναι πολύ μεγάλο, $N \rightarrow \infty$, τότε η κατανομή των ιδιοτιμών τείνει προς μία οριακή κατανομή, ανεξάρτητα από τον αρχικό νόμο πιθανοτήτων που επιβλήθηκε στις εγγραφές του πίνακα (π.χ. ο αρχικός νόμος πιθανοτήτων που επιβλήθηκε στις εγγραφές του GOE είναι η Γκαουσιανή κατανομή). Στο όριο $N \rightarrow \infty$, οι φασματικές διακυμάνσεις είναι καθολικές. Με τον όρο καθολικός εννοούμε ότι συστήματα που είναι εντελώς διαφορετικά μεταξύ τους, (βλέπε Σχήμα 2.1), αλλά κυβερνώνται από τις ίδιες συμμετρίες και αναλλοιώτητες, έχουν φασματικές διακυμάνσεις που δείχνουν ίδια συμπεριφορά. Έτσι, οι κατανομές των εμπειρικά παρατηρούμενων ιδιοτιμών (π.χ. το φάσμα των πυρήνων), υπακούουν τις ίδιες στατιστικές με τα μοντέλα τυχαίων πινάκων.

Στην RMT, οι διάφορες ποσότητες υπολογίζονται ως μέσοι όροι πάνω στο σύνολο των Χαμιλτονιανών. Όμως, στα φυσικά συστήματα, υπάρχει μόνο μία Χαμιλτονιανή. Η προφανής ερώτηση είναι πως μπορεί η GOE να είναι εφαρμόσιμη σε μεμονωμένα φυσικά συστήματα που έχουν μόνο μία Χαμιλτονιανή, όπως είναι οι πυρήνες. Η απάντηση βρίσκεται στην ιδιότητα της εργοδικότητας της GOE. Η εργοδικότητα [85] αναφέρει ότι ο μέσος όρος του συνόλου μιας ποσότητας είναι ίσος με τον τρέχοντα μέσο όρο αυτής της ποσότητας, όπου ο τρέχων μέσος όρος υπολογίζεται για ένα μεμονωμένο μέλος του συνόλου.

Μία τελευταία ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί είναι πως η RMT συνδέεται με τη μελέτη του χάους στους πυρήνες. Η απάντηση δίνεται από την «εικασία του Bohigas» η οποία έθεσε το σύνδεσμο μεταξύ της RMT και των φασματικών διακυμάνσεων κλασικών χασοτικών χβαντικών συστημάτων με λιγούς βαθμούς ελευθερίας. Ήταν ήδη γνωστό ότι πειραματικά δεδομένα που αποκτούνταν από τη σκέδαση χαμηλοενεργειακών νετρονίων και πρωτονίων από πυρήνες, που είχαν συνδυαστεί για να φτιάξουν το «σύνολο πυρηνικών δεδομένων», ένα σύνολο από 1726 διαστήματα ενεργειακών επιπέδων, ήταν σε συμφωνία με την GOE [86]. Το 1984, οι Bohigas, Giannoni και Schmit [67] εξέτασαν το χβαντικό φάσμα του μπιλιάρδου του Sinai [87], ένα κλασικό χασοτικό σύστημα και παρήγαγαν ένα σύνολο από δεδομένα που αποτελούσαν από περισσότερες από 700 ιδιοτιμές, τις οποίες και συνέκριναν με τις προβλέψεις της GOE. Η καλή συμφωνία μεταξύ των φασματικών διακυμάνσεων που υπολογίστηκαν από τα δεδομένα και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της GOE έκαναν τους συγγραφείς να διατυπώσουν την ακόλουθη εικασία: «Τα φάσματα από συστήματα αναλλοιώτα ως προς την αναστροφή του χρόνου, των οποίων τα κλασικά ανάλογα συστήματα εκδηλώνουν ισχυρό χάος, δείχνουν τις ίδιες ιδιότητες στις διακυμάνσεις τους, όπως αυτές που προβλέπονται από την GOE».



Σχήμα 2.1: Κατανομές διαστημάτων ενεργειακών επιπέδων για (α) το μπιλιάρδο του Sinai [67], (β) άτομο υδρογόνου σε ισχυρό μαγνητικό πεδίο [81], (γ) ένα μόριο NO_2 [72], (δ) ένα δονούμενο μπλοκ χαλαζία σε σχήμα τρισδιάστατου μπιλιάρδου του Sinai [82], (ε) το φάσμα μικροκυμάτων μίας τρισδιάστατης χαοτικής κοιλότητας [83], (ζ) ένας δονούμενος ελαστικός δίσκος με σχήμα το ένα τέταρτο του σταδίου [84]. Το Σχήμα είναι από τον Haake [44].

2.3 GOE μέτρα διακυμάνσεων, αναπτύσσοντας το φάσμα

2.3.1 Η κατανομή αποστάσεων πλησιέστερων γειτόνων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η RMT δε στοχεύει στο να παράξει φάσματα για σύγκριση με το πείραγμα, αλλά στο να υπολογίσει μέτρα φασματικών διακυμάνσεων ή στατιστικά μέτρα για σύγκριση με τα δεδομένα. Το πρώτο στατιστικό μέτρο που εισάγεται εδώ είναι η κατανομή αποστάσεων πλησιέστερων γειτόνων, που συνήθως χρησιμοποιείται για τη μελέτη των μικρής εμβέλειας διακυμάνσεων του φάσματος. Συμβολίζεται με $P(S)$ και ισούται με την πυκνότητα πιθανότητας δύο γειτονικά ενεργειακά επίπεδα να απέχουν απόσταση S , όπου S είναι το πραγματικό διάστημα μεταξύ των ενεργειακών επιπέδων προς το μέσο μεταξύ τους διάστημα. Όταν η Χαμιλτονιανή είναι ολοκληρώσιμη, αλλά με άρρητες συχνότητες, τότε η κατανομή παίρνει μορφή Poisson [88]

$$P_P(S) = \exp(-S). \quad (2.7)$$

Για την GOE, η $P(S)$ δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά, αλλά δίνεται μία άριστη προσέγγιση από τον Wigner, γνωστή και ως εικασία του Wigner, που είναι η ακριβής κατανομή διαστημάτων για έναν πρότυπο πίνακα διάστασης 2×2 , που δίνεται από την κοινή κατανομή (2.6), εάν $\int SP(S)dS = 1 = \langle S \rangle$, κανονικοποιημένη $\int_0^\infty P(S)dS = 1$,

$$P_{GOE}(S) = \frac{\pi}{2} S \exp(-\pi S^2/4). \quad (2.8)$$

Η καθολικότητα είναι εμφανής σε αυτή τη σχέση, καθώς η γκαουσιανή μορφή της $P(S)$ δε σχετίζεται με τον γκαουσιανό παράγοντα της GOE κοινής κατανομής, αλλά έχει να κάνει με το γεγονός ότι είναι απίθανο να προκύψουν μεγάλα ή/και μηδενικά διαστήματα. Η ακριβής έκφραση για την $P(S)$ εξήχθηκε πρώτη φορά στην αναφορά [53]. Η $P(S)$ για την ολοκληρώσιμη (μορφή Poisson) και τη χαοτική περίπτωση (GOE) φαίνονται στο Σχήμα 2.2.

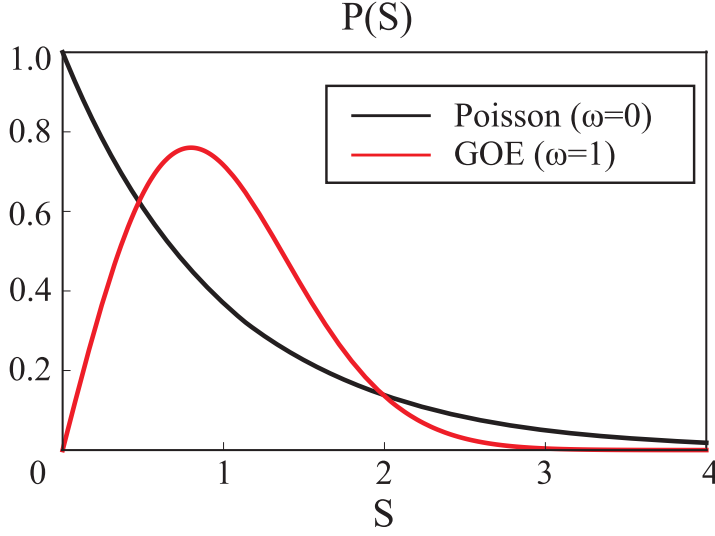
2.3.2 Η κατανομή Δ_3

Η φασματική ακαμψία, $\Delta_3(L)$, είναι ένα μέτρο της απόκλισης από τα ίσα διαστήματα και χρησιμοποιείται για να μετρηθούν συσχετίσεις μεγάλης εμβέλειας. Εισήχθη από τους Dyson και Mehta [63], που όρισαν τη συνάρτηση

$$\Delta_3(L) = \frac{1}{L} \min_{A,B} \left\langle \int_a^{a+L} [N(E) - (AE + B)]^2 dE \right\rangle_a, \quad (2.9)$$

όπου οι σταθερές A και B θα δώσουν την καλύτερη τοπική προσαρμογή στο $N(E)$ στο διάστημα $a \leq E < a + L$. Οι τριγωνικές αγκύλες δείχνουν το μέσο ως προς το a , ενώ L είναι το ενεργειακό μήκος του διαστήματος. Για ένα τυχαίο φάσμα Poisson (ολοκληρώσιμη περίπτωση), η Δ_3 παίρνει τη μορφή

$$\Delta_3^P(L) = \frac{L}{15}. \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.2: Η μορφή της κατανομής διαστημάτων πλησιέστερων γειτόνων για την Poisson και GOE περίπτωση. Το ω αντιστοιχεί σε παράμετρο της κατανομής Brody που θα εισαχθεί στην ενότητα 2.4.

Για την GOE περίπτωση, υπάρχει μία προσεγγιστική έκφραση, για μεγάλες τιμές του L ,

$$\Delta_3^{GOE}(L) = \frac{1}{\pi^2}(\log L - 0.0687). \quad (2.11)$$

Η ακριβής έκφραση, καλή για όλα τα L , είναι επίσης γνωστή [86],

$$\Delta_3^{GOE}(L) = \frac{2}{L^4} \int_0^L (L^3 - 2L^2r + r^3) \Sigma^2(r) dr. \quad (2.12)$$

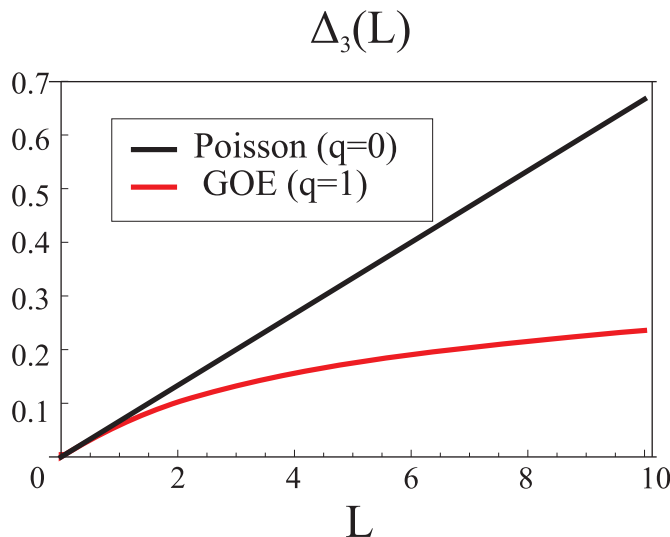
Σχετίζεται με το μέτρο διακυμάνσεων αριθμού διασποράς, $\Sigma^2(L) = \overline{n^2(a, L)} - \overline{(n(a, L))}^2$, όπου $n(a, L)$ είναι ο αριθμός των ενεργειακών επιπέδων στο διάστημα $[a, a + L]$. Υπάρχει αναλυτική έκφραση και για το $\Sigma^2(L)$ [86],

$$\begin{aligned} \Sigma^2(L) = \frac{2}{\pi^2} \left(\ln(2\pi L) + \gamma + 1 + \frac{1}{2}(Si(\pi L))^2 - \frac{1}{2}\pi Si(\pi L) - \cos(2\pi L) \right. \\ \left. - Ci(2\pi L) + \pi^2 L \left[1 - \frac{2}{\pi} Si(2\pi L) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Το Σχήμα 2.3 δείχνει τη μορφή του $\Delta_3(L)$ για τις περιπτώσεις GOE και Poisson.

2.3.3 Η κατανομή Porter-Thomas

Εκτός των διακυμάνσεων των ενεργειακών επιπέδων, μπορούν να θεωρηθούν και διακυμάνσεις των μεταβάσεων από κάποιο επίπεδο του διεγερμένου πυρήνα σε ένα άλλο. Οι Porter και Thomas υπέθεσαν ότι τα στοιχεία πίνακα των μεταβάσεων που συνδέουν τις καταστάσεις του πυρηνικού φάσματος, μπορούν να θεωρηθούν τυχαίες, όμοιες ανεξάρτητες μεταβλητές, Γκαουσιανής κατανομής με κέντρο το μηδέν. Η προκύπτουσα



Σχήμα 2.3: Η μορφή της κατανομής της στατιστικής Δ_3 για την Poisson και GOE περίπτωση. q είναι μία παράμετρος που θα εισαχθεί στην ενότητα 2.4, η οποία χαρακτηρίζει το σύστημα ως κανονικό ή χαοτικό.

κατανομή για την περίπτωση GOE είναι η κατανομή Porter-Thomas [54]

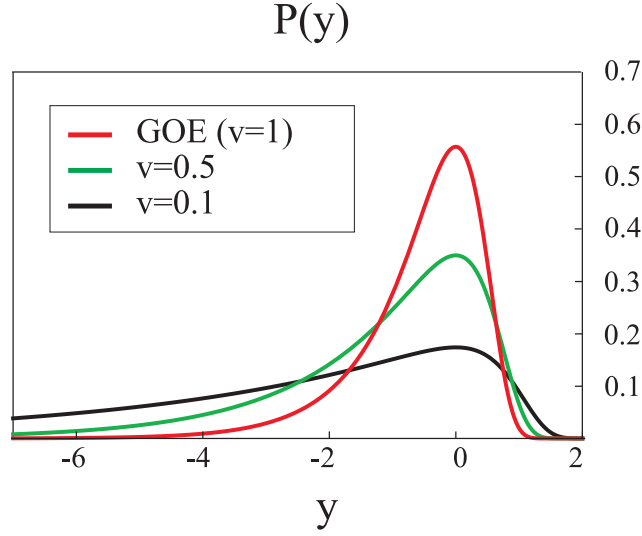
$$P_{GOE}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle y \rangle} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp(-y/2 \langle y \rangle), \quad (2.14)$$

όπου y είναι η ένταση της μετάβασης, π.χ. $B(E_0)$ ή $B(E_2)$. Δεν υπάρχει γενική κατανομή για την κανονική περίπτωση, αλλά αναμένεται ότι στην κανονική περίπτωση θα υπάρχουν λιγότερες μεταβάσεις σε σχέση με την χαοτική περίπτωση. Είναι πολύ σημαντικό, για να είναι οι υπολογισμοί σωστοί, όταν κάποιος συγκρίνει την κατανομή Porter-Thomas με τα δεδομένα, να λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα, καθώς επίσης και μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων με ίδια στροφορμή. Το Σχήμα 2.4 δείχνει τη μορφή της κατανομής Porter-Thomas.

2.3.4 Αναπτύσσοντας το φάσμα

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2, η καθολικότητα των στατιστικών μέτρων φαίνεται όταν το φάσμα αναπτύσσεται. Μετά από μία μέτρηση ή έναν υπολογισμό, παράγεται μία διατεταγμένη ακολουθία επιπέδων (E_1, E_2, \dots, E_N), τα οποία δημιουργούν το φάσμα. Το φάσμα έχει τα εξής χαρακτηριστικά, τα χαμηλοενεργειακά επίπεδα έχουν συστηματικά μεγαλύτερες αποστάσεις μεταξύ τους σε σχέση με τα επίπεδα που βρίσκονται υψηλότερα σε ενέργεια. Αυτό αντανακλάται και στα φασματικά μέτρα διακύμανσεων, οπότε απαιτείται να γίνει η ανάπτυξη του φάσματος, δηλαδή η τροποποίηση του φάσματος, ώστε η μέση ενεργειακή απόσταση να είναι σταθερή και ίση με ένα, $\langle S \rangle = 1$.

Ο τρόπος που γίνεται η ανάπτυξη είναι ο εξής: Κατασκευάζεται μία συνάρτηση κλίμακας από τα δεδομένα. Η συνάρτηση κλίμακας είναι ο αριθμός των επιπέδων που βρίσκονται κάτω από μία συγκεκριμένη ενέργεια. Ονομάζεται συνάρτηση κλίμακας,



Σχήμα 2.4: Η μορφή της κατανομής Porter-Thomas για την GOE περίπτωση ($\nu = 1$), καθώς και δύο περιπτώσεις με λιγότερο χάος. ν είναι η παράμετρος που θα εισαχθεί στην ενότητα 2.4, η οποία χαρακτηρίζει το σύστημα ως χαοτικό ή κανονικό.

γιατί θυμίζει σκάλα. Εν συνεχεία, ένα χαμηλής τάξης πολυώνυμο $N(E)$ προσαρμόζεται στη συνάρτηση [89]. Οι ανεπτυγμένες ενέργειες, οι οποίες θα ονομάζονται κανονικοποιημένες από εδώ και πέρα, βρίσκονται ως εξής

$$\epsilon_i = N(E_i). \quad (2.15)$$

Η μέση απόσταση των επιπέδων του φάσματος των κανονικοποιημένων ενεργειών, είναι ίση με ένα. Στον υπολογισμό των μέτρων διακυμάνσεων του φάσματος, όπως συζητήθηκε προηγουμένως, οι ενέργειες που χρησιμοποιούνται είναι οι κανονικοποιημένες ενέργειες.

2.4 Κβαντικές Στατιστικές Παράμετροι

Τα τρία στατιστικά μέτρα που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, έχουν μορφές που περιγράφουν είτε το χαοτικό, είτε το κανονικό όριο. Πάρα ταύτα, συχνά, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από κάποιο υπολογισμό, έχουν χαρακτήρα μεταξύ κανονικότητας και χαοτικότητας, έτσι, οι κβαντικές στατιστικές κατανομές που παράγονται έχουν ενδιάμεσο χαρακτήρα. Είναι προφανές ότι είναι αναγκαίο να βρεθούν μορφές των τριών στατιστικών μέτρων, οι οποίες, με τη βοήθεια μιας παραμέτρου, θα μπορούσαν να προσαρμόζουν χαοτικά, ολοκληρώσιμα, αλλά και αποτελέσματα ενδιάμεσου χαρακτήρα.

Για την κατανομή πλησιέστερων γειτόνων, η μορφή της συνάρτησης που παρεμβάλλεται μεταξύ των κανονικών και χαοτικών ορίων είναι η κατανομή Brody [45],

$$P_\omega(S) = A \alpha (1 + \omega) S^\omega \exp(-\alpha S^{1+\omega}), \quad (2.16)$$

που A είναι παράγοντας κλίμακας και $\alpha = \Gamma[(2+\omega)/(1+\omega)]^{1+\omega}$. Η τιμή του ω βρίσκεται προσαρμόζοντας την (2.16) στα δεδομένα με τη βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων. Η κατανομή Brody παίρνει τη μορφή της στατιστικής Poisson όταν $\omega = 0$ (Εξ. (2.7)), που χαρακτηρίζει ένα σύστημα με κανονικότητα και τη μορφή της κατανομής Wigner όταν $\omega = 1$ (Εξ. (2.8)), που αντιστοιχεί σε χαοτικό σύστημα (Σχήμα 2.2). Για ενδιάμεσες καταστάσεις, μεγαλύτερες τιμές του ω σημαίνει περισσότερο χάος.

Για τη φασματική ακαμψία, η μορφή της συνάρτησης είναι [45]

$$\Delta_3^q(L) = \Delta_3^{GOE}(qL) + \Delta_3^P((1-q)L). \quad (2.17)$$

Η τιμή του q βρίσκεται και πάλι προσαρμόζοντας τα δεδομένα. Για $q = 0$, προκύπτει η περίπτωση με κανονικότητα, $\Delta_3^P(L)$, που δίνεται στην Εξ. (2.10), ενώ για $q = 1$, προκύπτει το χαοτικό όριο, που δίνεται από τις σχέσεις (2.11), (2.12). Για ενδιάμεσες τιμές του q το αποτέλεσμα είναι μεταξύ 0 και 1, με το χαρακτήρα να είναι περισσότερο χαοτικός, όσο πιο κοντά στο 1 είναι το q .

Για την τελευταία στατιστική, η συνάρτηση που παρεμβάλλεται είναι η [90, 91]

$$P_\nu(y) = A \left(\frac{\nu}{2 \langle y \rangle} \right)^{\nu/2} \frac{y^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-\nu y/2 \langle y \rangle)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (2.18)$$

όπου A είναι και πάλι παράγοντας κλίμακας. Το ν βρίσκεται προσαρμόζοντας τα δεδομένα στη συνάρτηση παρεμβολής (2.18). Η έκφραση δίνει το GOE αποτέλεσμα για $\nu = 1$. Για μικρές τιμές του ν αναμένεται κανονικότητα. Δεν υπάρχει γενική έκφραση για την περίπτωση με πλήρη κανονικότητα.

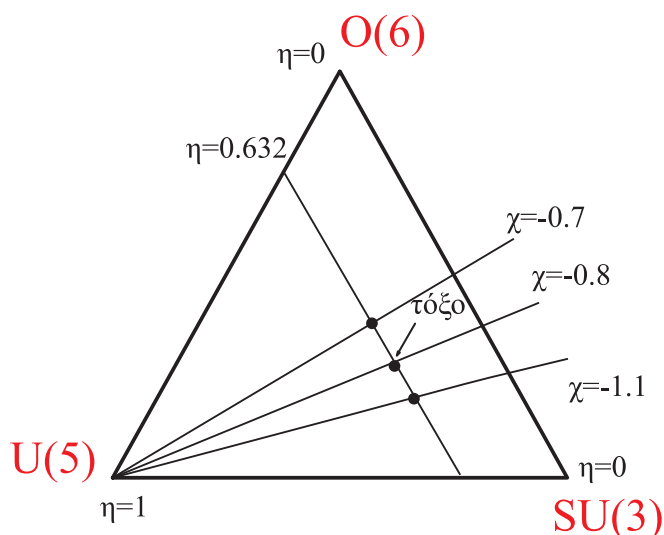
Κεφάλαιο 3

Υπολογισμοί χάους στη Χαμιλτονιανή του IBM

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε τα στατιστικά μέτρα που εισήχθησαν προηγουμένως, προκειμένου να μελετήσουμε την εμφάνιση κανονικότητας στο χάος, μέσα στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM. Η διάδραση μεταξύ κανονικής και χαοτικής συμπεριφοράς στα πλαίσια του IBM, έχει ήδη μελετηθεί, χρησιμοποιώντας τόσο κανονικά, όσο και χαοτικά μέτρα χάους στην πρωτότυπη δουλειά των Alhassid και Whelan [26, 27, 28, 29, 30]. Εξαιτίας υπολογιστικών περιορισμών στον κώδικα, οι συγγραφείς μελέτησαν το κβαντικό χάος, για μικρότερο αριθμό μποζονίων ($N = 25$) σε σχέση με αυτόν που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ και για στροφορμή μεγαλύτερη από $L = 2$, προκειμένου να έχουν τα αποτελέσματά τους στατιστική σημασία. Στη μελέτη τους, είχαν βρει κανονικότητα στα τρία όρια του τριγώνου, καθώς και στην $O(6)$ - $U(5)$ πλευρά του τριγώνου, εξαιτίας της $O(5)$ υποάλγεβρας, που είναι κοινή των δύο παραπάνω συμμετριών. Μακριά από αυτές τις ολοκληρώσιμες περιοχές, αναμενόταν να υπάρχει χαοτική συμπεριφορά. Όμως, η μελέτη του εσωτερικού του τριγώνου του IBM, οδήγησε σε κάποια αινιγματικά αποτελέσματα. Η μελέτη των Alhassid και Whelan έφερε στην επιφάνεια μια περιοχή στο εσωτερικό του τριγώνου, όπου η κανονικότητα αναδύεται μέσα από το χάος [27]. Πρόσφατα, αυτή η περιοχή, που καλείται «τόξο κανονικότητας των Alhassid–Whelan», επιβεβαιώθηκε και πειραματικά [92]. Η μελέτη του τόξου κανονικότητας [93] και της συμμετρίας που εξηγεί την ύπαρξή του, είναι αντικείμενο έρευνας [94, 96, 97]. Θα ασχοληθούμε με αυτό στο επόμενο κεφάλαιο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε κυρίως 0^+ καταστάσεις και πως οι ιδιοτιμές τους και οι μεταβάσεις μεταξύ τους συμπεριφέρονται σε τέσσερα διαφορετικά σημεία του τριγώνου του Casten και ειδικά στο σημείο που βρίσκεται η $SU(3)$ κορυφή, ένα σημείο πάνω στο τόξο κανονικότητας και δύο σημεία πάνω και κάτω από το τόξο. Μελέτη των 0^+ καταστάσεων έχουν κάνει και οι Macek et al. [98], οι οποίοι έδειξαν ότι το μοτίβο που προκύπτει από το μάζεμα των 0^+ κατασκευών στο τόξο κανονικότητας των Alhassid Whelan είναι όμοιο με το μοτίβο κατά μήκος της $O(6) - U(5)$ πλευράς του τριγώνου, υπονοώντας την ύπαρξη υποκείμενης συμμετρίας.

3.1 Αριθμητικά αποτελέσματα

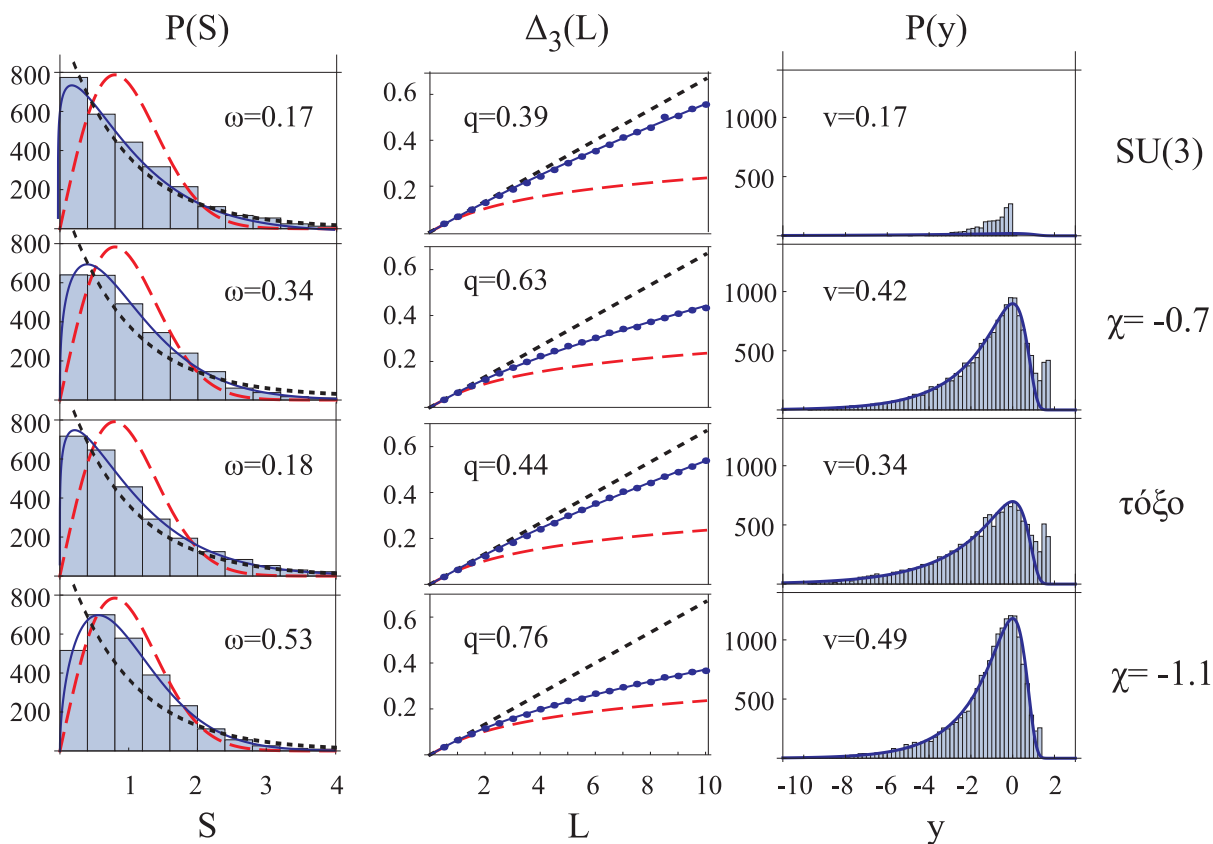
Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν στα τέσσερα διαφορετικά σημεία, όπως αυτά φαίνονται στο Σχήμα 3.1, δηλαδή στην $SU(3)$ κορυφή, σε ένα σημείο πάνω στο τόξο με παραμέτρους $(\eta, \chi) = (0.632, -0.803)$ και δύο τυχαία σημεία με παραμέτρους $(\eta, \chi) = (0.632, -0.7)$ και $(\eta, \chi) = (0.632, -1.1)$. Τα σημεία του τόξου δίνονται από την έκφραση $\chi(\eta) = \frac{\sqrt{7}-1}{2}\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}$, η οποία βρέθηκε υπολογίζοντας τις τιμές του χ συναρτήσει του η , όπου το σ (ένα κλασικό μέτρο χάους) ελαχιστοποιείται [29].



Σχήμα 3.1: Το τρίγωνο συμμετρίας του IBM και τα τέσσερα σημεία που πραγματοποιήθηκαν οι υπολογισμοί.

Προκειμένου να έχουμε καλή στατιστική, χρησιμοποιήσαμε $N = 175$ μποζόνια για τα στατιστικά μέτρα $P(S)$ και $\Delta_3(L)$, τα οποία παράγαγαν $2640 0^+$ καταστάσεις. Για το στατιστικό μέτρο $P(y)$, χρησιμοποιήσαμε $N = 50$ μποζόνια, που παράγαγαν 54756 πιθανές μεταβάσεις, $B(E0)$, μεταξύ των $234 0^+$ καταστάσεων. Ο λόγος που διαλέξαμε $N = 50$ μποζόνια αντί για $N = 175$, ήταν ότι στην τελευταία περίπτωση προκύπτουν περισσότερες από 6000000 πιθανές $B(E0)$ μεταξύ των $2640 0^+$ καταστάσεων, κάτι που καθιστά τον υπολογισμό αδύνατο χρονικά, ενώ για $N = 50$ μποζόνια, ο χρόνος που το πρόγραμμα τρέχει είναι λογικός και ο αριθμός των παραγόμενων $B(E0)$ είναι στατιστικά αρκετός. Οι επιτρεπτές $B(E0)$ διαφέρουν από σημείο σε σημείο στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM και ο αριθμός τους είναι όλο και πιο μεγάλος όσο πιο χαοτικό είναι το σημείο. Το Σχήμα 3.2 δείχνει τα αποτελέσματα για τα τέσσερα σημεία που φαίνονται στο Σχήμα 3.1, που αφορούν τα στατιστικά μέτρα $P(S)$, $\Delta_3(L)$ και $P(y)$. Και τα τρία μέτρα διακυμάνσεων δείχνουν τα ίδια συνεπή αποτελέσματα. Η κορυφή $SU(3)$ είναι το πιο κανονικό σημείο, ακολουθούμενο από το σημείο στο τόξο κανονικότητας, το οποίο φαίνεται να έχει επίσης κανονική συμπεριφορά. Έπειτα, ακολουθούν τα σημεία $\chi = -0.7$, $\chi = -1.1$ τα οποία είναι πράγματι χαοτικά, με το σημείο $\chi = -0.7$ να είναι λιγότερο χαοτικό σε σχέση με το σημείο $\chi = -1.1$. Η προσαρμογή της συνάρτησης

που παρεμβάλλεται, του τελευταίου στατιστικού μέτρου, $P(y)$, στην κορυφή $SU(3)$ είναι μάλλον κακή, πράγμα που αντανακλά το γεγονός ότι η έκφραση (2.18) δεν υπάρχει στο κανονικό όριο για καμία τιμή του ν .



Σχήμα 3.2: Τα αποτελέσματα για τα τέσσερα σημεία που φαίνονται στο Σχήμα 3.1, για $N = 175$ μποζόνια και $L = 0$ καταστάσεις, χρησιμοποιώντας τα μέτρα διακυμάνσεων $P(S)$, $\Delta_3(L)$ και για $N = 50$ μποζόνια για $L = 0$ καταστάσεις, για το μέτρο διακυμάνσεων $P(y)$. Η μαύρη γραμμή δείχνει το κανονικό όριο, η κόκκινη γραμμή το χαοτικό όριο, ενώ η μπλε είναι η προσαρμογή στην κατανομή. Είναι προφανές από τις τιμές των ω , q και ν , ότι η κορυφή $SU(3)$ και το σημείο πάνω στο τόξο είναι κανονικά σε σχέση με τα τυχαία σημεία πάνω και κάτω από το τόξο.

3.2 Μελέτη του χάους στις 0^+ καταστάσεις

3.2.1 Χάος στις 0^+ καταστάσεις συναρτήσεως της ενέργειας

Η μελέτη του χάους συναρτήσεως της ενέργειας έχει ήδη πραγματοποιηθεί κλασικά [30], αλλά όχι κβαντομηχανικά, καθώς ο μικρός αριθμός των μποζονίων που χρησιμοποιούνταν, παρήγαγε μικρό αριθμό καταστάσεων, που δεν επέτρεπε καλή στατιστική. Για $N = 175$ μποζόνια και στροφορμή $L = 0$, ο αριθμός των καταστάσεων είναι 2640, οπότε μπορεί το φάσμα να διαιρεθεί και κάθε μέρος να εξεταστεί κβαντομηχανικά, χωρίς να υπάρχει ανησυχία για τη στατιστική. Στα Σχήματα 3.3 και 3.4 το φάσμα χωρίζεται σε 8 μέρη των 330 καταστάσεων έκαστο. Η διαίρεση του φάσματος σε μέρη ίσου αριθμού καταστάσεων, είναι το ίδιο με τη διαίρεση του φάσματος σε μέρη ίσης ενεργειακής διαφοράς, εξαιτίας της κανονικοποίησης του φάσματος που έχει οδηγήσει στο να είναι η μέση ενεργειακή απόσταση ίση με ένα. Τα αποτελέσματα των ω και q φαίνονται στους Πίνακες 3.1 και 3.2.

Ο βαθμός του χάους δεν είναι σταθερός συναρτήσεως της ενέργειας. Το χαμηλοενεργειακό μέρος του φάσματος (το πρώτο διάστημα) είναι πάντα λιγότερο χαοτικό σε σχέση με τα αμέσως υψηλότερα ενεργειακά μέρη του φάσματος (το δεύτερο και τρίτο διάστημα), όπου η κίνηση γίνεται εμφανώς χαοτική. Σε μεγαλύτερες ενέργειες όμως, το χάος μειώνεται σημαντικά, ενώ η κίνηση γίνεται σχεδόν κανονική στο υψηλότερο μέρος του φάσματος, ακόμη και για το πιο χαοτικό σημείο, $\chi = -1.1$. Αυτή η συμπεριφορά είναι κοινή και στα τρία σημεία που βρίσκονται στη γειτονιά του τόξου. Το $SU(3)$ σημείο όμως, που είναι φυσικά κανονικό, δε μοιάζει να ακολουθεί τη συμπεριφορά των υπόλοιπων σημείων. Πράγματι, η χαοτικότητα πέφτει στο μεσαίο μέρος του φάσματος και αυξάνεται πάλι στο υψηλότερο μέρος, επιδεικνύοντας ακριβώς αντίθετες ιδιότητες, παρότι κατά μέσο όρο το $SU(3)$ σημείο είναι λιγότερο χαοτικό σε σχέση με τα υπόλοιπα, όπως φαίνεται από τις χαμηλές τιμές των ω και q που φαίνονται στο Σχήμα 3.2. Μια ακόμα παρατήρηση είναι ότι το τόξο είναι πάντα λιγότερο χαοτικό, σε όλα τα ενεργειακά διαστήματα, σε σύγκριση με τα σημεία πάνω και κάτω από το τόξο και ότι η χαοτική συμπεριφορά περιορίζεται σε λιγότερα ενεργειακά διαστήματα στο τόξο και την $SU(3)$ κορυφή.

Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε συμφωνία με παλαιότερες μελέτες, που χρησιμοποίησαν κλασικά μέτρα χάους [26, 27, 29, 30], όπου οι συγγραφείς είχαν βρει κανονική κίνηση για χαμηλές ενέργειες, η οποία γίνεται σχεδόν ολοκληρωτικά χαοτική καθώς η ενέργεια αυξάνει. Το ποσό του χάους μειώνεται και πάλι στις πολύ υψηλές ενέργειες. Σε μία μελέτη χάους συναρτήσεως της ενέργειας, στην αναφορά [95], είχε βρεθεί ότι στις ενεργειακές περιοχές του τόξου κανονικότητας, όπου κυριαρχεί η κανονικότητα, υπάρχει ισχυρή παρουσία περιστροφικών ζωνών. Στην αναφορά [98], μελετήθηκαν τομές Poincare, σε τροχιές παράλληλες με το τόξο, για διαφορετικές ενέργειες, όπου η κανονική και η χαοτική κίνηση σχετίζονταν με την παρουσία ή όχι περιοδικών τροχιών β και $\beta\gamma$ δονήσεων. Μεταβολές στην ενέργεια είχαν σαν αποτέλεσμα όχι μόνο τη διάδραση μεταξύ κανονικής και χαοτικής δυναμικής, αλλά και αλλαγές

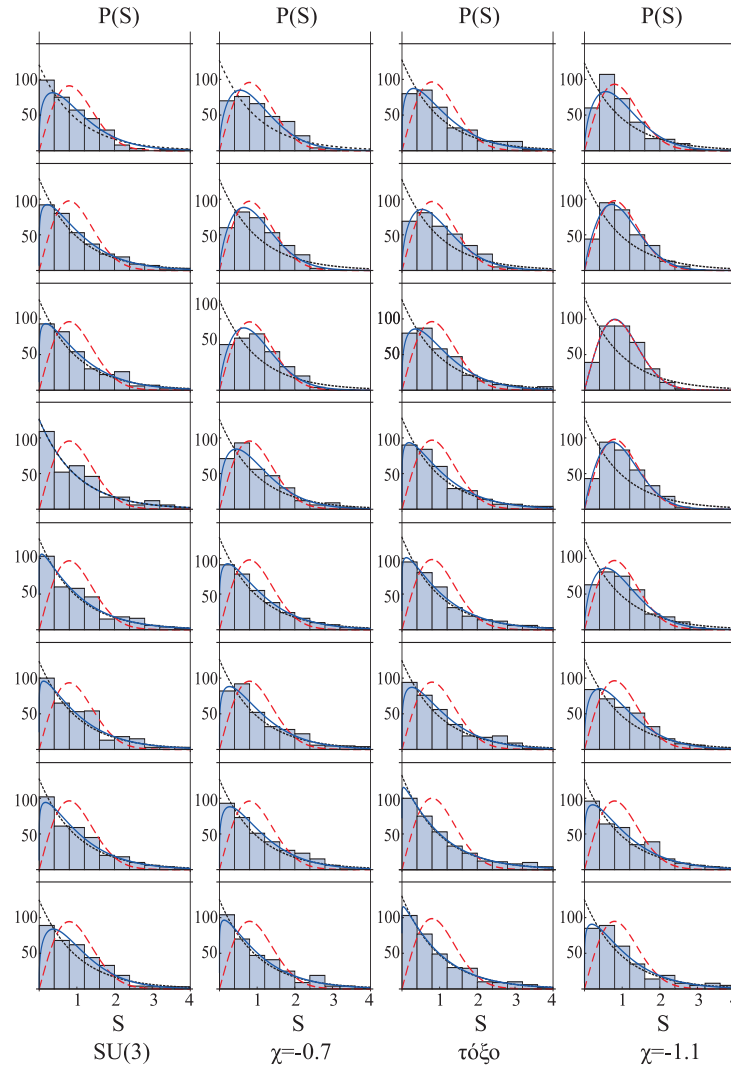
στο είδος των δονήσεων.

Πίνακας 3.1: Αριθμητικά αποτελέσματα του ω , για τα 8 μέρη κάθε φάσματος. Οι καταστάσεις 1-330 ονομάζονται διάστημα 1, οι καταστάσεις 2311-2640 ονομάζονται διάστημα 8.

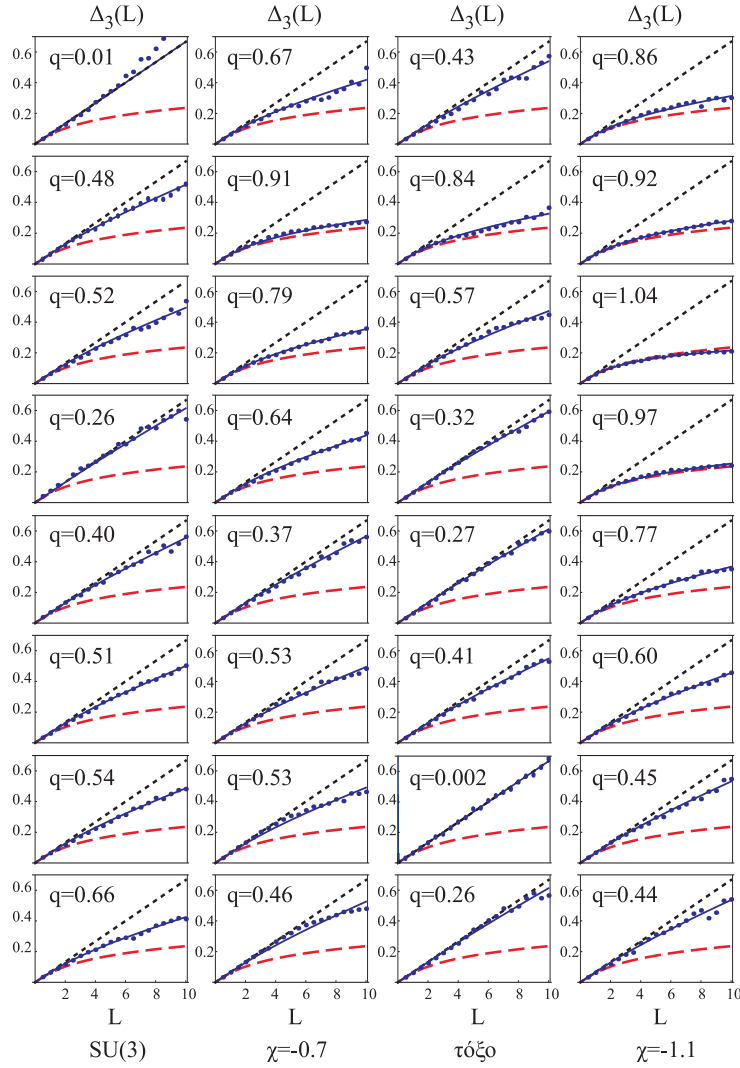
διάστημα	SU(3)	τόξο	$\chi = -0.7$	$\chi = -1.1$
$P(S)$	ω	ω	ω	ω
1	0.30	0.26	0.51	0.54
2	0.17	0.50	0.67	0.82
3	0.14	0.31	0.67	1.02
4	0.00	0.16	0.39	0.85
5	0.06	0.10	0.18	0.54
6	0.10	0.22	0.22	0.35
7	0.14	0.04	0.23	0.18
8	0.32	0.03	0.10	0.16

Πίνακας 3.2: Αριθμητικά αποτελέσματα του q , για τα 8 μέρη του κάθε φάσματος. Οι καταστάσεις 1-330 ονομάζονται διάστημα 1, οι καταστάσεις 2311-2640 ονομάζονται διάστημα 8.

διάστημα	SU(3)	τόξο	$\chi = -0.7$	$\chi = -1.1$
$\Delta_3(L)$	q	q	q	q
1	0.01	0.43	0.67	0.86
2	0.48	0.84	0.91	0.92
3	0.52	0.57	0.79	1.94
4	0.26	0.32	0.64	0.97
5	0.40	0.27	0.37	0.77
6	0.51	0.41	0.53	0.60
7	0.54	0.002	0.53	0.45
8	0.66	0.26	0.46	0.44



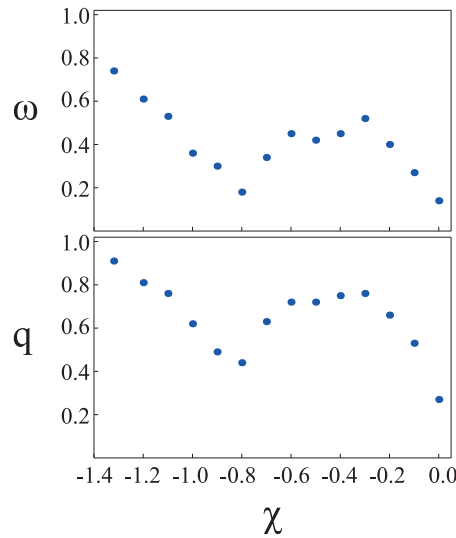
Σχήμα 3.3: Αποτελέσματα για την κατανομή πλησιέστερων γειτόνων $P(S)$, για κάθε μία από τις περιπτώσεις που φαίνονται στο Σχήμα 3.1, για $N=175$ μποζόνια και όταν το σύνολο των $L=0$ καταστάσεων χωρίζεται σε 8 μέρη, 330 καταστάσεων το καθένα. Οι καταστάσεις 1-330, (που ονομάζονται διάστημα 1 στον Πίνακα 3.1) φαίνονται στην κορυφή, ενώ οι καταστάσεις 2311-2640 (που ονομάζονται διάστημα 8 στην Πίνακα 3.1) φαίνονται στο κάτω μέρος.



Σχήμα 3.4: Αποτελέσματα για το μέτρο της φασματικής ακαμψίας, $\Delta_3(L)$, για κάθε μία από τις περιπτώσεις που φαίνονται στο Σχήμα 3.1, για $N=175$ μποζόνια και όταν το σύνολο των $L = 0$ καταστάσεων χωρίζεται σε 8 μέρη, 330 καταστάσεων το καθένα. Οι καταστάσεις 1-330, (που ονομάζονται διάστημα 1 στον Πίνακα 3.2) φαίνονται στην κορυφή, ενώ οι καταστάσεις 2311-2640 (που ονομάζονται διάστημα 8 στην Πίνακα 3.2) φαίνονται στο κάτω μέρος.

3.2.2 Χάος στις 0^+ καταστάσεις συναρτήσει της παραμέτρου χ

Τα αποτελέσματα των χβαντικών στατιστικών παραμέτρων, ω και q , συναρτήσει της παραμέτρου χ , κατά μήκος της $\eta = 0.632$ γραμμής του τριγώνου φαίνονται στο Σχήμα 3.5. Αρχικά, ώντας στην $SU(3)$ - $U(5)$ γραμμή του τριγώνου $((\eta, \chi) = (0.632, -1.32))$ παρατηρείται χαοτική συμπεριφορά, που μειώνεται καθώς φτάνουμε το τόξο κανονικότητας $((\eta, \chi) = (0.632, -0.803))$, όπου παρουσιάζεται ελάχιστο στο βαθμό χαοτικότητας. Εν συνεχεία, καθώς μετακινούμαστε προς μεγαλύτερες τιμές του χ , η χαοτικότητα επανεμφανίζεται, αλλά πάλι δίνει τη θέση της σε κανονική συμπεριφορά, καθώς φτάνουμε την $O(6)$ - $U(5)$ γραμμή του τριγώνου $((\eta, \chi) = (0.632, 0))$, όπου η $O(5)$ συμμετρία προκαλεί ολοκληρωσιμότητα. Αυτά τα αποτελέσματα για τις 0^+ καταστάσεις είναι σε πλήρη συμφωνία με τη δουλειά των Alhassid και Whelan, οι οποίοι βρήκαν την ύπαρξη του τόξου κανονικότητας στο ίδιο σημείο χρησιμοποιώντας $N = 25$ μποζόνια και στροφορμή $L = 10$.

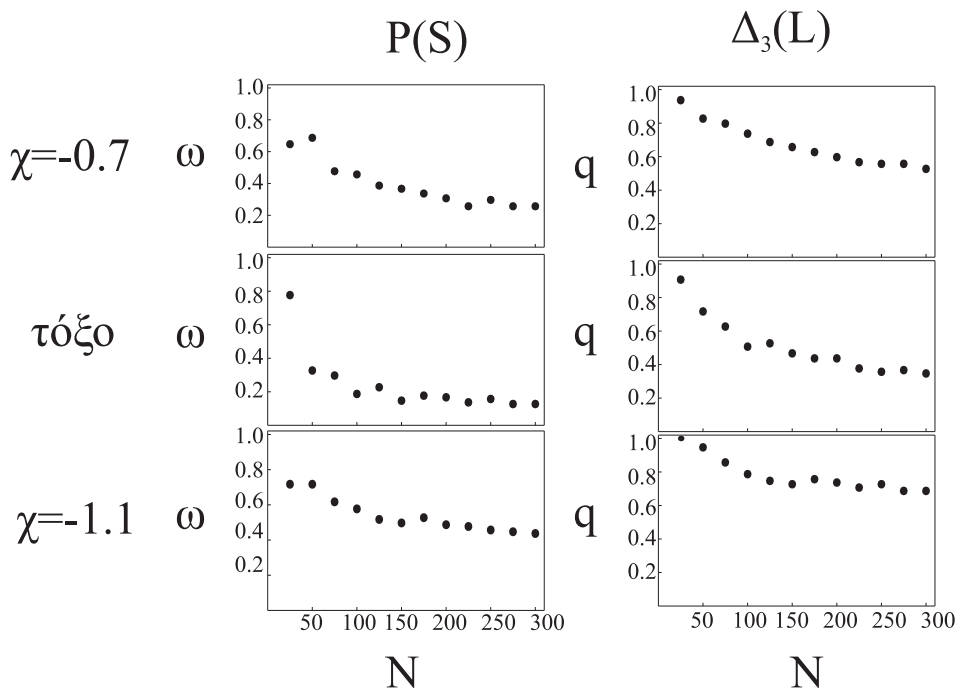


Σχήμα 3.5: Τα αποτελέσματα από τις χβαντικές στατιστικές παραμέτρους ω και q , για διάφορες τιμές του χ κατά μήκος της $\eta = 0.632$ γραμμής του τριγώνου. Οι υπολογισμοί έγιναν για $N = 175$ μποζόνια και στροφορμή $L = 0$.

3.2.3 Χάος στις 0^+ καταστάσεις συναρτήσει του αριθμού των μποζονίων N

Τα αποτελέσματα των χβαντικών στατιστικών παραμέτρων, ω και q , συναρτήσει του αριθμού των μποζονίων N φαίνονται στο Σχήμα 3.6. Μία πρώτη παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι υπάρχει μια απότομη πτώση των τιμών των χβαντικών στατιστικών παραμέτρων καθώς αυξάνει ο αριθμός των μποζονίων N , ενώ για πολύ μεγάλους αριθμούς μποζονίων (μεγαλύτερους από $N = 175$ μποζόνια) η πτώση είναι πολύ μικρή

και οι κβαντικές στατιστικές παράμετροι μοιάζουν να έχουν φτάσει μια σταθερή τιμή. Η αιτία αυτής της πτώσης για μικρές τιμές των μποζονίων, είναι ότι ο αριθμός των καταστάσεων είναι μικρός σε σχέση με μεγαλύτερους αριθμούς μποζονίων, κάτι που επηρεάζει τα στατιστικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, για $N = 25$ μποζόνια, υπάρχουν μόνο 65 καταστάσεις, ενώ για $N = 175$ μποζόνια, υπάρχουν 2640 καταστάσεις, οπότε η στατιστική ανάλυση των ιδιοτιμών έχει μεγαλύτερη αξία στη δεύτερη περίπτωση. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι παρά τη μικρή ή μεγαλύτερη πτώση της τιμής των κβαντικών στατιστικών παραμέτρων συναρτήσει του N , το σημείο πάνω στο τόξο έχει πάντα μικρότερες τιμές σε σχέση με τα άλλα δύο σημεία $\chi = -0.7$ και $\chi = -1.1$ και το σημείο $\chi = -0.7$ είναι πάντα λιγότερο χαοτικό σε σχέση με το σημείο $\chi = -1.1$. Έτσι, καθώς ο αριθμός των μποζονίων αυξάνεται, το τόξο κανονικότητας επιβιώνει και μένει σταθερό σε θέση καθώς αλλάζει το N .



Σχήμα 3.6: Αποτελέσματα των κβαντικών στατιστικών παραμέτρων ω και q , για διάφορες τιμές του N στα τρία σημεία επάνω και γύρω από το τόξο κανονικότητας.

3.3 Μελέτη του χάους στις εντάσεις των μεταβάσεων BE0

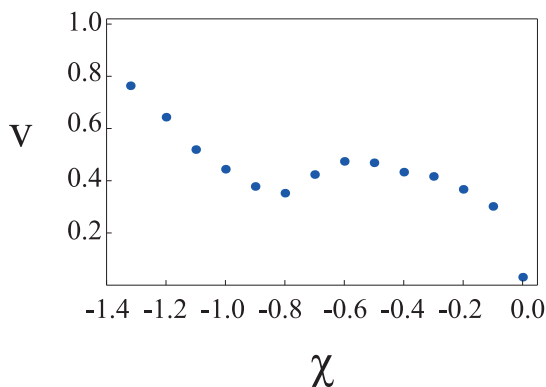
Εκτός από τις φασματικές διακυμάνσεις, η διάδραση μεταξύ χαοτικής και κανονικής συμπεριφοράς μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τις εντάσεις των μεταβάσεων μεταξύ των ενεργειακών επιπέδων του φάσματος, οι στατιστικές διακυμάνσεις των οποίων παρέχουν ένα εξίσου ευαίσθητο μέτρο του βαθμού χαοτικότητας. Σε αυτήν την ενό-

τητα αναλύονται οι εντάσεις των μεταβάσεων $B(E0)$ χρησιμοποιώντας το στατιστικό μέτρο $P(y)$.

3.3.1 Χάος στις εντάσεις των μεταβάσεων $BE0$ συναρτήσει της παραμέτρου χ

Τα αποτελέσματα της χβαντικής στατιστικής παραμέτρου ν , συναρτήσει της παραμέτρου χ , κατά μήκος της γραμμής $\eta = 0.632$ του τριγώνου φαίνονται στο Σχήμα 3.7. Σε αυτούς τους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε $N = 50$ μποζόνια και προέκυψαν 54756 μεταβάσεις $BE0$ μεταξύ των $234 0^+$ καταστάσεων.

Τα αποτελέσματα γενικά δείχνουν την ίδια συμπεριφορά με τα αποτελέσματα από τα στατιστικά μέτρα που εφαρμόστηκαν στις ιδιοτιμές των 0^+ καταστάσεων. Και πάλι, η κανονικότητα του σημείου πάνω στο τόξο είναι εμφανής από το ελάχιστο της καμπύλης στο σημείο $\chi = -0.8$. Χασοτική συμπεριφορά συναντάται στις περιοχές πριν και μετά το τόξο κανονικότητας, ενώ στην $O(6)$ - $U(5)$ γραμμή του τριγώνου $((\eta, \chi) = (0.632, 0))$, η κανονικότητα εμφανίζεται ξανά. Η μελέτη της χασοτικότητας στην κατανομή των εντάσεων των μεταβάσεων των $BE0$ δίνει αποτελέσματα που είναι σε πλήρη συμφωνία με τη μελέτη της χασοτικότητας στην κατανομή των εντάσεων των μεταβάσεων των $BE2$ η οποία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της δουλειάς των Alhassid και Whelan.



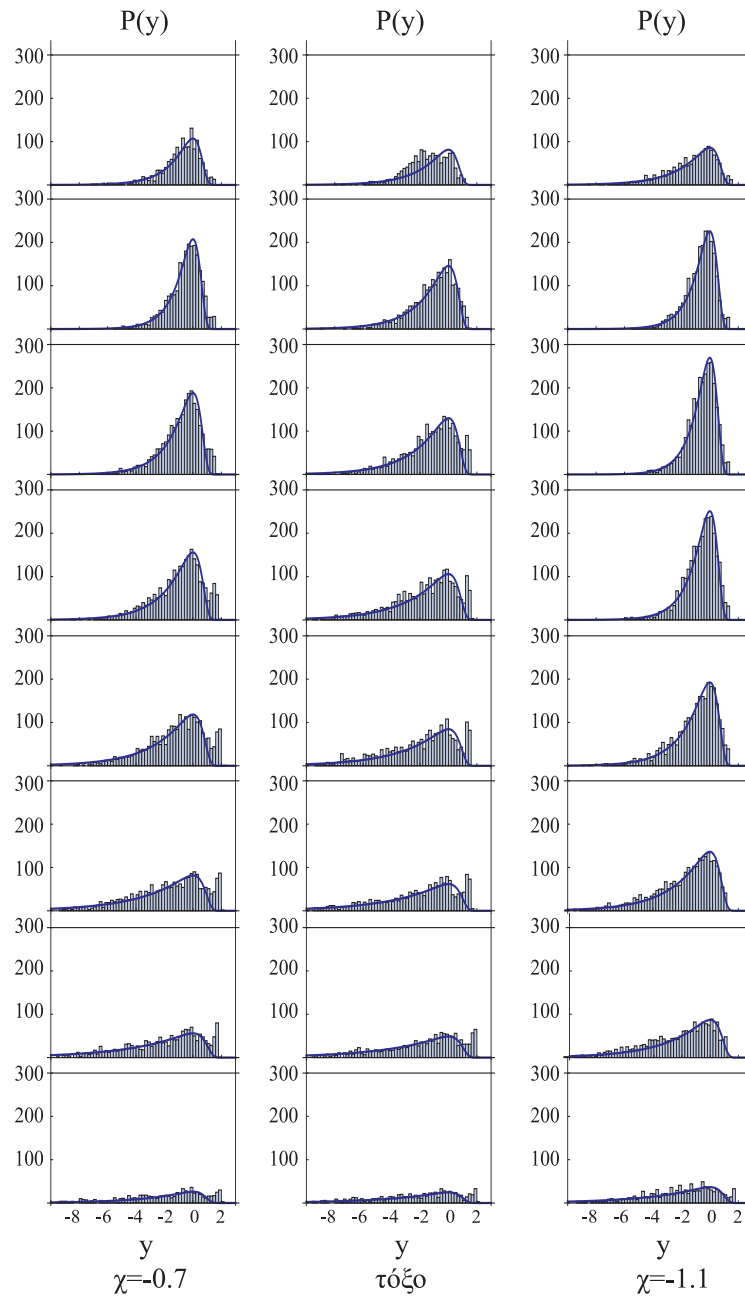
Σχήμα 3.7: Αποτελέσματα της χβαντικής στατιστικής παραμέτρου ν , για διάφορες τιμές του χ κατά μήκος της $\eta = 0.632$ γραμμής του τριγώνου. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν για $N = 50$ μποζόνια και στροφορμή $L = 0$.

3.3.2 Χάος στις εντάσεις των μεταβάσεων $B(E0)$ συναρτήσει της ενέργειας

Σε αυτό το μέρος, θα παρουσιαστεί μια μελέτη του χβαντικού χάους στις μεταβάσεις των εντάσεων μεταξύ των 0^+ καταστάσεων. Ουσιαστικά θα μελετηθεί η χασοτική συμπεριφορά των εντάσεων των $B(E0)$ μεταβάσεων συναρτήσει της ενέργειας. Οι $234 0^+$ καταστάσεις που προκύπτουν από τα $N = 50$ μποζόνια διαιρούνται σε 7 μέρη των 30 καταστάσεων έκαστο και ένα μέρος με 24 καταστάσεις. Το στατιστικό μέτρο $P(y)$

εφαρμόστηκε στις εντάσεις των παραγόμενων $B(E0)$ μεταβάσεων μεταξύ αυτών των $30 0^+$ καταστάσεων, σε κάθε ενεργειακό διάστημα. Το πρώτο ενεργειακό διάστημα, δηλαδή το μέρος με τις καταστάσεις 1-30, φαίνεται στην κορυφή των στηλών, ενώ το τελευταίο ενεργειακό διάστημα, το μέρος με τις καταστάσεις 211-234, φαίνεται στο κάτω μέρος. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 3.3 και στο Σχήμα ;;. Το $SU(3)$ σημείο λείπει από τον Πίνακα 3.3. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για τα σημεία που έχουν κάποια δυναμική συμμετρία, όπως είναι και το $SU(3)$ σημείο, που χαρακτηρίζεται από κανονικότητα, η συνάρτηση παρεμβολής της Εξ. (2.18) δεν προσαρμόζεται καλά, αλλά επίσης έχουν μικρότερο αριθμό παραγόμενων εντάσεων μεταβάσεων $B(E0)$ σε σχέση με άλλα σημεία που χαρακτηρίζονται από χαοτική δυναμική. Έτσι, η μελέτη του χάους συναρτήσει τις ενέργειας στο $SU(3)$ όριο, χρησιμοποιώντας $N = 50$ μποζόνια ήταν στατιστικά αδύνατη.

Και πάλι, ο βαθμός χαοτικότητας δεν είναι ομοιόμορφος συναρτήσει της ενέργειας. Το χαμηλοενεργειακό μέρος του φάσματος (το πρώτο ενεργειακό διάστημα) είναι πάντα λιγότερο χαοτικό σε σχέση με τα αμέσως υψηλότερα ενεργειακά μέρη του φάσματος (το δεύτερο ενεργειακό διάστημα), όπου η κίνηση γίνεται εμφανώς χαοτική. Παρόλα αυτά, σε υψηλότερες ενέργειες ο βαθμός του χάους μειώνεται σημαντικά, ενώ στο υψηλότερο μέρος του φάσματος επικρατεί κανονικότητα, ακόμα και για το πιο χαοτικό σημείο, $\chi = -1.1$. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι κοινή και στα τρία σημεία που βρίσκονται στη γειτονιά του τόξου κανονικότητας. Για ακόμη μια φορά, το σημείο στο τόξο επιδεικνύει λιγότερη χαοτικότητα, σε όλα τα ενεργειακά δαστήματα, σε σχέση με τα σημεία πάνω και κάτω από το τόξο, ενώ η χαοτική συμπεριφορά περιορίζεται σε λιγότερα ενεργειακά διαστήματα στο τόξο. Αυτό όμως που είναι πολύ ενδιαφέρον, είναι ότι η μελέτη της κβαντικής χαοτικής δυναμικής, τόσο στις εντάσεις των μεταβάσεων, όσο και στο φάσμα των 0^+ καταστάσεων, δείχνουν συνέπεια στο βαθμό χαοτικότητας συναρτήσει της ενέργειας. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει μια απότομη αύξηση του βαθμού χαοτικότητας καθώς περνάμε το χαμηλοενεργειακό μέρος του φάσματος, που αντικαθίσταται από κανονικότητα στο υψηλότερα ενεργειακά μέρη του φάσματος.



Σχήμα 3.8: Αποτελέσματα για το στατιστικό μέτρο, $P(y)$, για κάθε μία από τις περιπτώσεις που φαίνονται στο Σχήμα 3.1, για $N=50$ μποζόνια και όταν το σύνολο των 234 $L = 0$ καταστάσεων χωρίζεται σε 7 ομάδες των 30 καταστάσεων και μία των 24 καταστάσεων. Οι καταστάσεις 1-30, (ονομάζονται διάστημα 1 στον Πίνακα 3.3) φαίνονται στην κορυφή, ενώ οι καταστάσεις 211-234 (ονομάζονται διάστημα 8 στον Πίνακα 3.3) φαίνονται στο κάτω μέρος.

Πίνακας 3.3: Αριθμητικά αποτελέσματα για το ν , για τα 8 μέρη κάθε φάσματος. Οι καταστάσεις 1-30 ονομάζονται διάστημα 1, οι καταστάσεις 211-234 ονομάζονται διάστημα 8.

διάστημα	τόξο	$\chi = -0.7$	$\chi = -1.1$
$P(y)$	ν	ν	ν
1	0.40	0.62	0.44
2	0.48	0.81	0.84
3	0.39	0.60	0.87
4	0.32	0.49	0.77
5	0.29	0.35	0.54
6	0.23	0.26	0.37
7	0.21	0.21	0.30
8	0.21	0.27	0.22

Κεφάλαιο 4

Εξαγωγή με αναλυτικό τρόπο μιας προσεγγιστικής $SU(3)$ συμμετρίας στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την εμφάνιση κανονικότητας μέσα στο χάος στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM, εφαρμόζοντας στατιστικά μέτρα χάους σε σημεία γύρω από το τόξο κανονικότητας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το τόξο κανονικότητας είναι μια ημικανονική περιοχή μέσα στο τρίγωνο συμμετρίας, που βρέθηκε από τους Alhassid και Whelan [99, 100], χρησιμοποιώντας τόσο κλασικά, όσο και κβαντικά μέτρα χάους, της οποίας η υποκείμενη συμμετρία είναι άγνωστη.

Οι συγγραφείς της αναφοράς [101] χρησιμοποίησαν την έννοια της εντροπίας της κυματοσυνάρτησης, για να ποσοτικοποιήσουν την παρέκκλιση μεταβατικών IBM-1 Χαμιλτονιανών από τις δυναμικές συμμετρίες του προτύπου. (Στα πλαίσια του IBM-1, η εντροπία της κυματοσυνάρτησης είναι ένα μέτρο που ποσοτικοποιεί τον εντοπισμό των ιδιοκαταστάσεων μιας συγκεκριμένης μεταβατικής IBM-1 Χαμιλτονιανής σε μία βάση μιας δεδομένης δυναμικής συμμετρίας. Το χάος εγκαθιδρύεται καθώς ο βαθμός του εντοπισμού των ιδιοκαταστάσεων στη βάση μιας δεδομένης δυναμικής συμμετρίας μειώνεται.) Έχουν βρει ότι πάνω στο τόξο κανονικότητας, υπάρχει πράγματι αυξημένος εντοπισμός στις βάσεις των τριών δυναμικών συμμετριών. Όμως, δεν μπορούσαν να δώσουν μία εξήγηση αυτής της συμπεριφοράς. Εμπειρικά, έχει βρεθεί ότι [92] η γραμμή που αντιστοιχεί στον εκφυλισμό των κεφαλών των ζωνών β_1 και γ_1 ($2_{\gamma_1}^+ = 0_{\beta_1}^+$) ακολουθεί από κοντά το τόξο κανονικότητας και έχουν επίσης εντοπιστεί 12 πυρήνες που επιδεικνύουν αυτήν τη συμπεριφορά. Πρόσφατα, έγινε κατανοητό [102] ότι ο γεωμετρικός τόπος του $2_{\gamma_1}^+ = 0_{\beta_1}^+$ εκφυλισμού ακολουθεί τη γραμμή αλλαγής σταθερότητας των γ δονήσεων στις χαμηλές ενέργειες.

Η παρουσία (ημι)κανονικότητας προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιας υποκείμενης (προσεγγιστικής) συμμετρίας. Μετά από μία εκτενή ανάλυση του χαμηλού μέρους του φάσματος στην αναφορά [96], προτάθηκε ότι η υποκείμενη συμμετρία του τόξου είναι

μία SU(3) QDS. Ένα χαρακτηριστικό της SU(3) είναι οι εκφυλισμοί μεταξύ των επιπέδων της β ζώνης και των επιπέδων, με ίδιο άρτιο L , της γ ζώνης. Οι συγγραφείς, κρατώντας σταθερό το η και μεταβάλλοντας το χ , προσπάθησαν να βρουν το σημείο όπου $E(2_\beta^+) = E(2_\gamma^+)$. Με αυτήν τη διαδικασία βρήκαν έναν γεωμετρικό τόπο σημείων, όπου όχι μόνο ίσχυε η συνθήκη $E(2_\beta^+) = E(2_\gamma^+)$, αλλά σε αυτόν τον γεωμετρικό τόπο επίσης ίσχυε ότι $E(L_\beta^+) = E(L_\gamma^+)$, που είναι οι ίδιοι εκφυλισμοί που χαρακτηρίζουν την SU(3). Επίσης, όχι μόνο οι β και γ ζώνες, αλλά όλες οι χαμηλοενεργειακές ζώνες είχαν με άριστη προσέγγιση, τους ίδιους εκφυλισμούς που έχει και η SU(3). Αυτός ο γεωμετρικός τόπος σημείων, βρίσκεται πολύ κοντά στο τόξο και για $N=250$ έχει εύρος από $(\eta, \chi) \sim (0.8, -0.5)$ μέχρι $(0, -1.32)$, στην SU(3) κορυφή, με ασθενή εξάρτηση από το N , με εξαίρεση κοντά στην περιοχή συνύπαρξης φάσεων [23] (την περιοχή που χωρίζει τα σφαιρικά από τα ωσειδή παραμορφωμένα σχήματα). Αυτό το αποτέλεσμα επεκτείνει την έννοια της μερικώς δυναμικής συμμετρίας (QDS), που εισήχθη αρχικά στα [103, 104, 105, 106, 107] για την περιγραφή της επιμονής των οριακών συμμετριών κατά μήκος των U(5)-O(6) και U(5)-SU(3) ποδιών του τριγώνου του IBM, στο εσωτερικό του τριγώνου. Ο περιοχή που ισχύει η SU(3) QDS στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM έχει εξεταστεί και με τεχνικές μέσου πεδίου [108]. Η ανάλυση της αναφοράς [96] περιορίστηκε στο χαμηλοενεργειακό μέρος του φάσματος, ενώ η κανονικότητα εν τω μέσω της χαοτικότητας βρέθηκε από τους Alhassid και Whelan μέσα από τη μελέτη ολόκληρου του φάσματος [99, 100]. Πρόσφατα, έχουν μελετηθεί στα πλαίσια του IBM, οι ιδιότητες των υψηλοενεργειακών περιστροφικών ζωνών που χτίζονται σε αξονικά παραμορφωμένες θεμελιώδεις καταστάσεις [95] δείχνοντας σημάδια μιας SU(3) QDS που εκτείνεται στο υψηλότερο μέρος του φάσματος του IBM. Οι συγγραφείς μελέτησαν την παρουσία περιστροφικών ζωνών σε χαμηλοενεργειακούς, μεσαίους και υψηλοενεργειακούς τομείς και πως αυτή σχετίζεται με την εμφάνιση κανονικότητας. Βρήκαν ότι το κανονικό μέρος του φάσματος «κατοικείται» από περιστροφικές ζώνες που ομοιάζουν στην SU(3). Βρήκαν επίσης αυξημένη κανονικότητα στο τόξο, ακόμα και στις υψηλότερες προσβάσιμες ενέργειες $E \approx E_{max}$, που συνοδευόταν από υψηλή παρουσία περιστροφικών ζωνών.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα εξάγουμε με αναλυτικό τρόπο μία γραμμή που βασίζεται σε μία προσεγγιστική SU(3) συμμετρία μέσα στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM. Η εξαγωγή της γραμμής βασίζεται σε αυτήν την ιδέα: Προκειμένου να έχουμε SU(3) συμμετρία, η Χαμιλτονιανή του IBM θα πρέπει να μετατίθεται με τους γεννήτορες της SU(3). Ο αναλυτικός προσδιορισμός της προσεγγιστικής συμμετρίας εκμεταλλεύεται τη γνωστή συστολή [109] της SU(3) άλγεβρας προς την $[R^5]SO(3)$ άλγεβρα [110, 111]. Ακόμη, χρησιμοποιώντας τη συστολή της O(6) προς την $[R^5]SO(5)$ άλγεβρα [112, 113] του γ -ασταθούς περιστροφέα, αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει γραμμή που να σχετίζεται με την ύπαρξη O(6) συμμετρίας στο τρίγωνο. Για μια λεπτομερή ανάλυση της μεθόδου της συστολής των Inönü - Wigner και της αναλυτικής εξαγωγής των συστολών της SU(3) άλγεβρας προς την $[R^5]SO(3)$ άλγεβρα και της O(6) προς την $[R^5]SO(5)$ άλγεβρα, ο αναγνώστης μπορεί να δει τα παραρτήματα E, Z, και H.

4.1 Η SU(3) συμμετρία

Σε αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων στον οποίο η Χαμιλτονιανή του IBM μετατίθεται με τους γεννήτορες της SU(3). Χάρην ευκολίας, η Χαμιλτονιανή του IBM δίνεται ξανά

$$\hat{H}(\eta, \chi) = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = c \left[\eta \hat{n}_d - \frac{\eta - 1}{N} \hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)} \right], \quad (4.1)$$

όπου οι τελεστές \hat{n}_d και $\hat{Q}_\chi^{(2)}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{n}_d = d^\dagger \cdot \tilde{d} = \sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})^{(0)}, \quad (4.2)$$

$$\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)_\xi^{(2)} + \chi (d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}. \quad (4.3)$$

Η SU(3) άλγεβρα [6] παράγεται από τους τελεστές της στροφορμής

$$\hat{L}_\xi = \sqrt{10}(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(1)}, \quad (4.4)$$

και τους τετραπολικούς τελεστές

$$\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)} = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)_\xi^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}. \quad (4.5)$$

4.1.1 Σχέσεις μετάθεσης

Το πρώτο βήμα είναι να δούμε αν η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με τους τελεστές της στροφορμής, \hat{L}_ξ . Η Χαμιλτονιανή πράγματι μετατίθεται με τους \hat{L}_ξ , εκ κατασκευής. Το επόμενο βήμα είναι να εξεταστούν οι ειδικές συνθήκες κάτω από τις οποίες η Χαμιλτονιανή μετατίθεται (προσεγγιστικά) με τους τετραπολικούς τελεστές. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις σχέσεις μετάθεσης, χρησιμοποιείται μια ειδική έκφραση, που βρίσκεται στο [6], Εξ. (2.6) ή στο [15], Εξ. (7.51). Τα γινόμενα των μπόζονικών τελεστών δημιουργίας (b_l^\dagger) και καταστροφής (\tilde{b}_l) γράφονται σε συζευγμένη μορφή, ως

$$G_\kappa^{(k)}(l, l') = [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_\kappa^{(k)}, \quad (l, l' = 0, 2). \quad (4.6)$$

Για λόγους ευκολίας, συνήθως το σύμβολο \times παραλείπεται και οι αγχύλες αντικαθίστανται από παρενθέσεις, οπότε προκύπτει, $G_\kappa^{(k)}(l, l') = (b_l^\dagger \tilde{b}_{l'})_\kappa^{(k)}$. Τελικά, οι σχέσεις μετάθεσης των τελεστών της Εξ. (4.6) είναι

$$[G_\kappa^{(k)}(l, l'), G_{\kappa'}^{(k')}(l'', l''')] = \sum_{k'', \kappa''} \sqrt{(2k+1)(2k'+1)(k\kappa k' \kappa' | k'' \kappa'')} (-1)^{k-k'} \left[(-1)^{k+k'+k''} \begin{Bmatrix} k & k' & k'' \\ l''' & l & l' \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} G_{\kappa''}^{(k'')}(l, l''') - \begin{Bmatrix} k & k' & k'' \\ l''' & l' & l \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} G_{\kappa''}^{(k'')}(l''', l') \right]. \quad (4.7)$$

Οι σχέσεις μετάθεσης που χρειάζονται για αυτήν τη δουλειά, καθώς και μερικά παραδείγματα υπολογισμού σχέσεων μετάθεσης παρατίθενται στο παράρτημα Β. Ο μεταθέτης του πρώτου όρου της Χαμιλτονιανής με τους τετραπολικούς τελεστές δίνει

$$[\hat{H}_1, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = c\eta[\hat{n}_d, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = c\eta(d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}. \quad (4.8)$$

Για το μεταθέτη του δεύτερου όρου της Χαμιλτονιανής με τους τετραπολικούς τελεστές,

$$[\hat{H}_2, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = c \frac{\eta - 1}{N} [\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}], \quad (4.9)$$

το βαθμωτό γινόμενο ξαναγράφεται $\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}$ ως ([6], Εξ. (1.14))

$$\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} \cdot \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} = \sum_{\xi} (-1)^\xi \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} \quad (4.10)$$

και επίσης χρησιμοποιούμε την

$$\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} = \hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)} + \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) (d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)} \quad (4.11)$$

και φυσικά την,

$$\hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} = \hat{Q}_{SU(3),-\xi}^{(2)} + \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) (d^\dagger \tilde{d})_{-\xi}^{(2)} \quad (4.12)$$

για να πάρουμε το ενδιαμέσο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] &= \sum_{\xi} (-1)^\xi \left\{ [\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} + \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [\hat{Q}_{SU(3),-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \right. \\ &\quad \left. + \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \left\{ [(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} + \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [(d^\dagger \tilde{d})_{-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \right\} \right\}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας αναλυτικά τους μεταθέτες της (4.13) και χρησιμοποιώντας τα ταυσιτικά γινόμενα

$$[T^{(k_1)} \times T^{(k_2)}]_q^{(k)} = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}, \quad (4.14)$$

(για λεπτομέρειες του υπολογισμού βλέπε παράρτημα Δ), η Εξ. (4.13) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] &= \frac{3\sqrt{15}}{4} [((d^\dagger \tilde{d})^{(1)} \hat{Q}_x^{(2)})_\nu^{(2)} - (\hat{Q}_x^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})^{(1)})_\nu^{(2)}] \\ &\quad + \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) [((d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})^{(2)} \hat{Q}_\chi^{(2)})_\nu^{(2)} + (\hat{Q}_\chi^{(2)} (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})^{(2)})_\nu^{(2)}] \end{aligned}$$

$$+ \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \sum_{k=1,3} \sqrt{35(2k+1)} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} [((d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \hat{Q}_\chi^{(2)})_\nu^{(2)} - (\hat{Q}_\chi^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})^{(k)})_\nu^{(2)}]. \quad (4.15)$$

Προκειμένου να βρεθούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η Χαμιλτονιανή της Εξ. (4.1) μετατίθεται με τους γεννήτορες της SU(3), εκμεταλλευόμαστε μία απλοποίηση της Εξ. (4.13) που συμβαίνει στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N . Σε αυτό το όριο, η έκφραση των ιδιοτιμών του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της SU(3) [βλέπε Εξ. (77)] ελαττώνεται στον όρο λ^2 για μ.α.α. της SU(3) (λ, μ) με $\lambda \gg \mu$. Τότε, η ζώνη θεμελιώδους κατάστασης, που ανήκει στη $(2N, 0)$ μ.α.α., απομονώνεται ενεργειακά από όλες τις υπόλοιπες διεγέρσεις. Αυτή η κατάσταση, είναι γνωστή ως συστολή της SU(3) στην $R^5[\text{SO}(3)]$ [110, 111] και συμβαίνει όταν οι τετραπολικόι τελεστές $Q_{SU(3)}^{(2)}$ αντικαθίστανται από ποσότητες που μετατίθενται αμοιβαία. (Για μία αναλυτική εξήγηση, βλέπε στο παράρτημα Z τη συζήτηση που οδηγεί στην Εξ. (80).) Αν οι τελεστές $Q_{SU(3)}^{(2)}$ μπορούν να προσεγγιστούν από ποσότητες που μετατίθενται αμοιβαία, οι Εξ. (4.13) και (4.15) απλοποιούνται αρκετά.

Στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , όπου συμβαίνει η συστολή, οι μεταθέτες στους δύο πρώτους όρους της Εξ. (4.13) εξαλείφονται. Επίσης, ο πρώτος όρος της Εξ. (4.15) εξαλείφεται και αυτός, καθώς προέρχεται από αυτούς τους μεταθέτες. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα, καθώς, στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , η διαγραφή του μεταθέτη,

$$[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = \frac{15}{4} (2\xi 2\nu | 1\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(1)} \quad (4.16)$$

υποδηλώνει ότι οι όροι που περιέχουν τους $(d^\dagger \tilde{d})^{(1)}$ μπορούν να αγνοηθούν. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό ποιοτικά, ως συνέπεια της σχετικής κυριαρχίας των s μποζονίων επί των d μποζονίων στη ζώνη θεμελιώδους κατάστασης, ειδικά για τις σχετικά χαμηλοενεργειακές καταστάσεις στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N .

Άλλη απλοποίηση που συμβαίνει στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N είναι ότι οι όροι που περιέχουν τα $(d^\dagger \tilde{d})^{(k)}$ μπορούν να παραλειφθούν. Ακόμη, οι τελεστές $\hat{Q}_\chi^{(2)}$ μπορούν να αντικατασταθούν από τους τελεστές $\hat{Q}_{SU(3)}^{(2)}$, καθώς, όπως φαίνεται και στην Εξ. (4.11), αυτοί διαφέρουν μόνο ως προς τους όρους $(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$, που είναι μικροί. Επιπλέον, σε αυτό το όριο, ο τελεστής $\hat{Q}_{SU(3)}^{(2)}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ενδογενή τετραπολική ροπή, που είναι βαθμωτό μέγεθος, που παίρνει την τιμή, $N\sqrt{2}$ στην παρούσα περίπτωση (βλέπε παράρτημα Z). Αυτό το αποτέλεσμα είναι ίσως πιο οικείο στα πλαίσια της γνωστής ιδιότητας της SU(3) συμμετρίας, ότι η μετάβαση, $B(E2 : 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ αυξάνει κατά N^2 [6], δηλαδή η συλλογικότητα των γραστ μεταβάσεων αυξάνει τετραγωνικά με τον αριθμό των μποζονίων, N . Έτσι, στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων, N μένει μόνο

$$[\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = 2\sqrt{2}N \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}. \quad (4.17)$$

Δηλαδή, στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , ο μεταθέτης για το δεύτερο

μέρος της Χαμιλτονιανής είναι ο

$$[\hat{H}_2, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = c(\eta - 1)2\sqrt{2} \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}. \quad (4.18)$$

Συνολικά, ο μεταθέτης του πρώτου και δεύτερου μέρους της Χαμιλτονιανής με τους τετραπολικούς τελεστές δίνει

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] &= [\hat{H}_1 + \hat{H}_2, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \\ &= \left(c\eta + c(\eta - 1)2\sqrt{2} \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \right) (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Προκειμένου να εξαλειφθεί ο μεταθέτης, οι συντελεστές θα πρέπει να ακυρώνονται, οδηγώντας στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , στη συνθήκη

$$\chi(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\eta}{(1 - \eta)} - \frac{\sqrt{7}}{2}. \quad (4.20)$$

Όταν το χ παίρνει τιμές μεταξύ $-\sqrt{7}/2$ και 0, η παράμετρος η παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 0.789. Από τους τύπους που αναφέρθηκαν στην αναφορά [92] και [114] είναι φανερό ότι η κρίσιμη γραμμή στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , αντιστοιχεί σε $\eta_{crit} = 0.8$ για $\chi = 0$ και σε $\eta_{crit} = 9/11 = 0.818$ για $\chi = -\sqrt{7}/2$. Έτσι, η γραμμή που περιγράφεται στην Εξ. (4.20) δεν μπορεί να φτάσει την κρίσιμη γραμμή, περιοριζόμενη στην περιοχή μεταξύ της κρίσιμης γραμμής και της SU(3) κορυφής.

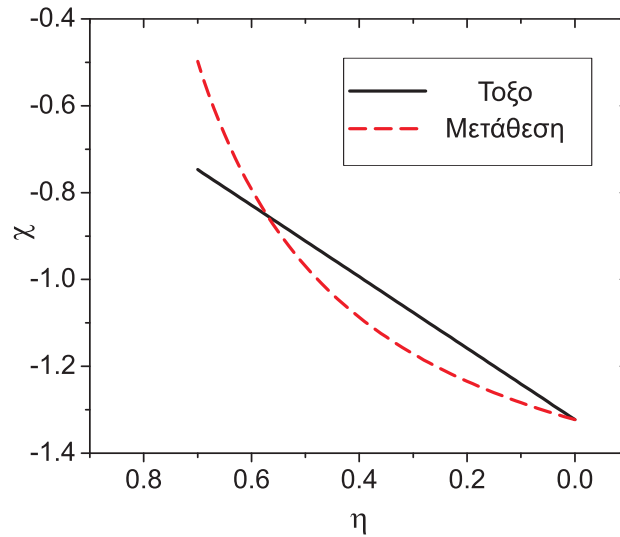
Θα πρέπει εδώ να υπενθυμίσουμε ότι για το τόξο κανονικότητας των Alhassid και Whelan [27, 29] έχει βρεθεί μια προσεγγιστική έκφραση στην αναφορά [93]:

$$\chi(\eta) = \frac{\sqrt{7} - 1}{2} \eta - \frac{\sqrt{7}}{2}. \quad (4.21)$$

Η ομοιότητα των δύο γραμμών των Εξ. (4.20) και (4.21) φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχήμα 4.1. Πράγματι, οι δύο εξισώσεις δίνουν αρκετά όμοιες προβλέψεις για τιμές του η μεταξύ 0 και 0.6, δηλαδή από την SU(3) κορυφή, μέχρι πολύ κοντά στην κρίσιμη γραμμή.

Το τρίγωνο συμμετρίας του IBM στην παραμετροποίηση των Alhassid-Whelan φαίνεται στο Σχήμα 4.2(α), μαζί με το τόξο που αντιστοιχεί στην Εξ. (4.21) και τη γραμμή της Εξ. (4.20). Επίσης φαίνεται και η γραμμή του $E(2_\beta^+) = E(2_\gamma^+)$, εκφυλισμού που βρέθηκε στην αναφορά [96], (στα δεξιά της κρίσιμης γραμμής) για σύγκριση.

Βλέπουμε ότι η παρούσα γραμμή παραμένει πολύ κοντά, τόσο στη γραμμή του $E(2_\beta^+) = E(2_\gamma^+)$ εκφυλισμού, όσο και στην αρχική γραμμή του τόξου, από την SU(3) κορυφή, μέχρι πολύ κοντά στην κρίσιμη περιοχή, όπου τόσο η γραμμή του εκφυλισμού $E(2_\beta^+) = E(2_\gamma^+)$, όσο και η παρούσα γραμμή στρίβουν προς τα πάνω, αποφεύγοντας να συναντήσουν στην κρίσιμη γραμμή.



Σχήμα 4.1: Η θέση του τόξου κανονικότητας, όπως περιγράφεται στην Εξ. (4.21) και όπως προβλέπεται από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, Εξ. (4.20). Ο άξονας η έχει αναστραφεί, προκειμένου να αντιστοιχεί απευθείας στο Σχήμα 4.2.

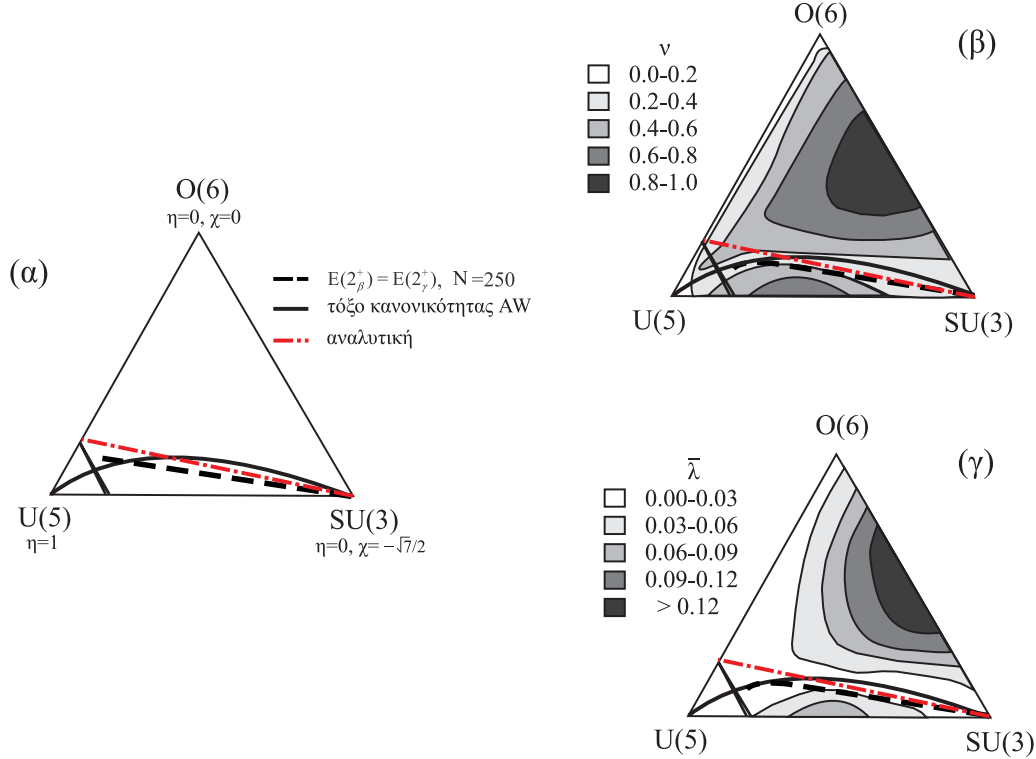
Στα σχήματα 4.2(β) και 4.2(γ), παρουσιάζονται τα ν και $\bar{\lambda}$ (ν είναι η κβαντική στατιστική παράμετρος που εισήχθηκε στην ενότητα 2.4 και $\bar{\lambda}$ είναι το μέσο, κυρίως αρχο εκθετικό Lyapunov, που χρησιμοποιείται για να ποσοτικοποιηθεί ο βαθμός του κλασικού χάους) διαγράμματα από την αναφορά [29], όπου πάνω έχουν σχεδιαστεί και οι γραμμές του Σχήματος 4.2(α). Βλέπουμε ότι η παρούσα γραμμή παραμένει στην κοιλάδα που αντιστοιχεί στο τόξο κανονικότητας από την SU(3) κορυφή, μέχρι την κρίσιμη γραμμή και στρίβει προς τα πάνω λίγο πριν τη φτάσει.

Θα πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η παρούσα μελέτη διευκολύνεται αρκετά από το γεγονός ότι η θέση του τόξου κανονικότητας φαίνεται να παραμένει σταθερή και πρακτικά ανεξάρτητη από τον αριθμό των μποζονίων, όπως έχει ήδη βρεθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας τα στατιστικά μέτρα χάους και όπως έχει ήδη σημειωθεί στις αναφορές [27, 29] και επιβεβαιωθεί στην αναφορά [96].

Συνοπτικά, έχουμε πετύχει δύο στόχους:

(1) Να αποδείξουμε με αναλυτικό τρόπο την ύπαρξη μιας γραμμής στον παραμετρικό χώρο του IBM, κατά μήκος της οποίας η Χαμιλτονιανή μετατίθεται προσεγγιστικά με τους γεννήτορες της SU(3) συμμετρίας, στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N .

(2) Να αποδείξουμε ότι αυτή η γραμμή ακολουθεί το τόξο κανονικότητας των Alhassid-Whelan στην περιοχή μεταξύ της SU(3) κορυφής και της κρίσιμης γραμμής της πρώτης τάξης αλλαγής φάσης/σχήματος.



Σχήμα 4.2: Το τρίγωνο συμμετρίας του IBM στην παραμετροποίηση της Εξ. (4.1), με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες, το τόξο κανονικότητας των Alhassid-Whelan, Εξ. (4.21) και την παρούσα γραμμή της Εξ. (4.20) με την ονομασία αναλυτική. Η περιοχή συνύπαρξης φάσεων μεταξύ σφαιρικών και παραμορφωμένων σχημάτων φαίνεται ανάμεσα στις λοξές γραμμές, κοντά στη $U(5)$ κορυφή. Επιπλέον, φαίνεται και ο γεωμετρικός τόπος των εκφυλισμών $E(2_{\beta}^{+}) = E(2_{\gamma}^{+})$, η μάρνη διακεκομμένη γραμμή στα δεξιά, που αντιστοιχεί στις $SU(3)$ ψευδοδυναμικές συμμετρίες που συζητήθηκαν στην αναφορά [96]. Στα πλαίσια (β) και (γ), φαίνονται τα ν και $\bar{\lambda}$ διαγράμματα, βασισμένα στην αναφορά [100].

4.2 Η $\overline{SU(3)}$ συμμετρία

Τίθεται τώρα το ερώτημα για το τι συμβαίνει στο τρίγωνο που κατασκευάζεται από τις $U(5)$, $O(6)$ και $\overline{SU(3)}$ [6] συμμετρίες, με την τελευταία να είναι η άλγεβρα που περιέχει τους τετραπολικούς τελεστές με $\chi = +\sqrt{7}/2$, που είναι γνωστό ότι αντιστοιχεί σε παραμορφωμένους ως προς τους πόλους πυρήνες, ενώ η $SU(3)$ σχετίζεται με ωσειδείς πυρήνες.

Προκύπτει ότι ο σχετικός υπολογισμός ακολουθεί τα ίδια βήματα με τα παραπάνω, με δύο μόνο σημαντικές διαφορές:

(1) Το $-\sqrt{7}/2$ αντικαθίστανται από το $+\sqrt{7}/2$ παντού.

2) Η εγγενής τετραπολική ροπή αλλάζει πρόσημο (βλέπε παράρτημα Z), σε συμφωνία με το ότι η εγγενής τετραπολική ροπή έχει θετικές τιμές για ωσειδείς πυρήνες και αρνητικές τιμές για παραμορφωμένους ως προς τους πόλους πυρήνες.

Σαν αποτέλεσμα αυτών των δύο αλλαγών, η Εξ. (4.20) παίρνει τη μορφή

$$\chi(\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\eta}{1-\eta} + \frac{\sqrt{7}}{2}. \quad (4.22)$$

Εν συνεχεία γίνεται φανερό ότι για δεδομένο η , το χ σε αυτήν την περίπτωση παίρνει τιμές αντίθετες από αυτές που παίρνει στο $U(5)-O(6)-SU(3)$ τρίγωνο. Αυτό είναι σύμφωνο με το πολύ γνωστό γεγονός ότι οι ιδιότητες στο $U(5)-O(6)-\overline{SU(3)}$ τρίγωνο είναι αντικατοπτρικές εικόνες των ιδιοτήτων στο $U(5)-O(6)-SU(3)$ τρίγωνο [6].

4.3 Η συμμετρία $O(6)$

Ο επιτυχής προσδιορισμός μιας γραμμής που βασίζεται σε μία προσεγγιστική $SU(3)$ συμμετρία στο τρίγωνο συμμετρίας, εγείρει το ερώτημα του εάν μπορεί να βρεθεί μία παρόμοια γραμμή, που να σχετίζεται με την $O(6)$ συμμετρία. Η άλγεβρα $O(6)$ [6] παράγεται από τους τελεστές στροφορμής της Εξ. (4.4) και τους τελεστές $(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(3)}$, οι οποίοι μαζί δημιουργούν την $O(5)$ υποάλγεβρα, συν τους τετραπολικούς τελεστές

$$\hat{Q}_{O(6),\xi}^{(2)} = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)_\xi^{(2)}. \quad (4.23)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως στην ενότητα 4.1, θα εξετάσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με τους γεννήτορες της $O(6)$ άλγεβρας. Οι σχέσεις μετάθεσης που χρειάζονται παρατίθενται στο παράρτημα Β. Γνωρίζουμε ήδη ότι οι τελεστές της στροφορμής της Εξ. (4.4) μετατίθενται με τη Χαμιλτονιανή, έτσι θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό του μεταθέτη της Χαμιλτονιανής με τους τετραπολικούς τελεστές της Εξ. (4.23). Θα αφήσουμε για την επόμενη ενότητα τον μεταθέτη της Χαμιλτονιανής με τους τελεστές $(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(3)}$.

4.3.1 Σχέσεις μετάθεσης

Ο πρώτος όρος της Χαμιλτονιανής δίνει

$$[\hat{H}_1, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = c\eta[\hat{n}_d, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = c\eta[(d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu]^{(2)}, \quad (4.24)$$

που είναι παρόμοιος με την Εξ. (4.8).

Χρησιμοποιώντας

$$\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} = \hat{Q}_{O(6),\xi}^{(2)} + \chi(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, \quad (4.25)$$

στον δεύτερο όρο της Χαμιλτονιανής, προκύπτει το ενδιαμέσο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] &= \sum_\xi (-1)^\xi \{ [\hat{Q}_{O(6),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} + \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [\hat{Q}_{O(6),-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] \\ &+ \chi \{ [(d^\dagger \tilde{d})_\xi]^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)} \} \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} + \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} \{ [(d^\dagger \tilde{d})_{-\xi}]^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)} \} \} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Η Εξ. (4.26) μπορεί να ξαναγραφτεί, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ακόμα καμία προσέγγιση, ως

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] &= \sum_{k=1,3} 2\sqrt{\frac{2k+1}{5}} [((d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \hat{Q}_\chi^{(2)})_\nu^{(2)} - (\hat{Q}_\chi^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})^{(k)})_\nu^{(2)}] \\ &+ \chi [((d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})^{(2)} \hat{Q}_\chi^{(2)})_\nu^{(2)} + (\hat{Q}_\chi^{(2)} (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})^{(2)})_\nu^{(2)}]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Όπως και πριν, οι εκφράσεις (4.26), (4.27) μπορούν να απλοποιηθούν στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , καθώς σε αυτό το όριο συμβαίνει η συστολή της άλγεβρας $O(6)$ προς την άλγεβρα $R^5[SO(5)]$ [112, 113] (βλέπε παράρτημα Η). Αυτό σημαίνει ότι οι δύο πρώτοι όροι της (4.26) θα εξαλειφθούν. Αφού

$$[\hat{Q}_{O(6),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = 2(2\xi 2\nu | 1\xi + \nu)(d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(1)} + 2(2\xi 2\nu | 3\xi + \nu)(d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(3)}, \quad (4.28)$$

η εξάλειψη του μεταθέτη συνεπάγεται ότι όροι της μορφής $(d^\dagger \tilde{d})^{(k)}$ μπορούν να αγνοηθούν. Επιπλέον, σε αυτό το όριο, ο τετραπολικός τελεστής δεύτερης τάξης, $\hat{Q}_{O(6)}^{(2)}$, μπορεί να αντικατασταθεί από την ενδογενή τετραπολική ροπή (βαθμωτό μέγεθος), η οποία παίρνει την τιμή N στην παρούσα περίπτωση (βλέπε παράρτημα Η). Έτσι, στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N προκύπτει

$$[\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = 2N\chi[(d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}]. \quad (4.29)$$

Ο μεταθέτης του δεύτερου μέρους της Χαμιλτονιανής στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N γίνεται

$$[\hat{H}_2, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = -2c(1 - \eta)\chi[(d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}]. \quad (4.30)$$

Προκειμένου να εξαλειφθεί ο μεταθέτης, θα πρέπει οι συντελεστές των $(d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}$ στις Εξ. (4.24) και (4.30) να ακυρώνονται, οδηγώντας στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N , στη συνθήκη

$$\chi(\eta) = \frac{\eta}{2(\eta - 1)}. \quad (4.31)$$

Τα παραπάνω δεν αρκούν για να υπάρχει εγγύηση της ύπαρξης της γραμμής που αντιστοιχεί στην $O(6)$ συμμετρία. Πρέπει επίσης να πάρουμε υπόψη μας επίσης τους μεταθέτες της Χαμιλτονιανής με τους $(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(3)}$ γεννήτορες της $O(5)$, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

4.4 Η συμμετρία $O(5)$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η $O(5)$ άλγεβρα δημιουργείται από τους τελεστές της στροφορμής της Εξ. (4.4) και τους τελεστές $(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(3)}$. Θα εξετάσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ο μεταθέτης της Χαμιλτονιανής με τον $(d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(3)}$ εξαλείφεται.

Σε αυτήν την περίπτωση, ο πρώτος όρος της Χαμιλτονιανής δεν έχει καμία συνεισφορά, καθώς ο τελεστής \hat{n}_d είναι γνωστό ότι πρόκειται για $O(5)$ βαθμωτό [115]. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο $\hat{Q}_{O(6)}^{(2)} \cdot \hat{Q}_{O(6)}^{(2)}$ είναι επίσης $O(6)$ βαθμωτό [115] προκειμένου να απλοποιηθεί ο υπολογισμός, προκύπτει

$$\begin{aligned} [\hat{H}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(3)}] &= \frac{15}{7} \chi [((d^\dagger \tilde{d})^{(2)} (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)})_\nu^{(3)} - ((s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})^{(2)})_\nu^{(3)}] \\ &\quad - \frac{3}{7} \sqrt{10} \chi [((d^\dagger \tilde{d})^{(4)} (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)})_\nu^{(3)} - ((s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})^{(4)})_\nu^{(3)}] \\ &\quad - \frac{3}{7} \sqrt{10} \chi^2 [((d^\dagger \tilde{d})^{(4)} (d^\dagger \tilde{d})^{(2)})_\nu^{(3)} - ((d^\dagger \tilde{d})^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})^{(4)})_\nu^{(3)}]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, δεν μπορεί να γίνει κάποια απλοποίηση με τη βοήθεια των συστολών. Προκειμένου να εξαλειφθεί ο μεταθέτης, πρέπει να βάλουμε $\chi = 0$, δηλαδή να περιοριστούμε στη $U(5)$ - $O(6)$ πλευρά του τριγώνου. Αυτό το εύρημα έρχεται σε συμφωνία με τη γνωστή ύπαρξη της $O(5)$ υποάλγεβρας κατά μήκος της $U(5)$ - $O(6)$ πλευράς του τριγώνου [115].

Επιστρέφοντας στο ερώτημα της ύπαρξης γραμμής που σχετίζεται με $O(6)$ συμμετρία, βλέπουμε ότι στην Εξ. (4.31) πρέπει να βάλουμε $\chi = 0$, όπως απαιτείται από την $O(5)$ υποάλγεβρα. Αυτό που τελικά μένει είναι $\eta = 0$, που αντιστοιχεί στην $O(6)$ κορυφή. Έτσι, φαίνεται ότι δεν υπάρχει γραμμή στο τρίγωνο που να σχετίζεται με την $O(6)$ συμμετρία.

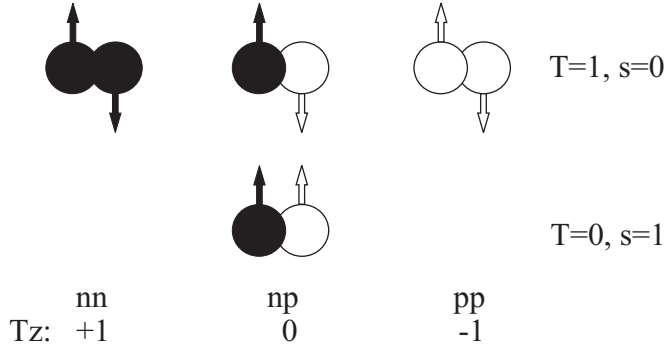
Αυτό το εύρημα, αρχικά μοιάζει να έρχεται σε αντίφαση με την πρόσφατη δουλειά των Kremer et al. [41], όπου οι συγγραφείς βρήκαν μια γραμμή που βασίζεται στην $O(6)$ συμμετρία, η οποία εκτείνεται από την $O(6)$ κορυφή, μέχρι τη $U(5)$ - $SU(3)$ γραμμή του τριγώνου. Αν όμως κοιτάξουμε πιο προσεκτικά τη δουλειά τους, θα δούμε ότι με την μέθοδο που χρησιμοποιούμε εδώ, πράγματι δε θα μπορούσε να βρεθεί κάποια γραμμή βασισμένη στην $O(6)$ συμμετρία. Πιο συγκεκριμένα, στην [41], χρησιμοποιώντας ένα μέτρο των διακυμάνσεων κατά σ (σ είναι ο κβαντικός αριθμός που περιγράφει την $O(6)$ συμμετρία), που ονομάζεται $\Delta\sigma_\psi$, βρήκαν μία κοιλάδα όπου οι διακυμάνσεις $\Delta\sigma_{g.s.}$ σχεδόν εξαφανίζονται, δηλαδή μια κοιλάδα όπου οι κυματοσυναρτήσεις της θεμελιώδους κατάστασης έχουν μεγάλο βαθμό καθαρότητας σε σχέση με τον κβαντικό αριθμό σ . Στην ίδια όμως κοιλάδα, η $O(5)$ συμμετρία είναι σπασμένη. Έτσι, στη δουλειά τους, οι Kremer et al. είχαν τρόπο να ξεχωρίζουν την $O(6)$ από την $O(5)$ συμμετρία, χρησιμοποιώντας τους χαρακτηριστικούς τους κβαντικούς αριθμούς και με αυτόν τον τρόπο μπορούσαν να βρουν μια γραμμή που βασίζεται μόνο στην $O(6)$ συμμετρία και όχι στην $O(5)$. Στην παρούσα περίπτωση, δεν μπορεί να γίνει παρόμοιος διαχωρισμός των δύο συμμετριών, καθώς οι $O(6)$ και $O(5)$ άλγεβρες έχουν κοινούς γεννήτορες, οπότε όταν κάποιος μελετά τους μεταθέτες της $O(6)$ άλγεβρας με τη Χαμιλτονιανή, ταυτόχρονα μελετά και τους μεταθέτες της $O(5)$ άλγεβρας με τη Χαμιλτονιανή. Έτσι, καθώς η τελευταία συμμετρία είναι σπασμένη, δεν μπορεί να βρεθεί κάποια γραμμή, εκτός από την ήδη γνωστή $U(5)$ - $O(6)$ γραμμή του τριγώνου.

Κεφάλαιο 5

Αλληλεπίδραση πρωτονίου-νετρονίου και εμφάνιση συλλογικότητας στους πυρήνες

Ο μοναδικός ρόλος της υπολειπόμενης αλληλεπίδρασης π-ν (πρωτονίου-νετρονίου) και της σχέσης της με την απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία, είναι γνωστός από καιρό [116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123]. Η σφαιρική συμμετρία ωθείται από την αλληλεπίδραση ζεύγους, $J = 0$, μεταξύ ζευγών πρωτονίων και ζευγών νετρονίων με $T = 1$ (βλέπε Σχ. 5.1), ενώ η παραμόρφωση ωθείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ π-ν σθένους με $T = 0$ [124]. Εν γένει, η αλληλεπίδραση $T = 0$ είναι σχεδόν πάντα ελκτική και ισχυρότερη από την αλληλεπίδραση $T = 1$, η οποία είναι ελκτική στην κατάσταση $J = 0$, αλλά γίνεται απωστική καθώς αυξάνει η τιμή του J . Η εμφάνιση συλλογικών φαινομένων συνδέεται με τον ανταγωνισμό μεταξύ των αλληλεπιδράσεων ζεύγους και αλληλεπιδράσεων π-ν. Εάν υποθεθεί, κάπως απλοϊκά, ότι η αλληλεπίδραση ζεύγους αυξάνει ανάλογα με τον αριθμό των πρωτονίων και νετρονίων σθένους, $N_p + N_n$, ενώ η αλληλεπίδραση π-ν αυξάνει ανάλογα με το γινόμενο των νουκλεονίων σθένους, $N_p N_n$, μπορεί να κατασκευαστεί ένα μέτρο που δείχνει τον ανταγωνισμό μεταξύ της αλληλεπίδρασης ζεύγους και της αλληλεπίδρασης π-ν, $P = N_p N_n / (N_p + N_n)$ [125]. Το $P \approx 5$ εκφράζει την αλλαγή μεταξύ σφαιρικών και αξονικά παραμορφωμένων σχημάτων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προτείνουμε μία απλή ερμηνεία της ισχυρής αλληλεπίδρασης π-ν με όρους μεγάλων χωρικών επικαλύψεων των κυματοσυναρτήσεων των τελευταίων πρωτονίων και νετρονίων του πυρήνα, στο πλαίσιο ενός τροποποιημένου προτύπου των φλοιών, που περιγράφει παραμορφωμένους πυρήνες, το πρότυπο Nilsson. Θα δείξουμε επίσης, ότι αυτά τα ζεύγη τροχιακών, που χαρακτηρίζονται από μεγάλες χωρικές επικαλύψεις, γεμίζουν σχεδόν ταυτόχρονα στο διάγραμμα Nilsson και η παραμόρφωση εμφανίζεται όταν αυτά είναι ταυτόχρονα γεμάτα. Τα παραπάνω οδηγούν στην πρόταση για ένα καινούριο σχήμα σύζευξης, ανάλογο με το ψευδο-SU(3) πρότυπο [3, 4].



Σχήμα 5.1: Οι επιτρεπτές συζεύξεις των στροφορμών της $A=2$ ισοβαρούς τριπλέτας. Μόνο ένα ζεύγος π -ν μπορεί να συζευχθεί σε $T = 0, s = 1$. Σχήμα από [126].

5.1 Πρότυπο Nilsson

Στο σφαιρικό πρότυπο των φλοιών, χρησιμοποιείται μια Χαμιλτονιανή της μορφής

$$H = \sum_{i=1} [T_i + U_i] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij}, \quad (5.1)$$

όπου v_{ij} είναι η υπολειπόμενη αλληλεπίδραση δύο σωμάτων, η οποία όταν δρα στην αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή $H_0 = \sum_{i=1} [T_i + U_i]$ σπάει της συμμετρίας της. Η εφαρμογή της εξίσωσης Schrödinger σε αυτήν τη Χαμιλτονιανή, χωρίς την υπολειπόμενη αλληλεπίδραση, αλλά συνοδευόμενη από τον όρο σύζευξης σπιν-τροχιάς $l_i \cdot s_i$ [127] και ένα κατάλληλο δυναμικό, οδηγεί στην παρατήρηση των ανεξάρτητων μονοσωματιδιακών επιπέδων και των μαγικών αριθμών.

Ανάλογη προσπάθεια έγινε και από τον Nilsson, στα πλαίσια του προτύπου των φλοιών, για την περιγραφή παραμορφωμένων πυρήνων. Η Χαμιλτονιανή του Nilsson γράφεται

$$H = H_0 + C\mathbf{I} \cdot \mathbf{s} + D\mathbf{I}^2, \quad (5.2)$$

όπου

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m}{2} (\omega_x^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2), \quad (5.3)$$

όπου x, y, z είναι οι συντεταγμένες στο σύστημα του πυρήνα. Έχει υποτεθεί αξονική συμμετρία γύρω από τον άξονα z ($\omega_x = \omega_y$) και μια μικρή απόκλιση από τη σφαιρικότητα που δίνεται από μια μικρή παράμετρο δ . Οι συχνότητες ταλάντωσης ορίζονται ως $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)$ και $\omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{2}{3}\delta\right)$. Οι όροι $\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}$ και \mathbf{I}^2 εξασφαλίζουν ότι στο σφαιρικό όριο, οι ενέργειες και η σειρά των επιπέδων θα είναι σωστές. Για μεγάλες παραμορφώσεις, οι όροι $\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}$ και \mathbf{I}^2 μπορούν να αγνοηθούν και η Χαμιλτονιανή μπορεί να λυθεί ως ένας τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής με κυλινδρική συμμετρία, του οποίου οι ιδιοτιμές δίνονται από την

$$E(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega_x(N - n_z + 1) + \hbar\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right), \quad (5.4)$$

όπου $N = n_x + n_y + n_z$. Η εισαγωγή της παραμέτρου δ επιτρέπει να γραφτεί η Χαμιλτονιανή συναρτήσεως των σφαιρικών αρμονικών Y_{20} ως

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(-\nabla^2 + r^2) - \delta\hbar\omega_0\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}r^2Y_{20} + C\mathbf{1} \cdot \mathbf{s} + D\mathbf{I}^2 \\ &= \bar{H}_0 + H_\delta + C\mathbf{1} \cdot \mathbf{s} + D\mathbf{I}^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Η παράμετρος παραμόρφωσης δ και η ανάλογη παράμετρος στη Χαμιλτονιανή του Bohr συνδέονται ως εξής

$$\delta \simeq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta \simeq 0.95\beta. \quad (5.6)$$

Είθισται, τα επίπεδα Nilsson να συμβολίζονται από τους κβαντικούς αριθμούς $K^\pi[N n_z \Lambda]$. Για να γίνει κατανοητός ο συγκεκριμένος συμβολισμός, μπορεί κάποιος να απεικονίσει ένα νουκλεόνιο σθένους, το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν παραμορφωμένο πυρήνα ή γύρω από ένα παραμορφωμένο δυναμικό (Σχήμα 5.2). Τότε, K είναι η προβολή της ολικής στροφορμής στον άξονα συμμετρίας, N είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός, $N = n_x + n_y + n_z$, n_z είναι ο αριθμός των κόμβων της κυματοσυνάρτησης στην κατεύθυνση z και Λ είναι η προβολή της τροχιακή στροφορμής στον άξονα συμμετρίας (τον άξονα z). Εξ ορισμού, $K = \Lambda + \Sigma = \Lambda \pm \frac{1}{2}$, όπου Σ είναι η προβολή του ενδογενούς σπιν του νουκλεονίου στον άξονα συμμετρίας.

Οι προσεγγιστικές ιδιοκαταστάσεις της ολικής Χαμιλτονιανής μπορούν να αναπτυχθούν ως [128]

$$\chi_{N\Omega} = \sum_{I\Lambda} a_{I\Lambda}^\Omega |N I \Lambda \Sigma\rangle. \quad (5.7)$$

Οι συντελεστές $a_{I\Lambda}^\Omega$ έχουν υπολογιστεί για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου

$$\eta = \frac{2\hbar\omega_0}{C}\delta \quad (5.8)$$

και συνοψίζονται στον Πίνακα I της αναφοράς [1]. Αυτά τα αναπτύγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό των επικαλύψεων.

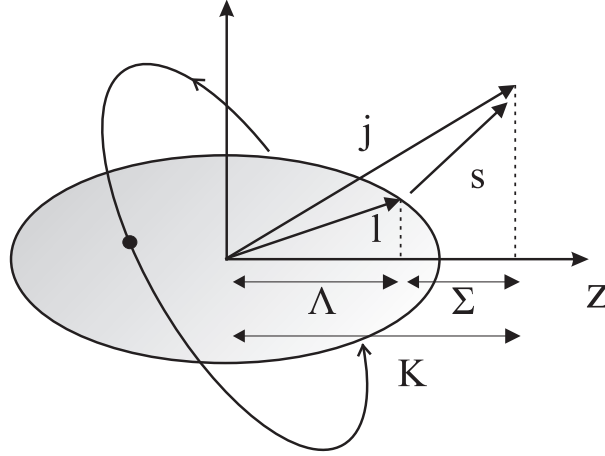
5.1.1 Κυματοσυναρτήσεις στο χώρο διαμόρφωσης

Οι ολικές κυματοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στα διανύσματα $|N I \Lambda \Sigma\rangle$ είναι οι

$$\Psi_{N I \Lambda \Sigma} = R_{nl} Y_{I\Lambda} f_{s\Sigma}, \quad (5.9)$$

όπου $Y_{I\Lambda}$ είναι οι συνήθεις σφαιρικές αρμονικές, $f_{s\Sigma}$ είναι οι σπίνορες $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ για σπιν πάνω και κάτω αντίστοιχα και R_{nl} είναι η ακτινική κυματοσυνάρτηση του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή σε σφαιρικές συντεταγμένες, που δίνεται στην αναφορά [129] (σε μονάδες όπου η μάζα και η συχνότητα ταλάντωσης, όπως και το \hbar , είναι 1)

$$R_{nl} = \sqrt{\frac{2(n!)}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}} e^{-r^2/2} r^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2), \quad (5.10)$$



Σχήμα 5.2: Ένα σωματίδιο που περιστρέφεται γύρω από έναν παραμορφωμένο πυρήνα και οι αριθμοί Nilsson που το χαρακτηρίζουν.

όπου $\Gamma(x)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, $L_n^l(r^2)$ είναι τα πολυώνυμα Laguerre και $N = 2n + l$.

Αυτές οι κυματοσυναρτήσεις συνδέονται με αυτές που φαίνονται στην Εξ. (8) της αναφοράς [1], μέσω της σχέσης που συνδέει τις συρρέουσες υπεργεωμετρικές συναρτήσεις και τα πολυώνυμα Laguerre (σελ. 149 [130])

$${}_1F_1(-n; m + 1; z) = \frac{n!m!}{(n + m)!} L_n^{(m)}(z), \quad (5.11)$$

οδηγώντας στην παρούσα περίπτωση στην

$${}_1F_1\left(-n; l + \frac{3}{2}; r^2\right) = \frac{n! \left(l + \frac{1}{2}\right)!}{\left(n + l + \frac{1}{2}\right)!} L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2). \quad (5.12)$$

Μία εναλλακτική βάση ($|Nlj\Omega\rangle$) συζητείται στο παράρτημα Θ.

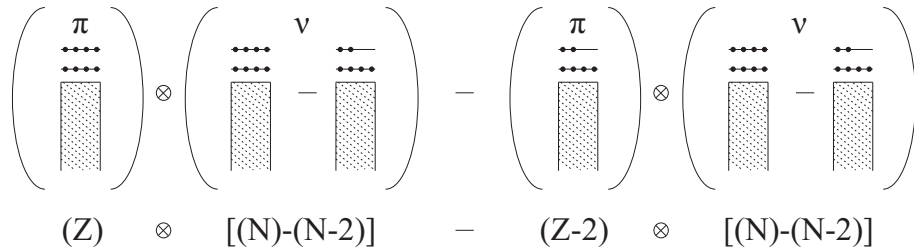
5.2 Εμπειρικές αλληλεπιδράσεις π-ν

Εφόσον η υπολειπόμενη αλληλεπίδραση π-ν συνδέεται με την εμφάνιση παραμόρφωσης, θέλουμε να βρούμε μέτρα της ισχύος της υπολειπόμενης αλληλεπίδρασης π-ν που θα συνδέουν τη μέγιστη ισχύ της αλληλεπίδρασης με την αλλαγή μεταξύ σφαιρικών και παραμορφωμένων σχημάτων. Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, μία απλοϊκή εκτίμηση της ισχύος της αλληλεπίδρασης π-ν είναι το γινόμενο του αριθμού των πρωτονίων και νετρονίων σθένους, $N_p N_n$ [131], που υποθέτει ότι η αλληλεπίδραση π-ν είναι ανεξάρτητη της τροχιάς. Η εξάρτηση από την τροχιά μπαίνει στο παιχνίδι με μία βελτιστοποίηση του γινομένου $N_p N_n$, που εισήχθηκε στην [132], την ολοκληρώσιμη τετραπολική αλληλεπίδραση π-ν, $|S_{pm}|$.

Άλλος τρόπος εξαγωγής της μέσης αλληλεπίδρασης π-ν των τελευταίων νουκλεονίων είναι, χρησιμοποιώντας μία ειδική διπλή διαφορά ενεργειών σύνδεσης, που συμβολίζεται δV_{pn} [133]. Για άρτιους - άρτιους πυρήνες ορίζεται από την

$$|\delta V_{pn}^{ee}(Z, N)| = \frac{1}{4}[(B_{Z,N} - B_{Z,N-2}) - (B_{Z-2,N} - B_{Z-2,N-2})]. \quad (5.13)$$

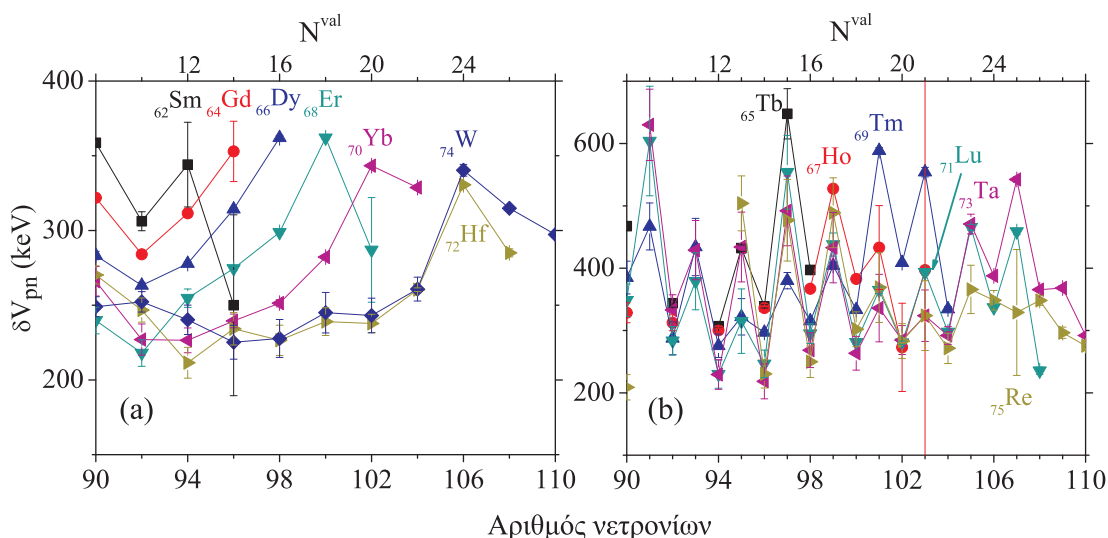
Μια σχηματική απεικόνιση των διαφορών των ενεργειών σύνδεσης της Εξ. (5.13) φαίνεται στο Σχήμα 5.3, από την αναφορά [133]. Η πρώτη διαφορά ενεργειών σύνδεσης δίνει την αλληλεπίδραση των τελευταίων δύο νετρονίων με όλα τα Z πρωτόνια και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση, συν τη συνεισφορά του μέσου σφαιρικού πεδίου. Ανάλογα συμβαίνει και για τη δεύτερη διαφορά ενεργειών σύνδεσης, που είναι η αλληλεπίδραση των τελευταίων δύο νετρονίων με $Z - 2$ πρωτόνια και μεταξύ τους συν τη συνεισφορά του μέσου σφαιρικού πεδίου. Η διπλή διαφορά των ενεργειών σύνδεσης έχει σαν αποτέλεσμα την αφαίρεση των αλληλεπιδράσεων π-π, ν-ν και της συνεισφοράς του μέσου σφαιρικού πεδίου και διαιρώντας με τέσσερα, προκύπτει η μέση αλληλεπίδραση καθενός από τα τελευταία δύο πρωτόνια με καθένα από τα τελευταία δύο νετρόνια. Έχουν επίσης οριστεί και διπλές διαφορές ενεργειών σύνδεσης άρτιων-περιττών και περιττών-περιττών πυρήνων [134, 135].



Σχήμα 5.3: Σχηματική απεικόνιση των διαφορών των ενεργειών σύνδεσης της Εξ. (5.13). Σχήμα από [133].

Γίνεται φανερό από την προηγούμενη σχηματική και μαθηματική εξήγηση του δV_{pn} , ότι αυτό το μέτρο λειτουργεί με τον ακόλουθο τρόπο: όταν η μέση αλληλεπίδραση π-ν είναι ισχυρή, το δV_{pn} θα πρέπει να έχει υψηλή τιμή. Η συμπεριφορά του δV_{pn} έχει μελετηθεί αρκετά [134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144]. Στην αναφορά [145] βρέθηκε ότι όταν οι εμπειρικές τιμές του δV_{pn} σχεδιάζονται συναρτήσει του αριθμού των νετρονίων για ελαφρείς πυρήνες, αυτές έχουν χαρακτηριστικές κορυφές ακριβώς για $N = Z$ για άρτιους - άρτιους πυρήνες και για $N = Z - 1$ για άρτιους - Z , περιττούς - N πυρήνες. Το μέγιστο των τιμών του δV_{pn} γύρω από το $N \simeq Z$, που υποδηλώνει ισχυρή αλληλεπίδραση π-ν, δικαιολογήθηκε μέσω της ισχυρής αλληλεπικάλυψης [116] των τροχιακών πρωτονίων και νετρονίων. Για τους $N = Z$ πυρήνες, τα πρωτόνια και τα νετρόνια γεμίζουν ακριβώς τα ίδια τροχιακά, οπότε υπάρχει πράγματι ισχυρή χωρική επικάλυψη μεταξύ των κυματοσυναρτήσεων πρωτονίων και νετρονίων, που οδηγεί σε υψηλές τιμές του δV_{pn} . Το φαινόμενο έχει εξηγηθεί θεωρητικά με τη βοήθεια της $SU(4)$ υπερπολλαπλούς θεωρίας του Wigner [134].

Ενδεχομένως κάποιος να περίμενε ότι οι χαρακτηριστικές κορυφές των δV_{pn} τιμών να πάβουν να υπάρχουν για βαρείς πυρήνες, καθώς δεν υπάρχουν $N = Z$ πυρήνες πέρα του $A \sim 100$ και επίσης η αλληλεπίδραση σπιν τροχιάς και οι δυνάμεις Coulomb οδηγούν στο να γεμίζουν τα πρωτόνια και τα νετρόνια διαφορετικούς φλοιούς, κάτι που οδηγεί σε μικρή επικάλυψη τροχιακών πρωτονίων και νετρονίων. Βρέθηκε όμως [145, 146] ότι βαρείς πυρήνες δείχνουν επίσης παρόμοιες κορυφές στις δV_{pn} τιμές, αν και, ενώ στους ελαφρείς πυρήνες οι κορυφές ήταν της τάξης των MeV , στους βαρείς πυρήνες η τάξη πέφτει σε keV . Στους βαρείς πυρήνες, οι τιμές των δV_{pn} μεγιστοποιούνται όταν ο αριθμός των νετρονίων σθένους ισούται με τον αριθμό των πρωτονίων σθένους, $N_{val} = Z_{val}$, ή πιο μετά στους φλοιούς, ελαφρώς ξεπερνά τον αριθμό των πρωτονίων σθένους. Για παράδειγμα, στο αριστερό πλαίσιο του Σχήματος 5.4, φαίνονται εμπειρικές τιμές του δV_{pn} για αλυσίδες ισοτόπων πυρήνων με άρτιο- Z , άρτιο- N . Τα στοιχεία Sm, Er, Yb και W έχουν μέγιστες τιμές δV_{pn} ακριβώς όταν $N_{val} = Z_{val}$ [(N_{val}, Z_{val}) = (12, 12), (18, 18), (20, 20), (24, 24), αντίστοιχα].



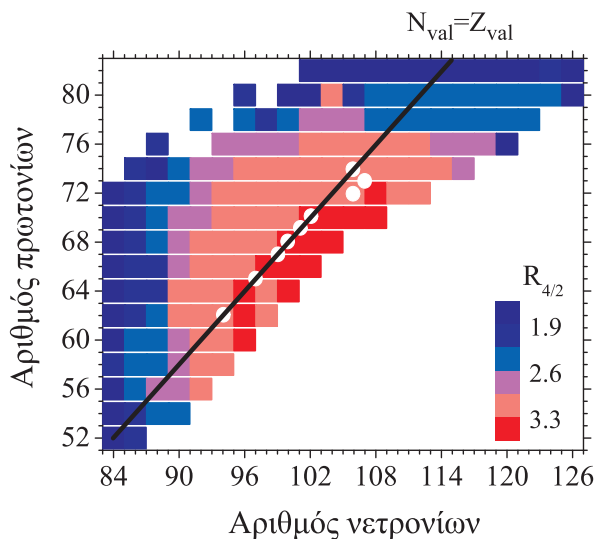
Σχήμα 5.4: (α) Εμπειρικές τιμές του δV_{pn} για πυρήνες με άρτιο- Z , άρτιο- N . (β) Εμπειρικές τιμές του δV_{pn} για πυρήνες με περιττό- Z .

Για τα στοιχεία Gd και Dy, το δV_{pn} αυξάνει μέχρι $N_{val} = Z_{val}$, όμως, και για τα δύο στοιχεία, αυτή είναι η τελευταία γνωστή τιμή του δV_{pn} , οπότε κάποιος πρέπει να γνωρίζει και την επόμενη τιμή του δV_{pn} , ώστε βγει το συμπέρασμα αν υπάρχει εκεί μέγιστο ή όχι. Τέλος, το Hf είναι το μοναδικό στοιχείο που σπάει ελαφρώς το προηγούμενο μοτίβο, καθώς το δV_{pn} μεγιστοποιείται για $(N_{val}, Z_{val}) = (22, 24)$. Αυτό όμως, δεν είναι και τόσο περίεργο, γιατί όπως θα δούμε και αργότερα έχει να κάνει με τον τρόπο που να πρωτόνια και τα νετρόνια γεμίζουν τους φλοιούς. Γενικά, στους άρτιους - άρτιους πυρήνες το δV_{pn} παρουσιάζει χαρακτηριστική κορυφή για $N_{val} \simeq Z_{val}$.

Το ίδιο μοτίβο εμφανίζεται και στους πυρήνες με περιττό- Z , άρτιο- N και περιττό- Z , περιττό- N , όπως φαίνεται στο δεξί πλαίσιο του Σχήματος 5.4. Το φαινόμενο είναι πιο έκδηλο στους περιττούς - περιττούς πυρήνες, καθώς εδώ η αλληλεπίδραση π-ν μπορεί να εκφραστεί καλύτερα, εξαιτίας της έλλειψης της αλληλεπίδρασης ζεύγους μεταξύ

των δύο τελευταίων πρωτονίων και νετρονίων στους άρτιους - άρτιους πυρήνες. Τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης ζεύγους φαίνονται και στους πυρήνες με περιττό- Z , άρτιο- N , των οποίων οι δV_{pn} τιμές είναι πάντα μικρότερες σε σχέση με αυτές των περιττών-περιττών πυρήνων.

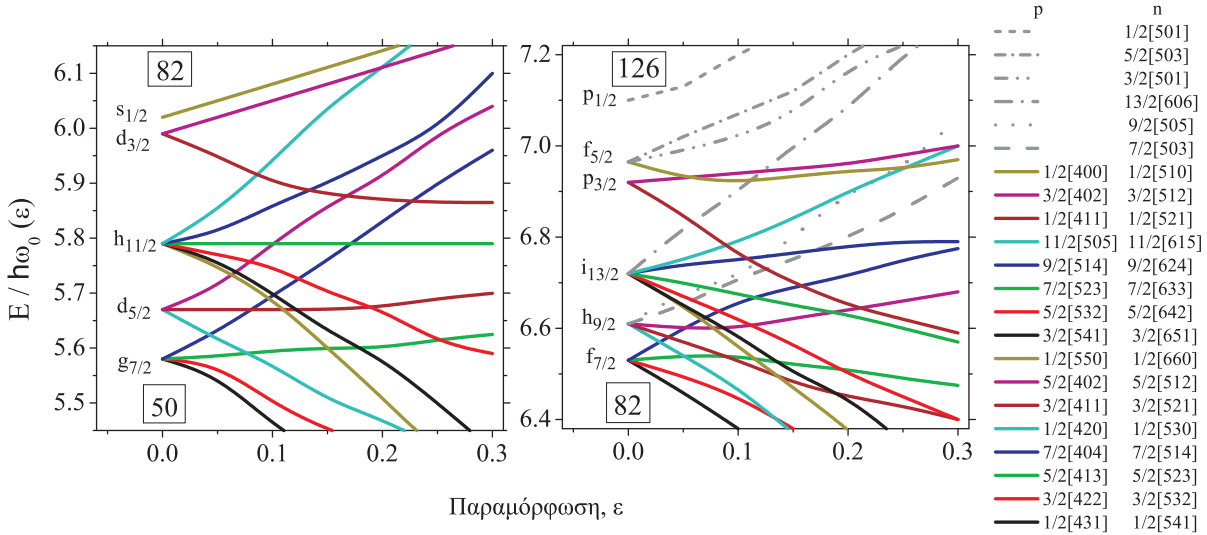
Ακόμα πιο χαρακτηριστικό είναι το διάγραμμα του Σχήματος 5.5. Πρόκειται για ένα έγχρωμο διάγραμμα του $R_{4/2} \equiv E(4_1^+)/E(2_1^+)$, στους $Z=50-82$, $N=82-126$ φλοιούς, το οποίο παίρνει τιμές από $R_{4/2} < 2$ κοντά στους κλειστούς φλοιούς, μέχρι $R_{4/2} \sim 3.33$ για καλά παραμορφωμένους αξονικά συμμετρικούς περιστροφείς. Η μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στη γραμμή όπου $N_{val} = Z_{val}$, ενώ οι λευκοί κύκλοι είναι τα ισότοπα των ισοτοπικών αλυσίδων του Σχήματος 5.4 για τα οποία παρατηρούνται μέγιστες τιμές του δV_{pn} . Παρουσιάζονται μόνο τα ισότοπα με επιβεβαιωμένες μέγιστες τιμές δV_{pn} . Παρατηρείται ότι τόσο οι άρτιοι-άρτιοι, όσο και οι περιττοί-περιττοί πυρήνες ακολουθούν τη γραμμή $N_{val} \simeq Z_{val}$, ενώ μια πιθανή εξήγηση για τα ισότοπα που αποκλίνουν ελαφρά από αυτήν τη γραμμή θα δοθεί αργότερα. Το πιο εντυπωσιακό όμως είναι ότι η γραμμή $N_{val} \simeq Z_{val}$ και το μέγιστο των τιμών των δV_{pn} βρίσκονται ακριβώς εκεί όπου εμφανίζεται η παραμόρφωση, για $R_{4/2} > 3.3$, τονίζοντας το σύνδεσμο με την εξέλιξη και τον κορεσμό της συλλογικότητας.



Σχήμα 5.5: Έγχρωμο διάγραμμα των εμπειρικών τιμών $R_{4/2}$ στους $Z=50-82$, $N=82-126$ φλοιούς. Η μαύρη γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου $N_{val} = Z_{val}$. Οι λευκοί κύκλοι είναι οι πυρήνες όπου παρατηρείται το μέγιστο των δV_{pn} τιμών.

Βρέθηκε ακόμα [145], ότι τα ισότοπα που είχαν τις μεγαλύτερες δV_{pn} τιμές, είχαν μία χαρακτηριστική σχέση μεταξύ των κβαντικών αριθμών των τροχιακών που συμπληρώνονταν από τα τελευταία πρωτόνια και νετρόνια. Αυτοί οι πυρήνες είναι όλοι καλά παραμορφωμένοι (εκτός από τα ελαφρύτερα ισότοπα του Sm και του Gd), έτσι η περιγραφή στα πλαίσια του προτύπου Nilsson είναι κατάλληλη για αυτούς. Οι κβαντικοί αριθμοί που αναφέρθηκαν προηγουμένως είναι οι κβαντικοί αριθμοί Nilsson. Για παράδειγμα, τα ισότοπα του Er, που φαίνονται στο Σχήμα 5.4, έχουν 18 πρωτόνια σθένους και 10-20 νετρόνια σθένους. Εάν συμβουλευτούμε το διάγραμμα του Nilsson του Σχή-

ματος 5.6, φαίνεται ότι το τελευταίο πρωτόνιο καταλαμβάνει το τροχιακό $7/2[523]$ της $h_{11/2}$ τροχιάς, μια τροχιά που έχει εισβάλλει στον 50-82 φλοιό, προερχόμενη από τον αμέσως υψηλότερο φλοιό, με ομοτιμία αντίθετη σε σχέση με τα υπόλοιπα τροχιακά του 50-82 φλοιού. Κοιτάζοντας και πάλι το διάγραμμα Nilsson φαίνεται ότι τα 10-20 νετρόνια καταλαμβάνουν τα τροχιακά, $3/2[651]$, $3/2[521]$, $5/2[642]$, $5/2[523]$, $7/2[633]$ και $1/2[521]$. Το ισότοπο που δίνει το μέγιστο στο δV_{pn} είναι αυτό με $N=100$, του οποίου το τελευταίο νετρόνιο, σύμφωνα με τη σειρά των τροχιακών που μόλις γράψαμε, καταλαμβάνει το $7/2[633]$ τροχιακό, που προεχεται από την $i_{13/2}$ τροχιά, η οποία είναι επίσης μία τροχιά που έχει εισβάλει από τον 82-126 φλοιό, με αντίθετη ομοτιμία σε σχέση με τις τροχιές αυτού του φλοιού. Κοιτάζοντας πιο προσεκτικά το Σχήμα 5.6, θα δούμε ότι τα τροχιακά $7/2[523]$ και $7/2[633]$, όπου κάθονται το τελευταίο πρωτόνιο και νετρόνιο, είναι σαν αδελφά τροχιακά, τα οποία διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$. Από φυσικής άποψης, αυτή η διαφορά σημαίνει ότι οι κυματοσυναρτήσεις του πρωτονίου και του νετρονίου έχουν τον ίδιο αριθμό κβάντων στο x - y επίπεδο (τις ίδιες τιμές $n_x + n_y$) και τα πρωτόνια και τα νετρόνια έχουν την ίδια προβολή της στροφορμής στον άξονα συμμετρίας. Το μέγιστο του δV_{pn} για συγκεκριμένο ισότοπο και η κατάληψη από το τελευταίο πρωτόνιο και νετρόνιο του ισότοπου τροχιακών που διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$ χαρακτηρίζουν και τα υπόλοιπα ισότοπα των άρτιων-άρτιων πυρήνων που μελετήθηκαν (Yb, Hf, W). Έτσι, προκύπτει ότι πρωτόνια και νετρόνια, που καταλαμβάνουν αδερφά τροχιακά, τα οποία συνδέονται με τη σχέση $0[110]$, υποδηλώνουν μεγάλη επικάλυψη των κυματοσυναρτήσεών τους, που έχει σαν αποτέλεσμα μέγιστη αλληλεπίδραση π-ν.



Σχήμα 5.6: Διαγράμματα Nilsson των $Z = 50 - 82$ και $N = 82 - 126$ φλοιών. Χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα για την υπόδειξη των αδελφών τροχιακών, ζευγών τροχιακών τα οποία διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$. Για τις περισσότερες τιμές παραμορφώσεων, ακολουθείται προσεγγιστικά το διαδοχικό γέμισμα των $0[110]$ ζευγών τροχιακών. Τα τροχιακά των νετρονίων χωρίς $0[110]$ συντρόφους (έχουν $n_z = 0$) φαίνονται με μαύρες διακεκομμένες γραμμές στο φλοιό των νετρονίων 82-126.

5.3 Ένα απλό πρότυπο για τις αλληλεπιδράσεις π-ν

Πως όμως γίνεται να γίνει κατανοητή η προέλευση και οι επιπτώσεις αυτών των αποτελεσμάτων; Σύμφωνα με τους Federman και Pittel [118], το κριτήριο για να συμβούν ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων, είναι τα πρωτόνια και τα νετρόνια να καταλαμβάνουν τροχιακά με ισχυρή επικάλυψη. Σύμφωνα με τους ίδιους, η επικάλυψη δύο τροχιακών $(n_N l_N j_N)$, $(n_P l_P j_P)$ μεγιστοποιείται εάν $n_N = n_P$ και $l_N = l_P \pm 1$. Ισχυρές συσχετίσεις στην περιοχή των σπάνιων γαιών αναμένεται να συμβαίνουν μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων που βρίσκονται στις $1h_{11/2}$ και $1i_{13/2}$ τροχιές, αντίστοιχα. Αυτό θα μπορούσε να εξηγήσει ένα μέρος των αποτελεσμάτων. Άλλος τρόπος μελέτης των αποτελεσμάτων είναι μέσα από υπολογιστικές μεθόδους μεγάλης κλίμακας. Στην αναφορά [140], οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν θεωρία συναρτησιακής πυκνότητας προκειμένου να υπολογίσουν τιμές δV_{pn} (βλέπε Σχήμα 5.9, δεξί πλαίσιο). Αν και η σύγκριση με τις εμπειρικές τιμές του δV_{pn} για τους $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$ φλοιούς βρίσκεται σε καλή συμφωνία, πάρα αυτά δεν αποκαλύπτεται η προέλευση της συμπεριφοράς του δV_{pn} . Εδώ μελετούμε αυτές τις αλληλεπιδράσεις μέσω μιας απλούστερης θεωρητικής προσέγγισης, υπολογίζοντας άμεσα την επικάλυψη των κυματοσυναρτήσεων Nilsson πρωτονίων και νετρονίων. Η προσέγγισή μας δίνει παρόμοια αποτελέσματα, αλλά τώρα με τρόπο που καταδεικνύει την προέλευση της εμφάνισης συλλογικότητας. Θα γίνει φανερό ότι η συλλογικότητα εμφανίζεται μέσα από το ρόλο συγκεκριμένων τροχιακών στις αλληλεπιδράσεις π-ν.

Χρησιμοποιήθηκαν κυματοσυναρτήσεις Nilsson της μορφής $[1] \chi_{N\Omega} = \sum_{i\Lambda} \alpha_{i\Lambda}^\Omega |N i \Lambda \Sigma\rangle$, όπου Ω , Λ , Σ είναι οι προβολές της ολικής στροφορμής j του σωματιδίου, της τροχιακής στροφορμής l και του σπιν s , αντίστοιχα, στον άξονα z , ενώ οι συντελεστές $\alpha_{i\Lambda}^\Omega$ υπολογίστηκαν λύνοντας τη Χαμιλτονιανή του Nilsson με τις καθιερωμένες τιμές των παραμέτρων $\kappa = 0.0637$ και $\mu = 0.42$ για νετρόνια και $\kappa = 0.0637$ και $\mu = 0.6$ για πρωτόνια. Για αξονικά συμμετρικούς πυρήνες, με τους οποίους θα ασχοληθούμε εδώ, το K , η προβολή της ολικής (σωματιδίου που περιστρέφεται και λοιπού πυρήνα) στροφορμής στον άξονα z και το Ω είναι τα ίδια ($K = \Omega$). Προκειμένου να υπολογιστούν οι χωρικές επικαλύψεις των κυματοσυναρτήσεων Nilsson δύο διαφορετικές εκφράσεις χρησιμοποιήθηκαν. Η πρώτη έκφραση

$$\int \sqrt{\chi_{N_1\Omega_1}^* \chi_{N_1\Omega_1}} \sqrt{\chi_{N_2\Omega_2}^* \chi_{N_2\Omega_2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (5.14)$$

δοκιμάστηκε και στις κυματοσυναρτήσεις του ατομίου του υδρογόνου και για τροχιακά με κβαντικούς αριθμούς $(n_1 l_1 m_1)$ και $(n_2 l_2 m_2)$ βρέθηκε ότι όλες οι επικαλύψεις με $\Delta n = 0$ είναι μεγαλύτερες από τις επικαλύψεις με $\Delta n = 1$ και όλες οι επικαλύψεις με $\Delta n = 1$ είναι μεγαλύτερες από αυτές με $\Delta n = 2$. Το παραπάνω έρχεται σε συμφωνία με τους [118] και δείχνει ότι ο κβαντικός αριθμός n είναι ο πιο σημαντικός για το πόσο μεγάλη θα είναι η επικάλυψη των δύο κυματοσυναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι η έκφραση (5.14) είναι κανονικοποιημένη και όταν $\chi_{N_1\Omega_1} = \chi_{N_2\Omega_2}$, η (5.14) είναι ίση με ένα, ενώ όσο περισσότερο αποκλίνουν οι δύο κυματοσυναρτήσεις, τόσο μικρότερο θα

είναι το ολοκλήρωμα.

Η Εξ. (5.14) δεν είναι η μόνη δυνατότητα εκτίμησης χωρικών επικαλύψεων των κυματοσυναρτήσεων Nilsson. Μπορεί να γίνει επίσης εκτίμηση επικαλύψεων χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

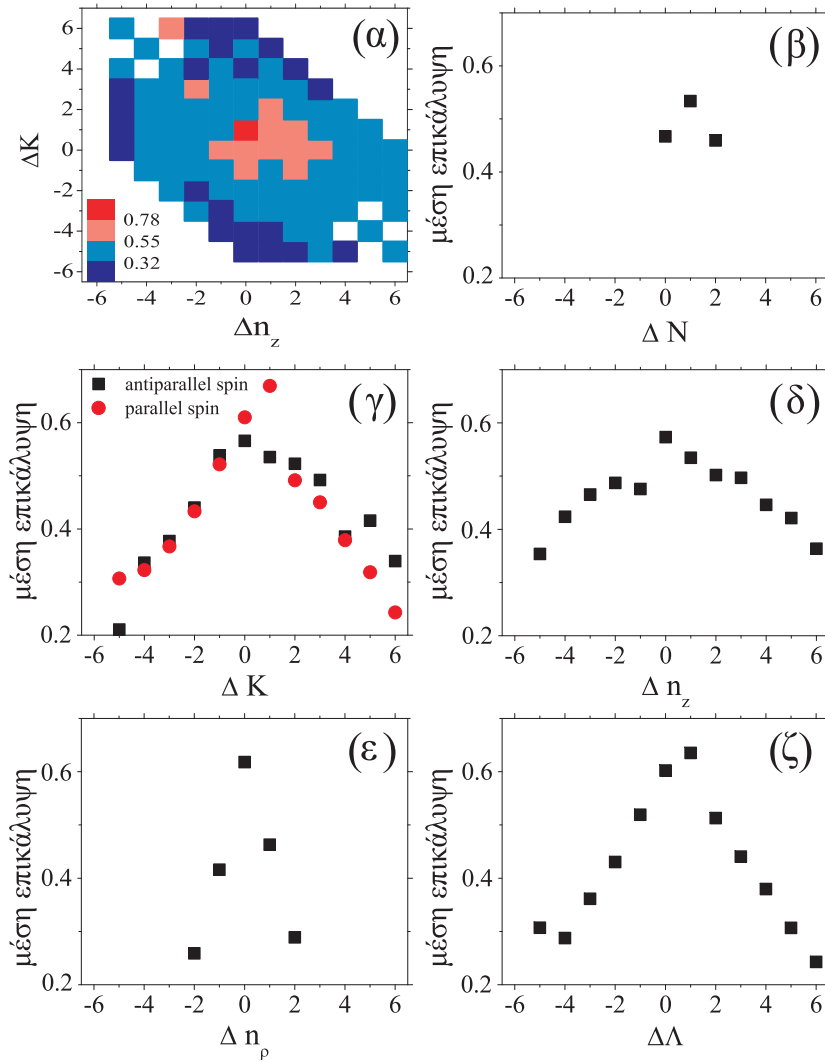
$$\frac{\int \chi_{N_1\Omega_1}^* \chi_{N_1\Omega_1} \chi_{N_2\Omega_2}^* \chi_{N_2\Omega_2} dV}{\sqrt{\int \chi_{N_1\Omega_1}^* \chi_{N_1\Omega_1} \chi_{N_1\Omega_1}^* \chi_{N_1\Omega_1} dV} \sqrt{\int \chi_{N_2\Omega_2}^* \chi_{N_2\Omega_2} \chi_{N_2\Omega_2}^* \chi_{N_2\Omega_2} dV}}, \quad (5.15)$$

όπου $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Οι παράγοντες κανονικοποίησης στον παρονομαστή εξασφαλίζουν ότι η επικάλυψη μιας κυματοσυνάρτησης με τον εαυτό της θα είναι μονάδα. Επικαλύψεις υπολογίστηκαν για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμόρφωσης $\epsilon=0.05$, 0.22 και 0.3 , τοποθετώντας τους πυρήνες σε αυτές τις κατηγορίες σύμφωνα με την τιμή του $R_{4/2}$ και επεκτείνοντας αυτές τις επιλογές σε άγνωστους πυρήνες χρησιμοποιώντας τον παράγοντα P [125]. Οι εκφράσεις (5.14) και (5.15) δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα, οπότε θα περιοριστούμε στη δεύτερη έκφραση των επικαλύψεων. Οι επικαλύψεις των τροχιακών των πρωτονίων του 50-82 φλοιού με τα τροχιακά των νετρονίων του 82-126 φλοιού φαίνονται στους Πίνακες 5.1, 5.2, 5.3 για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμόρφωσης.

Ας κοιτάξουμε τώρα συνολικά τις επικαλύψεις. Το Σχήμα 5.7 δείχνει τη συμπεριφορά τους ως προς συσχετισμένες διαφορές στα K και n_z , όπως επίσης και ως προς διαφορές σε κάθε χβαντικό αριθμό Nilsson. Στο Σχήμα 5.7(α) οι χωρικές επικαλύψεις είναι υψηλότερες όταν $\Delta K = 1$ και $\Delta n_z = 0$, που περιλαμβάνει την 1[000] περίπτωση. Μεγάλες όμως επικαλύψεις προκύπτουν και για $\Delta K = 0$ και $\Delta n_z = 1$, χαρακτηριστικά του 0[110] μετασχηματισμού και για γειτονικές τιμές των ΔK και Δn_z . Οι επικαλύψεις γενικά πέφτουν για μεγαλύτερες τιμές των ΔK και Δn_z .

Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει δύο απομακρυσμένα ροζ κουτάκια, πάνω αριστερά στο Σχήμα 5.7(α). Αυτά αντιστοιχούν σε μεγάλες διαφορές του ΔK (3, ακόμα και 6), όπως για το ζεύγος τροχιακών $1/2[431]$ και $13/2[606]$ και αρχικά ήταν δύσκολο να εξηγηθεί η ύπαρξή τους. Για την κατανόηση αυτών, αλλά και άλλων μοτίβων, απαιτείται επιπλέον ανάλυση των επικαλύψεων, όπως αυτή που φαίνεται στα Σχήματα 5.7(β) με 5.7(ζ). Κάθε σημείο είναι ο μέσος όρος όλων των επικαλύψεων για τις συγκεκριμένες διαφορές των συγκεκριμένων χβαντικών αριθμών. Σε κάθε περίπτωση, οι επικαλύψεις πέφτουν καθώς ένας συγκεκριμένος χβαντικός αριθμός μεταξύ δύο τροχιακών διαφέρει όλο και περισσότερο. Οι επικαλύψεις μεγιστοποιούνται είτε όταν η διαφορά μεταξύ των χβαντικών αριθμών είναι 0 (ΔK για αντιπαράλληλο σπιν, Δn_z , Δn_ρ) ή όταν είναι 1 (ΔN , ΔK για παράλληλο σπιν και $\Delta \Lambda$). Παρατηρούμε ότι η πιο απότομη διαφορά φαίνεται στο διάγραμμα Δn_ρ κάτω αριστερά, όπου Δn_ρ είναι η διαφορά στον αριθμό των ακτινικών κόμβων με $n_\rho = (N - n_z - \Lambda)/2$. Επίσης ενδιαφέρουσα είναι η κορυφή στο $\Delta N = 1$. Δεδομένου ότι οι μέγιστες επικαλύψεις συμβαίνουν για Δn_z και $\Delta n_\rho = 0$, η κορυφή στο $\Delta N = 1$ συνεπάγεται μία αντίστοιχη κορυφή για $\Delta \Lambda = 1$, που πράγματι υπάρχει. Τώρα μπορούμε να κατανοήσουμε τα ροζ κουτιά με τις μεγάλες τιμές ΔK στο Σχήμα 5.7(α). Όλα αντιστοιχούν σε περιπτώσεις με $\Delta n_\rho = 0$, για τα οποία οι μεγάλες Δn_ρ επικαλύψεις αντισταθμίζουν τις μεγάλες ΔK και Δn_z διαφορές. Όμως, πρέπει να

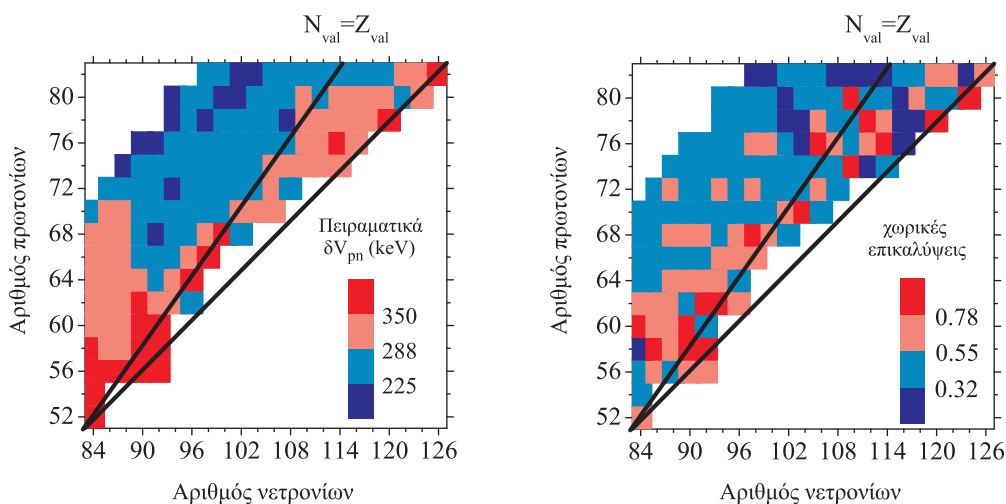
πούμε ότι τέτοια ζεύγη τροχιών, σχηματίζουν τη θεμελιώση κατάσταση πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων, που δεν προσβάσιμοι επί του παρόντος.



Σχήμα 5.7: Υπολογισμένες μέσες χωρικές επικαλύψεις (για παραμόρφωση $\epsilon = 0.22$) για τροχιακά πρωτονίων και νετρονίων στους $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$ φλοιούς ως προς τις διαφορές (τροχιακό νετρονίου μείον τροχιακό πρωτονίου) στις K και n_z τιμές χρησιμοποιώντας χρώματα. Τα υπόλοιπα πλαίσια δείχνουν μέσες επικαλύψεις συναρτήσει των διαφορών [(β) ΔN , (γ) ΔK , (δ) Δn_z , (ε) Δn_p , (ζ) $\Delta \Lambda$] σε μεμονωμένους κβαντικούς αριθμούς Nilsson.

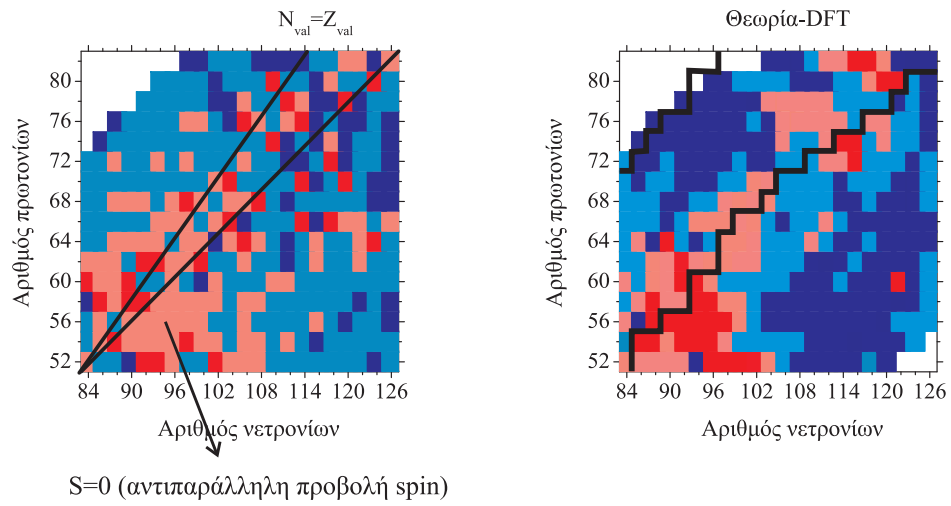
Στο Σχήμα 5.8, φαίνονται οι εμπειρικές τιμές του δV_{pn} σε σύγκριση με υπολογισμένες επικαλύψεις για τους $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$ φλοιούς. Η αριστερή μαύρη γραμμή αντιστοιχεί σε πυρήνες με ίσο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων σθένους, ενώ η μαύρη γραμμή στα δεξιά αντιστοιχεί στη γραμμή ίσου κλασματικά γεμίσματος των φλοιών. Όπως φαίνεται, η συμφωνία είναι αρκετά καλή δεδομένης της απλότητας και της ελεύθερης παραμέτρων φύσης της προσέγγισης. Και στις δύο εικόνες, οι υψηλές τιμές βρίσκονται κοντά στις δύο γραμμές και μεταξύ τους, ενώ χαμηλές τιμές

βρίσκονται μακριά από τη διαγώνιο. Υπάρχει επίσης μια περιοχή υψηλών τιμών στην αρχή των φλοιών. Υπάρχουν αραιά ροζ κουτιά στο πάνω αριστερά μέρος που διαφωνούν με τα δεδομένα. Αυτά αντιστοιχούν σε ελλειπή ως προς τα νετρόνια ισότοπα για $Z \sim 72 - 76$. Επίσης, το μπλε κουτί για τον Pb στο $N = 124$ θα ήταν ανοιχτό ροζ, αν είχε χρησιμοποιηθεί μηδενική παραμόρφωση (αντί για 0.05).



Σχήμα 5.8: Σύγκριση των εμπειρικών τιμών δV_{pn} για τους $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$ φλοιούς με τις υπολογισμένες επικαλύψεις. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε μικρές τιμές δV_{pn} και μικρές χωρικές επικαλύψεις, ενώ το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε μεγάλες τιμές δV_{pn} και μεγάλες χωρικές επικαλύψεις.

Οι επικαλύψεις που υπολογίστηκαν δεν περιορίστηκαν στους γνωστούς πυρήνες. Το Σχήμα 5.9, στο αριστερό πλαίσιο, φαίνονται οι επικαλύψεις για ολόκληρους τους $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$ φλοιούς που συγκρίνονται με τις δV_{pn} τιμές, όπως έχουν υπολογιστεί με τη θεωρία συναρτησιακής πυκνότητας (density functional theory (DFT)) [140]. Οι περίπλοκοι υπολογισμοί των δV_{pn} τιμών και οι απλοί υπολογισμοί ολοκληρωμάτων κυματοσυναρτήσεων δείχνουν μια γενικότερη συμφωνία. Επίσης, αποκαλύπτουν μία περιοχή μεγάλης αλληλεπίδρασης π-ν, σε πυρήνες πλούσιους σε νετρόνια, στις περιοχές $Z \sim 52 - 64$ και $N \sim 92 - 108$. Εδώ, γεμίζουν ζεύγη τροχιακών, όπως τα $5/2[413]$ με $5/2[512]$ και $1/2[420]$ με $1/2[521]$, συζευγμένα σε $S = 0$, (κοντά στους ^{168}Gd και ^{162}Nd , αντίστοιχα), που δεν ικανοποιούν την $0[110]$, η οποία υποδηλώνει $S = 1$.



Σχήμα 5.9: Σύγκριση υπολογισμένων χωρικών επικαλύψεων, τώρα για ολόκληρους τους $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$ φλοιούς (δεξί πλαίσιο) με δV_{pn} τιμές από υπολογισμούς με θεωρία συναρτησιακής πυκνότητας [140].

Πίνακας 5.1: Χωρικές επικαλύψεις [Εξ. (5.15)] τροχιακών Nilsson του 50-82 φλοιού των πρωτονίων (παρατίθενται στην πρώτη γραμμή, με τη σειρά που φαίνονται στο Σχήμα 5.6) με τροχιακά του 82-126 φλοιού των νετρονίων (παρατίθενται στην πρώτη στήλη, με τη σειρά που φαίνονται στο Σχήμα 5.6). α) Για παραμόρφωση $\epsilon_2 = 0.22$.

	$\frac{1}{2}[431]$	$\frac{3}{2}[422]$	$\frac{5}{2}[413]$	$\frac{7}{2}[404]$	$\frac{1}{2}[420]$	$\frac{3}{2}[411]$	$\frac{5}{2}[402]$	$\frac{1}{2}[550]$	$\frac{3}{2}[541]$	$\frac{5}{2}[532]$	$\frac{7}{2}[523]$	$\frac{9}{2}[514]$	$\frac{11}{2}[505]$	$\frac{1}{2}[411]$	$\frac{3}{2}[402]$	$\frac{1}{2}[400]$
$\frac{1}{2}[541]$	0.691	0.455	0.489	0.310	0.653	0.500	0.347	0.535	0.535	0.409	0.405	0.464	0.266	0.561	0.362	0.461
$\frac{3}{2}[532]$	0.791	0.790	0.606	0.488	0.504	0.636	0.463	0.634	0.714	0.818	0.589	0.440	0.500	0.638	0.482	0.451
$\frac{5}{2}[523]$	0.582	0.901	0.879	0.514	0.408	0.605	0.495	0.621	0.682	0.740	0.941	0.674	0.502	0.606	0.507	0.278
$\frac{7}{2}[514]$	0.595	0.616	0.885	0.671	0.414	0.332	0.519	0.568	0.594	0.642	0.705	0.987	0.627	0.362	0.511	0.132
$\frac{1}{2}[530]$	0.720	0.639	0.532	0.427	0.712	0.509	0.383	0.841	0.694	0.557	0.572	0.409	0.436	0.541	0.398	0.467
$\frac{3}{2}[521]$	0.632	0.665	0.561	0.432	0.664	0.673	0.447	0.619	0.720	0.700	0.446	0.470	0.381	0.682	0.470	0.501
$\frac{5}{2}[512]$	0.461	0.597	0.644	0.368	0.390	0.841	0.550	0.425	0.479	0.555	0.635	0.445	0.287	0.828	0.579	0.357
$\frac{1}{2}[660]$	0.701	0.593	0.524	0.335	0.676	0.437	0.328	0.964	0.784	0.651	0.564	0.482	0.393	0.462	0.338	0.423
$\frac{3}{2}[651]$	0.725	0.653	0.564	0.359	0.583	0.501	0.346	0.837	0.911	0.726	0.601	0.515	0.415	0.511	0.359	0.409
$\frac{5}{2}[642]$	0.690	0.732	0.627	0.385	0.400	0.557	0.366	0.672	0.872	0.853	0.666	0.540	0.437	0.549	0.381	0.345
$\frac{7}{2}[633]$	0.575	0.770	0.714	0.421	0.299	0.534	0.396	0.641	0.608	0.903	0.782	0.596	0.461	0.530	0.534	0.257
$\frac{9}{2}[624]$	0.462	0.697	0.770	0.485	0.339	0.401	0.434	0.548	0.645	0.557	0.931	0.707	0.509	0.424	0.435	0.165
$\frac{11}{2}[615]$	0.523	0.472	0.702	0.602	0.376	0.217	0.452	0.527	0.523	0.594	0.537	0.950	0.612	0.256	0.442	0.091
$\frac{1}{2}[521]$	0.586	0.500	0.351	0.280	0.701	0.667	0.344	0.518	0.545	0.485	0.331	0.226	0.215	0.722	0.372	0.581
$\frac{3}{2}[512]$	0.413	0.516	0.562	0.343	0.464	0.851	0.577	0.369	0.412	0.466	0.504	0.435	0.240	0.861	0.607	0.428
$\frac{1}{2}[510]$	0.463	0.300	0.185	0.120	0.592	0.437	0.261	0.507	0.427	0.266	0.138	0.096	0.091	0.471	0.280	0.595
$\frac{7}{2}[503]$	0.412	0.359	0.438	0.555	0.589	0.416	0.855	0.310	0.325	0.340	0.380	0.472	0.472	0.470	0.848	0.138
$\frac{9}{2}[505]$	0.607	0.554	0.600	0.948	0.273	0.146	0.418	0.472	0.499	0.509	0.546	0.623	0.999	0.140	0.411	0.051
$\frac{13}{2}[606]$	0.578	0.491	0.491	0.820	0.116	0.226	0.398	0.460	0.483	0.474	0.507	0.518	0.957	0.102	0.392	0.0432
$\frac{3}{2}[501]$	0.344	0.397	0.391	0.200	0.355	0.488	0.536	0.287	0.325	0.356	0.348	0.274	0.154	0.517	0.546	0.617
$\frac{5}{2}[503]$	0.403	0.339	0.403	0.530	0.575	0.439	0.854	0.289	0.302	0.314	0.349	0.412	0.456	0.486	0.851	0.148
$\frac{1}{2}[501]$	0.357	0.383	0.364	0.192	0.376	0.463	0.520	0.306	0.331	0.342	0.321	0.253	0.152	0.497	0.529	0.638

Πίνακας 5.2: (συνέχεια) β) Για παραμόρφωση $\epsilon_2 = 0.05$.

	$\frac{1}{2}$ [431]	$\frac{3}{2}$ [422]	$\frac{5}{2}$ [413]	$\frac{7}{2}$ [404]	$\frac{1}{2}$ [420]	$\frac{3}{2}$ [411]	$\frac{5}{2}$ [402]	$\frac{1}{2}$ [550]	$\frac{3}{2}$ [541]	$\frac{5}{2}$ [532]	$\frac{7}{2}$ [523]	$\frac{9}{2}$ [514]	$\frac{11}{2}$ [505]	$\frac{1}{2}$ [411]	$\frac{3}{2}$ [402]	$\frac{1}{2}$ [400]
$\frac{1}{2}$ [541]	0.563	0.447	0.379	0.254	0.817	0.597	0.436	0.468	0.456	0.375	0.342	0.318	0.208	0.672	0.485	0.534
$\frac{3}{2}$ [532]	0.453	0.568	0.380	0.319	0.719	0.738	0.490	0.408	0.459	0.508	0.433	0.254	0.278	0.741	0.556	0.490
$\frac{5}{2}$ [523]	0.346	0.449	0.576	0.335	0.504	0.805	0.597	0.395	0.349	0.410	0.485	0.508	0.249	0.742	0.662	0.353
$\frac{7}{2}$ [514]	0.286	0.321	0.397	0.571	0.492	0.439	0.839	0.418	0.275	0.301	0.336	0.399	0.563	0.581	0.821	0.175
$\frac{1}{2}$ [530]	0.936	0.718	0.563	0.435	0.533	0.387	0.288	0.730	0.863	0.674	0.611	0.514	0.433	0.430	0.315	0.359
$\frac{3}{2}$ [521]	0.828	0.860	0.641	0.476	0.473	0.470	0.319	0.539	0.937	0.914	0.622	0.586	0.460	0.469	0.355	0.347
$\frac{5}{2}$ [512]	0.631	0.880	0.764	0.526	0.344	0.522	0.365	0.498	0.711	0.876	0.953	0.579	0.499	0.481	0.403	0.283
$\frac{1}{2}$ [660]	0.788	0.583	0.457	0.345	0.533	0.377	0.271	0.756	0.762	0.627	0.533	0.453	0.366	0.420	0.298	0.367
$\frac{3}{2}$ [651]	0.778	0.681	0.510	0.380	0.513	0.438	0.298	0.546	0.927	0.727	0.594	0.500	0.401	0.457	0.332	0.373
$\frac{5}{2}$ [642]	0.676	0.762	0.569	0.407	0.428	0.489	0.322	0.440	0.884	0.877	0.667	0.538	0.425	0.472	0.360	0.338
$\frac{7}{2}$ [633]	0.557	0.770	0.656	0.444	0.341	0.503	0.356	0.553	0.635	0.919	0.812	0.599	0.457	0.471	0.392	0.282
$\frac{9}{2}$ [624]	0.476	0.653	0.751	0.510	0.297	0.451	0.401	0.408	0.585	0.629	0.935	0.733	0.509	0.444	0.426	0.213
$\frac{11}{2}$ [615]	0.449	0.456	0.750	0.629	0.300	0.328	0.448	0.444	0.493	0.548	0.581	0.950	0.626	0.384	0.451	0.143
$\frac{1}{2}$ [521]	0.358	0.378	0.290	0.116	0.618	0.513	0.235	0.432	0.342	0.345	0.299	0.201	0.074	0.673	0.291	0.508
$\frac{3}{2}$ [512]	0.329	0.400	0.470	0.448	0.542	0.730	0.646	0.648	0.328	0.372	0.409	0.432	0.390	0.762	0.695	0.533
$\frac{1}{2}$ [510]	0.543	0.396	0.227	0.283	0.739	0.555	0.411	0.588	0.474	0.332	0.209	0.178	0.256	0.639	0.457	0.569
$\frac{7}{2}$ [503]	0.537	0.617	0.911	0.648	0.325	0.422	0.463	0.468	0.570	0.645	0.770	0.978	0.544	0.447	0.475	0.189
$\frac{9}{2}$ [505]	0.461	0.507	0.565	0.948	0.284	0.208	0.208	0.430	0.458	0.497	0.542	0.659	0.998	0.309	0.455	0.091
$\frac{13}{2}$ [606]	0.385	0.422	0.426	0.815	0.274	0.177	0.459	0.402	0.409	0.440	0.476	0.538	0.957	0.287	0.443	0.079
$\frac{3}{2}$ [501]	0.349	0.443	0.449	0.231	0.476	0.650	0.576	0.613	0.370	0.421	0.421	0.341	0.160	0.614	0.618	0.618
$\frac{5}{2}$ [503]	0.276	0.321	0.398	0.535	0.518	0.509	0.851	0.419	0.275	0.306	0.345	0.410	0.478	0.634	0.842	0.207
$\frac{1}{2}$ [501]	0.321	0.342	0.315	0.229	0.432	0.476	0.504	0.695	0.315	0.317	0.296	0.256	0.191	0.529	0.526	0.639

Πίνακας 5.3: (συνέχεια) γ Για παραμόρφωση $\epsilon_2 = 0.30$.

	$\frac{1}{2}$ [431]	$\frac{3}{2}$ [422]	$\frac{5}{2}$ [413]	$\frac{7}{2}$ [404]	$\frac{1}{2}$ [420]	$\frac{3}{2}$ [411]	$\frac{5}{2}$ [402]	$\frac{1}{2}$ [550]	$\frac{3}{2}$ [541]	$\frac{5}{2}$ [532]	$\frac{7}{2}$ [523]	$\frac{9}{2}$ [514]	$\frac{11}{2}$ [505]	$\frac{1}{2}$ [411]	$\frac{3}{2}$ [402]	$\frac{1}{2}$ [400]
$\frac{1}{2}$ [541]	0.752	0.514	0.520	0.333	0.621	0.487	0.351	0.631	0.640	0.453	0.481	0.493	0.315	0.528	0.362	0.451
$\frac{3}{2}$ [532]	0.828	0.807	0.549	0.505	0.452	0.605	0.452	0.701	0.752	0.900	0.600	0.512	0.530	0.601	0.465	0.605
$\frac{5}{2}$ [523]	0.556	0.914	0.766	0.521	0.388	0.556	0.471	0.637	0.700	0.727	0.972	0.647	0.527	0.555	0.477	0.251
$\frac{7}{2}$ [514]	0.605	0.582	0.941	0.650	0.414	0.302	0.494	0.581	0.584	0.641	0.682	0.994	0.606	0.322	0.486	0.116
$\frac{1}{2}$ [530]	0.649	0.563	0.428	0.400	0.742	0.540	0.373	0.776	0.625	0.502	0.519	0.376	0.383	0.575	0.386	0.492
$\frac{3}{2}$ [521]	0.606	0.596	0.437	0.423	0.662	0.683	0.453	0.560	0.640	0.631	0.401	0.408	0.359	0.695	0.471	0.532
$\frac{5}{2}$ [512]	0.414	0.557	0.569	0.330	0.376	0.845	0.543	0.392	0.436	0.502	0.581	0.425	0.241	0.840	0.566	0.352
$\frac{1}{2}$ [660]	0.710	0.594	0.473	0.334	0.673	0.433	0.343	0.957	0.781	0.648	0.568	0.483	0.401	0.454	0.350	0.429
$\frac{3}{2}$ [651]	0.736	0.645	0.503	0.351	0.580	0.498	0.357	0.831	0.900	0.725	0.595	0.518	0.415	0.508	0.367	0.410
$\frac{5}{2}$ [642]	0.693	0.722	0.534	0.376	0.394	0.555	0.373	0.667	0.862	0.834	0.661	0.532	0.437	0.550	0.385	0.342
$\frac{7}{2}$ [633]	0.559	0.767	0.615	0.412	0.301	0.532	0.403	0.657	0.584	0.897	0.767	0.594	0.460	0.529	0.412	0.248
$\frac{9}{2}$ [624]	0.441	0.697	0.719	0.477	0.360	0.387	0.440	0.547	0.664	0.533	0.929	0.697	0.509	0.405	0.439	0.152
$\frac{11}{2}$ [615]	0.566	0.446	0.778	0.594	0.381	0.197	0.451	0.556	0.519	0.611	0.520	0.949	0.607	0.221	0.441	0.078
$\frac{1}{2}$ [521]	0.590	0.495	0.291	0.321	0.690	0.676	0.367	0.533	0.562	0.500	0.327	0.243	0.252	0.713	0.388	0.590
$\frac{3}{2}$ [512]	0.404	0.516	0.540	0.320	0.428	0.852	0.557	0.370	0.408	0.464	0.509	0.426	0.215	0.860	0.581	0.405
$\frac{1}{2}$ [510]	0.437	0.277	0.141	0.100	0.567	0.423	0.241	0.484	0.410	0.257	0.132	0.087	0.071	0.446	0.255	0.603
$\frac{7}{2}$ [503]	0.436	0.342	0.424	0.543	0.570	0.399	0.855	0.321	0.323	0.328	0.362	0.446	0.462	0.429	0.851	0.124
$\frac{9}{2}$ [505]	0.608	0.561	0.542	0.948	0.261	0.131	0.406	0.486	0.509	0.511	0.547	0.612	0.999	0.113	0.399	0.042
$\frac{13}{2}$ [606]	0.579	0.506	0.422	0.821	0.205	0.100	0.384	0.488	0.508	0.483	0.518	0.512	0.957	0.074	0.378	0.036
$\frac{3}{2}$ [501]	0.351	0.395	0.355	0.190	0.341	0.475	0.530	0.294	0.325	0.354	0.345	0.266	0.148	0.498	0.537	0.614
$\frac{5}{2}$ [503]	0.431	0.337	0.403	0.528	0.560	0.422	0.855	0.312	0.315	0.318	0.350	0.413	0.451	0.447	0.852	0.135
$\frac{1}{2}$ [501]	0.362	0.386	0.336	0.184	0.359	0.459	0.519	0.309	0.331	0.346	0.326	0.252	0.145	0.484	0.527	0.633

5.4 0[110] ζεύγη και ανάπτυξη συλλογικότητας και παραμόρφωσης

Ζεύγη τροχιακών πρωτονίων-νετρονίων του τύπου $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$ μπορούν να σχετιστούν με την ανάπτυξη συλλογικότητας και παραμόρφωσης στους πυρήνες. Για να γίνει αυτό κατανοητό θα χρησιμοποιήσουμε το Σχήμα 5.6 και τον Πίνακα 5.4, που δείχνουν μία σχηματική απεικόνιση των τροχιών των πρωτονίων και νετρονίων στους $Z = 50 - 82$ και $N = 82 - 126$ φλοιούς και μία λίστα τροχιακών Nilsson πρωτονίων και νετρονίων που βρίσκονται σε διαφορετικούς μέγιστους φλοιούς του προτύπου των φλοιών, αντίστοιχα. Το Σχήμα 5.6 χρησιμοποιήθηκε στην ενότητα 3.1 για ναδειχτεί ότι το μέγιστο στο δV_{pn} σε συγκεκριμένα ισότοπα των πυρήνων Er, Yb, Hf και W, εμφανίζεται όταν το τελευταίο πρωτόνιο και νετρόνιο αυτών των πυρήνων καταλαμβάνουν τροχιακά που διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$. Το μέγιστο του δV_{pn} σχετίστηκε επίσης, μέσω τους Σχήματος 5.5 με την εμφάνιση παραμόρφωσης στους πυρήνες.

Από το Σχήμα 5.6 παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα 16 τροχιακά Nilsson, συμπεριλαμβανομένων των τροχιακών μοναδικής ομοτιμίας, (εδώ, τα τροχιακά που προέρχονται από την $h_{11/2}$ τροχιά), έχει έναν 0[110] σύντροφο. Τα ζεύγη 0[110] πρωτονίων και νετρονίων έχουν το ίδιο χρώμα και φαίνεται να έχουν ίδια συμπεριφορά. Προκειμένου να γίνει εμφανής η αντιστοιχία των 0[110] ζευγών, στον Πίνακα 5.4, στα πρωτονιακά τροχιακά δίνεται ένας αριθμός σύμφωνα με τη σειρά εμφάνισής τους και ο αριθμός που φαίνεται δίπλα στα νετρονιακά τροχιακά δείχνει το ζεύγος τους στην πλευρά των νετρονίων. Μία πιο προσεκτική ματιά στο Σχήμα 5.6, αποκαλύπτει ένα γενικότερο μοτίβο, που δεν έχει παρατηρηθεί μέχρι σήμερα, και πιο συγκεκριμένα ότι αυτά τα 0[110] ζεύγη γεμίζουν σχεδόν ταυτόχρονα, καθώς γεμίζουν οι φλοιοί των πρωτονίων και των νετρονίων. Εφόσον ακόμη η συμπεριφορά των συντρόφων είναι παρόμοια στους δύο φλοιούς, δηλαδή παρόμοια κλίση στα τροχιακά, παρόμοιες διασταυρώσεις τροχιών, το ταυτόχρονο γέμισμα επιμένει τόσο σε μικρές όσο και σε μεγάλες παραμορφώσεις. Για παράδειγμα, για μικρές παραμορφώσεις, υπάρχουν οι εξής διαδοχικοί συνδυασμοί π-ν: 1/2[431]-1/2[541], 3/2[422]-3/2[532], 5/2[413]-5/2[523], 1/2[420]-1/2[530] κτλ. Για μεγαλύτερες παραμορφώσεις, π.χ. για $\epsilon \sim 0.3$, κοντά στο μέσο του φλοιού, για παράδειγμα για τον πυρήνα $^{168}_{68}\text{Er}_{100}$, που χρησιμοποιήθηκε και προηγουμένως, τα 18 πρωτόνια και νετρόνια σθένους, πέρα από κάποιες εναλλαγές γειτονικών τροχιών, γεμίζουν συδυασμούς 0[110] υψηλά επικαλυπτόμενων τροχιών. Το ίδιο συμβαίνει και για τον πυρήνα $^{172}_{70}\text{Yb}_{102}$. Από τον Πίνακα 5.4 και το Σχήμα 5.6 είναι εμφανές ότι τα 20 πρωτόνια και νετρόνια σθένους καταλαμβάνουν τις χαμηλότερες 10 τροχιές πρωτονίων και νετρονίων, που όλες σχηματίζουν 0[110] ζεύγη. Γενικά, τα τροχιακά πρωτονίων και νετρονίων μπορεί να μη γεμίζουν με ακριβώς την ίδια σειρά, αλλά μόλις γεμίσουν για έναν συγκεκριμένο πυρήνα, η σειρά δεν έχει πια σημασία.

Μετά το μέσο του φλοιού, κάνουν την εμφάνισή τους τροχιακά νετρονίων, που δεν έχουν 0[110] σύντροφο. Αυτά είναι τα τροχιακά με τις μαύρες διακεκομμένες γραμμές στο διάγραμμα Nilsson των νετρονίων του Σχήματος 5.6. Το χαρακτηριστικό αυτών των τροχιακών είναι ότι όλα έχουν κλίση προς τα πάνω και χαρακτηρίζονται από $n_z = 0$, δηλαδή, είναι τροχιακά που βρίσκονται μακριά από τον κύριο όγκο του πυρήνα και δε συνεισφέρουν στην παραμόρφωσή του. Αυτά τα $n_z = 0$ νετρονικά τροχιακά εξηγούν τα λευκά σημεία του Σχήματος 5.5, που βρίσκονται μακριά από την $Z_{val} = N_{val}$ γραμμή ή καλύτερα εξηγούν τη μετατόπιση των κορυφών του δV_{pn} στο $N_{val} = Z_{val} + 2$. Για παράδειγμα, ο πυρήνας ${}_{72}^{176}\text{Hf}_{104}$, έχει 22 πρωτόνια και νετρόνια σθένους. Από τον Πίνακα 5.4 και το Σχήμα 5.6 φαίνεται ότι τα χαμηλότερα 10 τροχιακά πρωτονίων και νετρονίων καταλαμβάνονται σχηματίζοντας 0[110] ζεύγη. Τα τελευταία όμως πρωτόνια, καταλαμβάνουν το τροχιακό 7/2[404] και τα τελευταία νετρόνια το τροχιακό 5/2[512], που δε σχηματίζουν 0[110] ζεύγος. Έτσι, δεν εμφανίζεται μέγιστο δV_{pn} για αυτούς τους πυρήνες. Το μέγιστο εμφανίζεται για τον πυρήνα ${}_{72}^{178}\text{Hf}_{106}$ (22 πρωτόνια σθένους, 24 νετρόνια σθένους), όπου καταλαμβάνεται το νετρονικό τροχιακό 7/2[514], το οποίο σχηματίζει 0[110] ζεύγος με το 7/2[404] πρωτονικό τροχιακό.

5.5 Καινούρια προσέγγιση ψευδοφλοιών στους βαρείς πυρήνες

Η ταυτόχρονη κατάληψη των 0[110] ζευγών στους φλοιούς των πρωτονίων και των νετρονίων δεν είναι χαρακτηριστικό μόνο των $Z = 50 - 82$ και $N = 82 - 126$ φλοιών, αλλά όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 5.4, αυτό χαρακτηρίζει όλα τα τροχιακά Nilsson που εμφανίζονται στους διαφορετικούς μέγιστους φλοιούς του προτύπου των φλοιών. Αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί να υποδηλώνει ένα διαφορετικό σχέδιο σύζευξης, παρόμοιο με την ιδέα του ψευδο-SU(3) προτύπου [3, 4], αλλά διαφορετικό ως προς το περιεχόμενο.

5.5.1 Ψευδο-SU(3) πρότυπο

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η δομή των φλοιών του πυρήνα, τουλάχιστον για τους ελαφρείς πυρήνες που ανήκουν στον sd φλοιό, δεν είναι πολύ διαφορετική από αυτή του αρμονικού ταλαντωτή, που χαρακτηρίζεται από SU(3) συμμετρία. Έτσι, το SU(3) πρότυπο προτάθηκε από τον Elliott [2] για την περιγραφή των ελαφρών πυρήνων που ανήκουν στον sd φλοιό. Καθώς όμως ο πυρήνας μεγαλώνει, η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς καταστρέφει τελείως την αρμονικού ταλαντωτή τύπου δομή των φλοιών και δημιουργούνται καινούριοι μέγιστοι φλοιοί. Οι καινούριοι μέγιστοι φλοιοί έχουν τους ίδιους υποφλοιούς, όπως και οι αντίστοιχοι μέγιστοι φλοιοί του αρμονικού ταλαντωτή, με τη διαφορά ότι οι υποφλοιοί με το μέγιστο j μετακινούνται στον αμέσως χαμηλότερο μέγιστο φλοιό και αντικαθίστανται από τους υποφλοιούς με το μέγιστο j του αμέσως επόμενου φλοιού του αρμονικού ταλαντωτή. Ο υποφλοιός που προέρχεται από τον επόμενο μέγιστο φλοιό, καλείται εισβολέας ή μη κανονικής ομοτιμίας

επίπεδο, επειδή έχει ομοτιμία αντίθετη από τα υπόλοιπα επίπεδα του μέγιστου φλοιού. Για παράδειγμα, ο $N=3$ μέγιστος φλοιός του αρμονικού ταλαντωτή (ή ο 28-50 μέγιστος φλοιός) έχει τους εκφυλισμένους υποφλοιούς $2p_{1/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 1f_{7/2}$, ο $N=4$ μέγιστος φλοιός (ή ο 50-82 μέγιστος φλοιός) έχει τους εκφυλισμένους υποφλοιούς $3s_{1/2}, 2d_{3/2}, 2d_{5/2}, 1g_{7/2}, 1g_{9/2}$, ο $N=5$ μέγιστος φλοιός (ή ο 82-126 μέγιστος φλοιός) έχει τους εκφυλισμένους υποφλοιούς $3p_{1/2}, 3p_{3/2}, 3f_{5/2}, 3f_{7/2}, 1h_{9/2}, 1h_{11/2}$, ο $N=5$ μέγιστος φλοιός (ή ο 126-184 μέγιστος φλοιός) έχει τους εκφυλισμένους υποφλοιούς $4s_{1/2}, 3d_{3/2}, 3d_{5/2}, 2g_{7/2}, 2g_{9/2}, 1i_{11/2}, 1i_{13/2}$ κτλ. Αφού εφαρμοστεί η σύζευξη σπιντροχιάς, οι υποφλοιοί διαχωρίζονται ενεργειακά. Ο $N=3$ μέγιστος φλοιός χάνει τον $1f_{7/2}$ υποφλοιό, που φτιάχνει τον δικό του 20-28 μέγιστο φλοιό και παίρνει το επίπεδο εισβολέα $1g_{9/2}$ από τον $N=4$ φλοιό. Ο $N=4$ φλοιός, έχοντας χάσει τον $1g_{9/2}$ υποφλοιό, τον αντικαθιστά από τον $1h_{11/2}$ υποφλοιό από τον $N=5$ φλοιό. Ο $N=5$ φλοιός χάνει τον $1h_{11/2}$ υποφλοιό, τον οποίο αντικαθιστά με το $1i_{13/2}$ επίπεδο εισβολέα του επόμενου μέγιστου φλοιού κοκ. Οι καινούριοι μέγιστοι φλοιοί που κατασκευάζονται είναι ο 20-28 μέγιστος φλοιός, που αποτελείται από τον $1f_{7/2}$ υποφλοιό, ο 28-50 μέγιστος φλοιός, που αποτελείται από τους $2p_{1/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 1g_{9/2}$ υποφλοιούς, ο 50-82 μέγιστος φλοιός, που αποτελείται από τους $3s_{1/2}, 2d_{3/2}, 2d_{5/2}, 1g_{7/2}, 1h_{11/2}$ υποφλοιούς, ο 82-126 μέγιστος φλοιός, που αποτελείται από τους $3p_{1/2}, 3p_{3/2}, 3f_{5/2}, 3f_{7/2}, 1h_{9/2}, 1i_{13/2}$ υποφλοιούς, ο 126-184 μέγιστος φλοιός, που αποτελείται από τους $4s_{1/2}, 3d_{3/2}, 3d_{5/2}, 2g_{7/2}, 2g_{9/2}, 1i_{11/2}, 1j_{15/2}$ υποφλοιούς κοκ. Σε μία προσπάθεια να περιγραφεί αυτή η μετακίνηση των υποφλοιών πέραν του sd φλοιού, αναπτύχθηκε το ψευδο-SU(3) σχήμα.

Είχε παρατηρηθεί ότι οι κανονικής ομοτιμίας υποφλοιοί στους καινούριους μέγιστους φλοιούς, αυτοί που θα άνηκαν στον N μέγιστο φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή, έχουν ίδιες τιμές j με τους υποφλοιούς που ανήκουν στον $N-1$ μέγιστο φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή. Για παράδειγμα, τα τροχιακά κανονικής ομοτιμίας του 50-82 μέγιστου φλοιού, $3s_{1/2}, 2d_{3/2}, 2d_{5/2}, 1g_{7/2}$, που θα ανήκαν στον $N=4$ μέγιστο φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή, έχουν τις ίδιες τιμές j με τους υποφλοιούς που ανήκουν στον $N=3$ μέγιστο φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή, $2p_{1/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 1f_{7/2}$. Αυτό μπορεί να υποδηλώσει τη δυνατότητα μιας αντιστοίχισης των τιμών των l και s των τροχιακών κανονικής ομοτιμίας $3s_{1/2}, 2d_{3/2}, 2d_{5/2}, 1g_{7/2}$ στις ψευδοτιμές \tilde{l} και \tilde{s} , κρατώντας το j σταθερό, δηλαδή, $j = l + s \rightarrow \tilde{l} + \tilde{s} = j$, έτσι ώστε να προκύψουν οι υποφλοιοί του μέγιστου φλοιού του ταλαντωτή. Για παράδειγμα, $s_{1/2}, d_{3/2}, d_{5/2}, g_{7/2} \rightarrow \tilde{p}_{1/2}, \tilde{p}_{3/2}, \tilde{f}_{5/2}, \tilde{f}_{7/2}$. Το τροχιακό αντίθετης ομοτιμίας, προερχόμενο από τον επόμενο μέγιστο φλοιό, δε λαμβάνεται υπόψη σε αυτήν την αντιστοίχιση. Έτσι, συνολικά, για τον 28-50 φλοιό, ισχύει η αντιστοιχία $2p_{1/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2} \rightarrow \tilde{s}_{1/2}, \tilde{d}_{3/2}, \tilde{d}_{5/2}$. Για τον 50-82 φλοιό, ισχύει η αντιστοίχιση $3s_{1/2}, 2d_{3/2}, 2d_{5/2}, 1g_{7/2} \rightarrow \tilde{p}_{1/2}, \tilde{p}_{3/2}, \tilde{f}_{5/2}, \tilde{f}_{7/2}$. Για τον 82-126 φλοιό η αντιστοίχιση είναι $3p_{1/2}, 3p_{3/2}, 3f_{5/2}, 3f_{7/2}, 1h_{9/2} \rightarrow \tilde{s}_{1/2}, \tilde{d}_{3/2}, \tilde{d}_{5/2}, \tilde{g}_{7/2}, \tilde{g}_{9/2}$. Για τον 126-184 φλοιό, η αντιστοίχιση είναι $4s_{1/2}, 3d_{3/2}, 3d_{5/2}, 2g_{7/2}, 2g_{9/2}, 1i_{11/2} \rightarrow \tilde{p}_{1/2}, \tilde{p}_{3/2}, \tilde{f}_{5/2}, \tilde{f}_{7/2}, \tilde{h}_{9/2}, \tilde{h}_{11/2}$. Από την αντιστοίχιση, η στροφορμή αλλάζει κατά ένα και το σπιν αντιστρέφεται. Στους κβαντικούς αριθμούς Nilsson, στα καινούρια τροχιακά Nilsson, το Λ θα άλλαζε κατά ένα, είτε θετικό είτε αρνητικό, το Σ θα αντιστρεφόταν, αλλά η προβολή της ολικής στροφορμής K θα έμενε ίδια. Στο διάγραμμα Nilsson, τα επίπεδα Nilsson με τα καινούρια τους ψευδο-σύμβολα $\tilde{\Omega}[\tilde{N}\tilde{n}_z\tilde{\Lambda}]$, ομαδοποιούνται σε ψευδο-ζεύγη

σπιν τροχιάς που έχουν $\tilde{\Omega} = \tilde{\Lambda} \pm 1/2$. Αυτό υποδηλώνει ότι ο διαχωρισμός εξαιτίας της ψευδο σπιν-τροχιάς αλληλεπίδρασης είναι μικρός, έτσι η SU(3) συμμετρία του αρμονικού ταλαντωτή επανέρχεται. Τα παραπάνω εφαρμόζονται ξεχωριστά στους μέγιστους φλοιούς πρωτονίων και νετρονίων.

Χωρίς να θέλουμε να υπεισέρθουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, προκειμένου να εφαρμοστεί το ψευδο-SU(3) πρότυπο σε πραγματικούς πυρήνες, πρέπει να είναι γνωστή η συμμετρία κάθε φλοιού. Για παράδειγμα, αν κάποιος ήθελε να εφαρμόσει το ψευδο-SU(3) πρότυπο στις σπάνιες γαίες, θα έπρεπε να θεωρήσει τα ακόλουθα. Τα πρωτόνια που καταλαμβάνουν τροχίες με θετική ομοτιμία, καταλαμβάνουν τον ψευδο-pf φλοιό, που έχει U(10) συμμετρία, με SU(3) υποάλγεβρα. Τα πρωτόνια με αρνητική ομοτιμία καταλαμβάνουν το τροχιακό $1h_{11/2}$, που έχει U(12) συμμετρία, με Sp(12) υποάλγεβρα. Τα νετρόνια αρνητικής ομοτιμίας καταλαμβάνουν τον ψευδο-sdg φλοιό, που έχει U(15) συμμετρία, με SU(3) υποάλγεβρα, ενώ τα νετρόνια με θετική ομοτιμία, καταλαμβάνουν το $1i_{13/2}$ τροχιακό, που έχει U(14) συμμετρία, με Sp(14) υποάλγεβρα. Εν συνεχεία, βρίσκοντας τις βασικές καταστάσεις και διαλέγοντας την κατάλληλη Χαμιλτονιανή, μπορούν να εξαχθούν οι ενέργειες και άλλες παρατηρήσιμες ποσότητες για σύγκριση με το πείραμα.

5.5.2 Προσεγγιστική συμμετρία SU(3)

Στο καινούριο σχέδιο σύζευξης, αξιοποιείται η ιδέα των 0[110] ζευγών. Προκειμένου να γίνει κατανοητή αυτή η ιδέα, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τους Πίνακες 5.5, 5.6, όπου παρατίθενται τα τροχιακά Nilsson των μέγιστων φλοιών που δημιουργούνται μετά την αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς, καθώς και τα τροχιακά Nilsson των μέγιστων φλοιών, N, του αρμονικού ταλαντωτή. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα τροχιακά Nilsson του 28-50 μέγιστου φλοιού με αυτά του N=3 φλοιού του αρμονικού ταλαντωτή, είναι προφανές ότι όλα τα τροχιακά είναι τα ίδια, εκτός από αυτά των $1g_{9/2}$ και $1f_{7/2}$ υποφλοιών, των οποίων τα τροχιακά διαφέρουν κατά 0[110]. Έτσι, τα τροχιακά Nilsson του $1g_{9/2}$ υποφλοιού μπορούν να αντικατασταθούν από τους 0[110] ομολόγους τους, του $1f_{7/2}$ υποφλοιού του αρμονικού ταλαντωτή, παραλείποντας μόνο ένα τροχιακό, το $9/2[404]$, το οποίο βρίσκεται υψηλά σε ενέργεια και δεν έχει 0[110] σύντροφο. Με αυτόν τον τρόπο ο 28-50 μέγιστος φλοιός μπορεί να προσεγγιστεί ως ένας pf φλοιός. Παρόμοια προσέγγιση γίνεται και στους υπόλοιπους μέγιστους φλοιούς. Πιο συγκεκριμένα, ο 50-82 μέγιστος φλοιός μπορεί να προσεγγιστεί ως ένας sdg φλοιός, συν το μοναχικό τροχιακό $11/2[505]$ που παραλείπεται. Ο 82-126 μέγιστος φλοιός θεωρείται ένας προσεγγιστικός pfh φλοιός, παραλείποντας το μοναχικό τροχιακό $13/2[606]$. Ο 126-184 μέγιστος φλοιός μπορεί να θεωρηθεί ένας προσεγγιστικός sdgi φλοιός, παραλείποντας το μοναχικό τροχιακό $15/2[707]$.

Στο καινούριο σχέδιο σύζευξης, τα τροχιακά Nilsson των τροχιών με κανονική ομοτιμία, αντιστοιχίζονται στους εαυτούς τους, με άλλα λόγια, παραμένουν ανέπαφα και αυτά που αλλάζουν είναι τα τροχιακά Nilsson των υποφλοιών με μη κανονική ομοτιμία. Σε αυτήν την αντιστοίχιση η ομοτιμία μεταβάλλεται, αλλά οι προβολές της στροφορμής Λ , του σπιν, Σ και της ολικής στροφορμής K μένουν ανέπαφες. Επίσης, ο n_z αλλάζει

κατά μία μονάδα. Όπως και στο προηγούμενο σχέδιο σύζευξης, πρέπει κάποιος να βρει τις συμμετρίες κάθε προσεγγιστικού φλοιού, στο καινούριο σχέδιο σύζευξης. Ο προσεγγιστικός pf φλοιός έχει συμμετρία $U(10)$, ο προσεγγιστικός sdg φλοιός έχει συμμετρία $U(15)$, ο pfh φλοιός έχει συμμετρία $U(21)$ και ο sdgi φλοιός έχει συμμετρία $U(28)$. Όλες οι παραπάνω άλγεβρες έχουν μία $SU(3)$ υποάλγεβρα. Για παράδειγμα, για τους πυρήνες των σπάνιων γαιών, στο καινούριο σχέδιο σύζευξης, τα πρωτόνια καταλαμβάνουν τον προσεγγιστικό sdg φλοιό, που έχει συμμετρία $U(15)$ και τα νετρόνια τον προσεγγιστικό pfh φλοιό, που έχει συμμετρία $U(21)$. Και οι δύο συμμετρίες έχουν $SU(3)$ υποάλγεβρες, που συνδυάζονται σε μία κοινή υποάλγεβρα για το σύστημα. Έτσι, μπορεί κάποιος να δουλέψει στο σχήμα

$$U_p(15) \times U_n(21) \supset SU_p(3) \times SU_n(3) \supset SU(3). \quad (5.16)$$

Έτσι, στο καινούριο σχέδιο σύζευξης περιλαμβάνονται δύο άλγεβρες. Η ύπαρξη μιας $SU(3)$ υποάλγεβρας για το συνολικό σύστημα επιτρέπει μια αναλυτική λύση για παραμορφωμένους πυρήνες.

Για παράδειγμα, ας θεωρηθεί ο πυρήνας ^{154}Sm , για τον οποίον η παράμετρος παραμόρφωσης Nilsson είναι $\epsilon \approx 0.95$, $\beta_2 \approx 0.32$ [1, 147]. Από το Σχήμα 5.6 φαίνεται ότι 6 από τα 12 πρωτόνια σθένους καταλαμβάνουν τροχιακά κανονικής ομοτιμίας στον 50-82 φλοιό, ενώ τα υπόλοιπα 6, καταλαμβάνουν $1h_{11/2}$ τροχιακά. Επιπλέον, 6 από τα 10 νετρόνια σθένους καταλαμβάνουν τροχιακά κανονικής ομοτιμίας στον 82-126 φλοιό, ενώ τα υπόλοιπα 4 καταλαμβάνουν $1i_{13/2}$ τροχιακά. Στο καινούριο σχέδιο σύζευξης, όλα τα πρωτόνια σθένους τοποθετούνται στην [22222] μ.α.α. της $U(15)$, ενώ όλα τα νετρόνια σθένους τοποθετούνται στην [22222] μ.α.α. της $U(21)$. Η πιο κυρίαρχη $SU(3)$ μ.α.α. της $U(15)$ είναι η (24,0) μ.α.α., ενώ η πιο κυρίαρχη $SU(3)$ μ.α.α. της $U(21)$ είναι η (30,4) μ.α.α.. Έτσι, η ολική $SU(3)$ μ.α.α. του συστήματος είναι η (54,4). Αυτή η συμμετρία περιλαμβάνει όλα τα πρωτόνια και τα νετρόνια σθένους, όχι μόνο αυτά με την κανονική ομοτιμία.

Για να προχωρήσει η εργασία περαιτέρω, πρέπει να επιλεγεί μια Χαμιλτονιανή που περιέχει, εκτός από τους συνήθεις τετραπολικούς όρους και τους όρους της στροφορμής, όρους τρίτης και τέταρτης τάξης που διατηρούν την $SU(3)$ συμμετρία [4, 148].

Πίνακας 5.5: Τροχιακά Nilsson που εμφανίζονται στους διαφορετικούς μέγιστους φλοιούς του προτύπου των φλοιών και σε διαφορετικούς φλοιούς του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

28-50	N=4		50-82	N=5			
2p1/2	1/2[301]	2p1/2	1/2[301]	3s1/2	1/2[411]	3s1/2	1/2[411]
2p3/2	1/2[321]	2p3/2	1/2[321]	2d3/2	1/2[400]	2d3/2	1/2[400]
	3/2[312]		3/2[312]		3/2[402]		3/2[402]
1f5/2	1/2[310]	1f5/2	1/2[310]	2d5/2	1/2[431]	2d5/2	1/2[431]
	3/2[301]		3/2[301]		3/2[422]		3/2[422]
	5/2[303]		5/2[303]		5/2[413]		5/2[413]
1g9/2	1/2[440]	1f7/2	1/2[330]	1g7/2	1/2[420]	1g7/2	1/2[420]
	3/2[431]		3/2[321]		3/2[411]		3/2[411]
	5/2[422]		5/2[312]		5/2[402]		5/2[402]
	7/2[413]		7/2[303]		7/2[404]		7/2[404]
	9/2[404]			1h11/2	1/2[550]	1g9/2	1/2[440]
					3/2[541]		3/2[431]
					5/2[532]		5/2[422]
					7/2[523]		7/2[413]
					9/2[514]		9/2[404]
					11/2[505]		

Πίνακας 5.6: Τροχιακά Nilsson που εμφανίζονται στους διαφορετικούς μέγιστους φλοιούς του προτύπου των φλοιών και σε διαφορετικούς φλοιούς του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

82-126		N=6		126-184		N=7	
3p1/2	1/2[501]	3p1/2	1/2[501]	4s1/2	1/2[611]	4s1/2	1/2[611]
3p3/2	1/2[521]	3p3/2	1/2[521]	3d3/2	1/2[600]	3d3/2	1/2[600]
	3/2[512]		3/2[512]		3/2[602]		3/2[602]
2f5/2	1/2[510]	3f5/2	1/2[510]	3d5/2	1/2[631]	3d5/2	1/2[631]
	3/2[501]		3/2[501]		3/2[622]		3/2[622]
	5/2[503]		5/2[503]		5/2[613]		5/2[613]
2f7/2	1/2[541]	3f7/2	1/2[541]	2g7/2	1/2[620]	2g7/2	1/2[620]
	3/2[532]		3/2[532]		3/2[611]		3/2[611]
	5/2[523]		5/2[523]		5/2[602]		5/2[602]
	7/2[514]		7/2[514]		7/2[604]		7/2[604]
1h9/2	1/2[530]	1h9/2	1/2[530]	2g9/2	1/2[651]	2g9/2	1/2[651]
	3/2[521]		3/2[521]		3/2[642]		3/2[642]
	5/2[512]		5/2[512]		5/2[633]		5/2[633]
	7/2[503]		7/2[503]		7/2[624]		7/2[624]
	9/2[505]		9/2[505]		9/2[615]		9/2[615]
1i13/2	1/2[660]	1h11/2	1/2[550]	1i11/2	1/2[640]	1i11/2	1/2[640]
	3/2[651]		3/2[541]		3/2[631]		3/2[631]
	5/2[642]		5/2[532]		5/2[622]		5/2[622]
	7/2[633]		7/2[523]		7/2[613]		7/2[613]
	9/2[624]		9/2[514]		9/2[604]		9/2[604]
	11/2[615]		11/2[505]		11/2[606]		11/2[606]
	13/2[606]			1j15/2	1/2[770]	1i13/2	1/2[660]
					3/2[761]		3/2[651]
					5/2[752]		5/2[642]
					7/2[743]		7/2[633]
					9/2[734]		9/2[624]
					11/2[725]		11/1[615]
					13/2[716]		13/2[606]
					15/2[707]		

Επίλογος

Η αναζήτηση προσεγγιστικών συμμετριών στα συλλογικά πρότυπα της πυρηνικής δομής έχει οδηγήσει σε πολλές διαφορετικές μεθόδους με τις οποίες μπορεί να εμφανιστεί μια προσεγγιστική συμμετρία, με το κοινό τους χαρακτηριστικό να είναι το σπάσιμο της συμμετρίας. Παρουσιάσαμε την εφαρμογή στατιστικών μέτρων χάους στο ενεργειακό φάσμα και τις μεταβάσεις μεταξύ των διεγερμένων 0^+ καταστάσεων, για $N=175$ μποζόνια, στα πλαίσια του IBM, γύρω από το τόξο κανονικότητας. Τα στατιστικά μέτρα χάους εμφανίζουν κανονικότητα στο $U(5)$ - $O(6)$ πόδι του τριγώνου, εξαιτίας της $O(5)$ κοινής υποάλγεβρας των δύο οριακών συμμετριών, καθώς επίσης και ελάχιστο χαοτικότητα στο τόξο κανονικότητας, που έρχεται σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες που πραγματοποιήθηκαν με πολύ μικρότερο αριθμό μποζονίων και σε επίπεδα με τροχιακή στροφορμή $L > 2$. Χαοτική συμπεριφορά κυριαρχεί σε όλα τα υπόλοιπα σημεία που υπολογίστηκαν. Καθώς ο αριθμός των μποζονίων μεγαλώνει, οι κβαντικές στατιστικές παράμετροι μοιάζουν να συγκλίνουν σε σταθερές τιμές, πάντως για κάθε αριθμό μποζονίων δείχνουν πάντα τα ίδια ποιοτικά αποτελέσματα: το σημείο πάνω στο τόξο δείχνει πάντα περισσότερη κανονικότητα σε σχέση με τα σημεία μακριά από το τόξο. Η μελέτη του χάους συναρτήσε της ενέργειας έδειξε ότι ο βαθμός του χάους μειώνεται αρκετά καθώς μετακινούμαστε στο υψηλό μέρος του φάσματος, ή με άλλα λόγια καθώς η ενέργεια αυξάνει. Το τόξο κανονικότητας, προφανώς οφείλει την ύπαρξή του σε κάποια υποκείμενη προσεγγιστική συμμετρία, η οποία μειώνει το βαθμό του χάους.

Μία πιθανή εξήγηση της ύπαρξης του τόξου κανονικότητας δίνεται από την εξαγωγή με αναλυτικό τρόπο μιας γραμμής που βασίζεται σε μια προσεγγιστική $SU(3)$ συμμετρία. Αυτή η γραμμή εξάγεται από τη μελέτη Χαμιλτονιανών που στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων του IBM, μετατίθενται προσεγγιστικά με τους γεννήτορες της $SU(3)$. Η προσεγγιστική $SU(3)$ συμμετρία, εκτείνεται από την $SU(3)$ κορυφή, μέχρι πολύ κοντά στην κρίσιμη γραμμή, ακολουθώντας το τόξο κανονικής συμπεριφοράς των Alhassid-Whelan ανάμεσα σε χαοτικές περιοχές. Αυτή είναι επίσης και η πρώτη αναλυτική απόδειξη της ύπαρξης μιας προσεγγιστικής συμμετρίας μέσα στο τρίγωνο συμμετρίας του IBM. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αλγεβρικές Χαμιλτονιανές που είναι γνωστό ότι έχουν συμμετρίες εξαιτίας των υπάρχουσων υποαλγεβρών.

Η τελευταία προσεγγιστική συμμετρία, μια $SU(3)$ προσεγγιστική συμμετρία, εξήχθη στα πλαίσια του προτύπου του Nilsson, με τη βοήθεια της οποίας ένα καινούριο σχέδιο σύζευξης μπορεί να αναπτυχθεί, για υπολογισμούς προτύπου φλοιών, το οποίο έχει αρκετές ομοιότητες με το ψευδο- $SU(3)$ πρότυπο. Η ιδέα μιας προσεγγιστι-

κής $SU(3)$ συμμετρίας προέκυψε, μετά από τη μελέτη ενισχυμένων αλληλεπιδράσεων πρωτονίων νετρονίων και την εξήγησή τους με όρους κυματοσυναρτήσεων με μεγάλη επικάλυψη. Αυτά τα ισχυρά αλληλεπιδρώντα ζεύγη πρωτονίων και νετρονίων, τα οποία είναι υπεύθυνα για την εμφάνιση παραμόρφωσης στον πυρήνα, έχουν μια ειδική σχέση που χαρακτηρίζει τους κβαντικούς τους αριθμούς Nilsson. Είναι ζεύγη που διαφέρουν κατά $0[110]$. Μια πιο προσεκτική ματιά στα τροχιακά Nilsson των φλοιών του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και αυτά του προτύπου των φλοιών, αποκαλύπτει ότι τα τροχιακά Nilsson, είτε είναι ίδια, είτε διαφέρουν κατά $0[110]$. Ένα καινούριο σχέδιο σύζευξης μπορεί να αναπτυχθεί όταν τα τροχιακά Nilsson του προτύπου των φλοιών αντικαθίστανται από τους $0[110]$ ομολόγους τους του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

Παράρτημα Α

Εφαρμογή των στατιστικών μέτρων στις ενεργειακές ιδιοτιμές

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή ιδιοενεργειών και μεταβάσεων μεταξύ των καταστάσεων της Χαμιλτονιανής του IBM είναι το IBAR του R. J. Casperson, που μπορεί να υπολογίσει καταστάσεις μέχρι και για 1000 μπόζονια [149]. Αφού υπολογιστούν οι ενέργειες χρησιμοποιώντας τον IBAR, αυτές πρέπει να είναι ανηγμένες, προκειμένου να εφαρμοστούν τα στατιστικά μέτρα, $P(S)$, $\Delta_3(L)$ και $P(y)$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα στατιστικά μέτρα $P(S)$ και $\Delta_3(L)$ χρησιμοποιούνται για τη στατιστική ανάλυση των ιδιοενεργειών που παράγονται από τον IBAR, ενώ το $P(y)$ χρησιμοποιείται για τη στατιστική ανάλυση των μεταβάσεων. Ο τρόπος που πραγματοποιείται αυτή η στατιστική ανάλυση περιγράφεται σε αυτό το παράρτημα. Ο σκοπός, είναι να βρούμε, μέσω προσαρμογής, τις κβαντικές στατιστικές παραμέτρους ω, q, ν κάθε στατιστικού μέτρου, που θα δείξουν το ποσό του χάους σε κάθε σημείο που μελετάται στο τρίγωνο συμμετρίας.

Αρχικά, κατασκευάζεται μία συνάρτηση κλίμακας των δεδομένων, που είναι ο αριθμός των ενεργειών ως προς τις ενέργειες. Εν συνεχεία, γίνεται προσαρμογή ενός πολυωνύμου έκτης τάξης $N(E)$ στη συνάρτηση κλίμακας. Οι κανονικοποιημένες ενέργειες βρίσκονται ως εξής

$$\epsilon_i = N(E_i). \quad (17)$$

Τώρα, μπορούν να εφαρμοστούν τα στατιστικά μέτρα $P(S)$ και $\Delta_3(L)$ στις κανονικοποιημένες ενέργειες.

Για το στατιστικό μέτρο $P(S)$, πρώτα κάποιος βρίσκει τα κανονικοποιημένα διαστήματα $S_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ και στη συνέχεια τα βάζει σε κλάσεις, έτσι ώστε να παραχθεί ένα ιστόγραμμα κανονικοποιημένων διαστημάτων. Στη συνέχεια, προσαρμόζεται η κατανομή Brody, που πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα A , για λόγους κλίμακας ($P_\omega(S) = A\alpha(1+\omega)S^\omega \exp(-\alpha S^{1+\omega})$), στο ιστόγραμμα, ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση

$$\chi^2(\omega) = \sum_{i \in \text{bins}} \left(\frac{P_{\text{bin}}(S_i) - P_\omega(S_i)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (18)$$

προκειμένου να βρεθεί η καλύτερη τιμή του ω . $P_{bin}(S_i)$ είναι ο ολικός αριθμός κανονικοποιημένων διαστημάτων στην i κλάση και σ_i είναι το στατιστικό σφάλμα του αριθμού των στοιχείων κάθε κλάσης, που δίνεται από την $\sigma_i = \sqrt{n_i}$, όπου n_i είναι ο αριθμός των διαστημάτων στην κλάση i .

Προκειμένου να υπολογίσουμε το στατιστικό μέτρο Δ_3 , για τις κανονικοποιημένες ενέργειες E_1, E_2, \dots, E_n , χρησιμοποιείται η συνάρτηση του $\Delta_3(L)$ που δίνεται στην Εξ. (22) της [89],

$$\begin{aligned} \Delta_3(\alpha, L) = & \frac{n^2}{16} - \frac{1}{L^2} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \right)^2 + \frac{3n}{2L^2} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \right) \\ & - \frac{3}{L^4} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \right)^2 + \frac{1}{L} \left(\sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \epsilon_i \right), \end{aligned} \quad (19)$$

όπου $\epsilon_i = E_i - (\alpha + L/2)$ είναι το μέτρο των κανονικοποιημένων ενεργειών ως προς το κέντρο του ενεργειακού διαστήματος $(\alpha, \alpha + L)$. Ο υπολογισμός του $\Delta_3(L)$ γίνεται στα ενεργειακά διαστήματα μήκους $L = 0.5, 1, 1.5, \dots, 10$, που καλύπτουν ολόκληρο το κανονικοποιημένο φάσμα, μία φορά για τα ενεργειακά διαστήματα που ξεκινούν από $\alpha = 0$ και μία φορά για τα ενεργειακά διαστήματα που ξεκινούν από $\alpha = L/2$. Έτσι, το $\Delta_3(L)$ βρίσκεται ως ο μέσος πάνω σε όλα τα $\Delta_3(\alpha, L)$. Η καλύτερη τιμή του q βρίσκεται ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση

$$\Delta(q) = \sum_{L \text{ values}} [\Delta_3(L) - \Delta_3^q(L)]^2, \quad (20)$$

όπου $\Delta_3(L)$ είναι η τιμή κάθε ενεργειακού διαστήματος μήκους L , που υπολογίζεται με τη διαδικασία που μόλις περιγράφηκε, ενώ το $\Delta_3^q(L)$ είναι η έκφραση που δίνεται στην Εξ. (2.17).

Για το τελευταίο στατιστικό μέτρο, $P(y)$, πρέπει πρώτα να κανονικοποιηθούν οι εντάσεις των μεταβάσεων στις τοπικές μέσες εντάσεις μεταβάσεων. Οι τοπικές μέσες εντάσεις μεταβάσεων βρίσκονται χρησιμοποιώντας Γκαουσιανές πλάτους γ , κεντραρισμένες γύρω από κάθε επίπεδο E_i [89, 90, 91, 29],

$$\bar{y}(E, E') = \frac{\sum_{k,l} |\langle k|T|l \rangle|^2 \exp[-(E - E_k)^2/2\gamma^2] \exp[-(E' - E_l)^2/2\gamma^2]}{\sum_{k,l} \exp[-(E - E_k)^2/2\gamma^2] \exp[-(E' - E_l)^2/2\gamma^2]}. \quad (21)$$

Το πλάτος γ επιλέχθηκε να είναι 2. Τότε, οι κανονικοποιημένες εντάσεις μεταβάσεων ορίζονται ως

$$y_{fi} = \frac{|\langle f|T|i \rangle|^2}{\bar{y}(E = E_i, E' = E_f)}. \quad (22)$$

Προκειμένου να υπολογιστούν οι τοπικές μέσες εντάσεις μεταβάσεων και οι κανονικοποιημένες εντάσεις μεταβάσεων, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι ανηγμένες ενέργειες, όπως αυτές χρησιμοποιήθηκαν στα στατιστικά μέτρα $P(S)$ και $\Delta_3(L)$. Μετά, οι λογάριθμοι των κανονικοποιημένων εντάσεων μεταβάσεων τοποθετούνται σε κλάσεις και

παράγεται ένα ιστόγραμμα κανονικοποιημένων εντάσεων μεταβάσεων. Η συνάρτηση που παρεμβάλλεται

$$P_\nu(y) = A \left(\frac{\nu}{2 \langle y \rangle} \right)^{\nu/2} \frac{y^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-\nu y/2 \langle y \rangle)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (23)$$

όπου A είναι ένας παράγοντας που προστίθεται για λόγους κλίμακας, προσαρμόζεται στο ιστόγραμμα, ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση

$$\chi^2(\nu) = \sum_{i \in bins} \left(\frac{P_{bin}(y_i) - P_\nu(y_i)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (24)$$

έτσι ώστε να βρεθεί η καλύτερη τιμή του ν . Καθώς όμως, τα y_{fi} είναι οι λογάριθμοι των κανονικοποιημένων εντάσεων μεταβάσεων, η παράμετρος y της συνάρτησης παρεμβολής (7) θα πρέπει να αλλάξει σε $z = \log_{10}(y)$ και να χρησιμοποιηθεί η μορφή της συνάρτησης προσαρμογής μετά την αλλαγή. $P_{bin}(y_i)$ είναι ο ολικός αριθμός των λογάριθμων των κανονικοποιημένων εντάσεων μετάβασης στην κλάση i και σ_i είναι, όπως εξηγήθηκε ήδη για το στατιστικό μέτρο $P(S)$, το στατιστικό σφάλμα του αριθμού των στοιχείων κάθε κλάσης.

Παράρτημα Β

Σχέσεις μετάθεσης

Παραθέτουμε εδώ τις σχέσεις μετάθεσης που χρειάζονται για να προκύψουν τα αποτελέσματα των ενοτήτων 3-6. Αυτές προκύπτουν από καθιερωμένες τεχνικές σύζευξης στροφορμής [150].

$$[\hat{n}_d, (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}] = (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, \quad (25)$$

$$[(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] = (2\xi 2\nu | 2\xi + \nu) (d^\dagger s - s^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(2)}, \quad (26)$$

$$[\hat{n}_d, (d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(k)}] = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (27)$$

$$[(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] = -10 \sum_{k=1,3} (2\xi 2\nu | k\xi + \nu) \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k)}, \quad (28)$$

$$[(d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] = 2 \sum_{k=1,3} (2\xi 2\nu | k\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k)}, \quad (29)$$

$$[(d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(1)}] = -\sqrt{\frac{3}{5}} (2\xi 1\nu | 2\xi + \nu) (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(2)}, \quad (30)$$

$$[(d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(3)}] = -\sqrt{\frac{7}{5}} (2\xi 3\nu | 2\xi + \nu) (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(2)}, \quad (31)$$

$$[(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(1)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(1)}] = -\frac{1}{\sqrt{5}} (1\xi 1\nu | 1\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(1)}, \quad (32)$$

$$[(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(1)}] = 2\sqrt{15} (2\xi 1\nu | 2\xi + \nu) \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(2)}, \quad (33)$$

$$[(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(3)}] = 2\sqrt{35} \sum_{k=2,4} (2\xi 3\nu | k\xi + \nu) \left\{ \begin{matrix} 2 & 3 & k \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k)}. \quad (34)$$

Παράρτημα Γ

Υπολογισμός μεταθετών των γεννητόρων του IBM

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην Ενότητα 4.1.1, προκειμένου να υπολογιστούν οι σχέσεις μετάθεσης, χρησιμοποιείται η σχέση που βρίσκεται στην αναφορά [6], Εξ. (2.6) ή στην [15], Εξ. (7.51)

$$[G_{\kappa}^{(k)}(l, l'), G_{\kappa''}^{(k')}(l'', l''')] = \sum_{\kappa''} \sqrt{(2k+1)(2k'+1)(k\kappa k' \kappa'' | k'' \kappa'')} (-1)^{k-k'}$$

$$\left[(-1)^{k+k'+k''} \begin{Bmatrix} k & k' & k'' \\ l''' & l & l' \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} G_{\kappa''}^{(k'')}(l, l''') - \begin{Bmatrix} k & k' & k'' \\ l'' & l' & l \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} G_{\kappa''}^{(k'')}(l'', l') \right], \quad (35)$$

όπου,

$$G_{\kappa}^{(k)}(l, l') = (b_l^{\dagger} \tilde{b}_{l'}^{\kappa})^{(k)}, \quad (l, l' = 0, 2). \quad (36)$$

Σε αυτήν την έκφραση, πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές Glebsch-Gordan, $(l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3)$, οι οποίοι σχετίζονται με τα 3-j σύμβολα μέσω της σχέσης

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l_1-l_2-m_3}}{\sqrt{2l_3+1}} (l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3) \quad (37)$$

και τα 6-j σύμβολα

$$\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

Εάν κάποιος, για κάποιο λόγο, θέλει να κάνει τους υπολογισμούς με τον δύσκολο τρόπο, τότε χρειάζονται οι σχέσεις συμμετρίας των συντελεστών Glebsch-Gordan, τα 3-j και 6-j, όπως και επίσης οι σχέσεις που δίνονται στις σελίδες 125-127 και 130-132 της αναφοράς [150] για τον υπολογισμό των 3-j και 6-j συμβόλων. Χάρην πληρότητας, δίνουμε τις σχέσεις συμμετρίας που μόλις αναφέρθηκαν.

Οι σχέσεις συμμετρίας για τους συντελεστές Glebsch-Gordan είναι:

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l m \rangle = (-1)^{l_1+l_2-l} \langle l_2 m_2 l_1 m_1 | l m \rangle, \quad (39)$$

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle = (-1)^{l_2+m_2} \sqrt{\frac{2l_3+1}{2l_1+1}} \langle l_2 - m_2 l_3 m_3 | l_1 m_1 \rangle, \quad (40)$$

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle = (-1)^{l_1-m_1} \sqrt{\frac{2l_3+1}{2l_2+1}} \langle l_3 m_3 l_1 - m_1 | l_2 m_2 \rangle. \quad (41)$$

Οι σχέσεις συμμετρίας για τα 3-j σύμβολα είναι:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 & l_3 & l_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 & l_1 & l_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

το οποίο σημαίνει ότι το σύμβολο 3-j παραμένει αναλλοίωτο μετά από μία άρτια μετάθεση των στηλών του και

$$\begin{aligned} (-1)^{l_1+l_2+l_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l_2 & l_1 & l_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 & l_2 & l_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

έτσι ώστε κάθε περιττή μετάθεση των στηλών του εισάγει έναν παράγοντα $(-1)^{l_1+l_2+l_3}$.

Τέλος, οι σχέσεις συμμετρίας των 6-j συμβόλων έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} l_2 & l_3 & l_1 \\ l_5 & l_6 & l_4 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l_3 & l_1 & l_2 \\ l_6 & l_4 & l_5 \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} l_2 & l_1 & l_3 \\ l_5 & l_4 & l_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_3 & l_2 \\ l_4 & l_6 & l_5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l_3 & l_2 & l_1 \\ l_6 & l_5 & l_4 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Το 6-j σύμβολο παραμένει αμετάβλητο κάτω από άρτια ή περιττή μετάθεση των στηλών του και

$$\left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_5 & l_6 \\ l_4 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} \quad (45)$$

επίσης παραμένει αμετάβλητο εάν δύο στήλες αναποδογυριστούν ταυτόχρονα.

Για παράδειγμα, θα εξάγουμε αναλυτικά την Εξ. (4.8). Ο μεταθέτης του πρώτου μέρους της Χαμιλτονιανής με τους τετραπολικούς τελεστές είναι

$$\begin{aligned} [\hat{H}_1, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] &= c\eta[\hat{n}_d, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = c\eta[\sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \\ &= c\eta[\sqrt{5}(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)} + (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] \\ &= c\eta\sqrt{5}[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] + c\eta\sqrt{5}[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}] \\ &\quad - c\eta\frac{\sqrt{35}}{2}[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}]. \end{aligned} \quad (46)$$

Σε αυτή τη μορφή μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα την Εξ. (35) στους τρεις όρους της (46). Για τον πρώτο όρο, $[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}]$, έχουμε $k = 0, k' = 2, k'' = 2, \kappa = 0, \kappa' = \nu, \kappa'' = \nu, l = l' = l'' = 2, l''' = 0$ και $\delta_{l\nu''} = 0, \delta_{l''\nu} = 1$, έτσι ώστε

$$[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] = \sum_\nu \sqrt{5}(002\nu|2\nu) \left[-(-1)^{2+0+0+2} \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Bmatrix} G_\nu^{(2)}(0, 2) \right], \quad (47)$$

όπου εφαρμόστηκε ότι $\kappa + \kappa' = \kappa''$ και ότι όταν συζεύγνυται στροφορμή 2 με στροφορμή 0, $G(0, 2)$, το μόνο πιθανό αποτέλεσμα είναι ότι συζεύγνυται σε στροφορμή 2, $k'' = 2$, ώστε τελικά προκύπτει,

$$[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] = -\frac{1}{\sqrt{5}}(s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}. \quad (48)$$

Ο δεύτερος όρος, $[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}]$, έχει $k = 0, k' = 2, k'' = 2, \kappa = 0, \kappa' = \nu, \kappa'' = \nu, l = l' = l'' = 2, l''' = 0$ και $\delta_{l\nu''} = 1, \delta_{l''\nu} = 0$, έτσι ώστε,

$$\begin{aligned} [(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}] &= \sum_\nu \sqrt{5}(002\nu|2\nu)(-1)^{2+0+2} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{Bmatrix} G_\nu^{(2)}(2, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Για τον τρίτο και τελευταίο όρο, $[(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}]$, έχουμε $k = 0, k' = 2, k'' = 2, \kappa = 0, \kappa' = \nu, \kappa'' = \nu, l = l' = l'' = l''' = 2$ και $\delta_{l\nu''} = 1, \delta_{l''\nu} = 1$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} [(d^\dagger \tilde{d})_0^{(0)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] &= \sum_\nu \sqrt{5}(002\nu|2\nu) \left[(-1)^{2+2+2} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{Bmatrix} G_\nu^{(2)}(2, 2) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{2+2+0+2} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Bmatrix} G_\nu^{(2)}(2, 2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Συνολικά, και οι τρεις όροι της Εξ. (46) δίνουν

$$\begin{aligned} c\eta[\hat{n}_a, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] &= -c\eta\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)} + c\eta\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)} \\ &= c\eta(d^\dagger \tilde{s} - s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}, \end{aligned} \quad (51)$$

που είναι πράγματι η Εξ. (4.8).

Παράρτημα Δ

Αναλυτική εξαγωγή της Εξ. (4.15)

Θα δείξουμε την εξαγωγή με αναλυτικό τρόπο της Εξ. (4.15) από την Εξ. (4.13), την οποία ξαναγράφουμε για ευκολία,

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_\chi^{(2)} \cdot \hat{Q}_\chi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] &= \sum_\xi (-1)^\xi \left\{ [\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} + \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [\hat{Q}_{SU(3),-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \right. \\ &\quad \left. + \left(\chi + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \left\{ [(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} + \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [(d^\dagger \tilde{d})_{-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \right\} \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

Η Εξ. (4.13) έχει τέσσερις όρους που πρέπει να τους αναπτύξουμε ώστε να πάρουμε την Εξ. (4.15). Για τον πρώτο όρο, $[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)}$, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τον μεταθέτη $[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}]$, ο οποίος είναι

$$\begin{aligned} &[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = \\ &[(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{s})_\xi^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] = \\ &[(s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] + [(s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}] - \frac{\sqrt{7}}{2} [(s^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] \\ &+ [(d^\dagger \tilde{s})_\xi^{(2)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] + [(d^\dagger \tilde{s})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}] - \frac{\sqrt{7}}{2} [(d^\dagger \tilde{s})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] \\ &- \frac{\sqrt{7}}{2} [(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (s^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}] - \frac{\sqrt{7}}{2} [(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{s})_\nu^{(2)}] + \frac{7}{4} [(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, (d^\dagger \tilde{d})_\nu^{(2)}]. \quad (53) \end{aligned}$$

με τη βοήθεια της (35) έχουμε

$$\begin{aligned} &[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = \\ &\sqrt{5}(2\xi 2\nu | 0\xi + \nu) (s^\dagger \tilde{s})_{\xi+\nu}^{(0)} - \sum_{k''} (-1)^{k''} (2\xi 2\nu | k''\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k'')} \\ &- \frac{\sqrt{7}}{2} (2\xi 2\nu | 2\xi + \nu) (s^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(2)} + \sum_{k''} (2\xi 2\nu | k''\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k'')} \\ &+ \frac{\sqrt{7}}{2} (2\xi 2\nu | 2\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{s})_{\xi+\nu}^{(2)} - \sqrt{5}(2\xi 2\nu | 0\xi + \nu) (s^\dagger \tilde{s})_{\xi+\nu}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{7}}{2}(2\xi 2\nu | 2\xi + \nu)(s^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(2\xi 2\nu | 2\xi + \nu)(d^\dagger \tilde{s})_{\xi+\nu}^{(2)} \\
& - \frac{7}{4} 10 \sum_{k''=1,3} (2\xi 2\nu | k'' \xi + \nu) \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ k'' & 2 & 2 \end{matrix} \right\} (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k'')} = \\
& \quad \sum_{k''} (2\xi 2\nu | k'' \xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k'')} (1 - (-1)^{k''}) \\
& - \frac{35}{2} \sum_{k''=1,3} (2\xi 2\nu | k'' \xi + \nu) \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ k'' & 2 & 2 \end{matrix} \right\} (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k'')}. \tag{54}
\end{aligned}$$

Από το πρώτο άθροισμα έχουμε $k'' = 1, 3$, εξαιτίας του $(1 - (-1)^{k''})$ όρου. Μετά τον υπολογισμό του 6-j συμβόλου μένει

$$[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = \frac{15}{4} (2\xi 2\nu | 1\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(1)}. \tag{55}$$

Αυτό που χρειαζόμαστε όμως είναι το γινόμενο $[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)}$, το οποίο είναι

$$[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} = \frac{15}{4} (2\xi 2\nu | 1\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(1)} \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)}. \tag{56}$$

Για αυτό, πρέπει να επανασυζεύξουμε τις στροφορμές χρησιμοποιώντας το ταυστικό γινόμενο (4.14)

$$[T^{(k_1)} \times T^{(k_2)}]_q^{(k)} = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}. \tag{57}$$

Στην περίπτωση μας, είναι προφανές ότι, $k_1 = 1$, $q_1 = \xi + \nu$, $k_2 = 2$, $q_2 = -\xi$, ώστε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (41) προκειμένου να αναδιατάξουμε με τον επιθυμητό τρόπο τους συντελεστές Glebsch-Gordan έτσι ώστε να πάρουμε

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} & = \frac{15}{4} (-1)^{-\xi} \sqrt{\frac{3}{5}} (1 \xi + \nu 2 - \xi | 2 \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(1)} \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)} \\
& = (-1)^{-\xi} \frac{3}{4} \sqrt{15} \left((d^\dagger \tilde{d})_{\nu}^{(1)} \hat{Q}_{\chi}^{(2)} \right)^{(2)}. \tag{58}
\end{aligned}$$

Η περίπτωση του $\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [\hat{Q}_{SU(3),-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}]$ είναι ακριβώς ίδια με αυτή που μόλις εξετάστηκε, εάν αντικαταστήσουμε το ξ με $-\xi$, ώστε να είναι

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [\hat{Q}_{SU(3),-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] & = \frac{15}{4} (2 - \xi 2 - \nu | 1 - \xi + \nu) \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})_{-\xi+\nu}^{(1)} \\
& = -(-1)^\xi \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{15}{4} (2 \xi 1 - \xi + \nu | 2 \nu) \hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})_{-\xi+\nu}^{(1)} \\
& = -(-1)^\xi \frac{3}{4} \sqrt{15} \left(\hat{Q}_{\chi}^{(2)} (d^\dagger \tilde{d})_{\nu}^{(1)} \right)^{(2)}. \tag{59}
\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι αν προσθέσουμε τις Εξ. (58) και (59) και αντικαταστήσουμε αυτές στην (4.13), παίρνουμε ένα μέρος της Εξ. (4.15). Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο,

όπως παραπάνω, στους άλλους δύο όρους της Εξ. (4.13), $[(d^\dagger \tilde{d})_\xi^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] \hat{Q}_{\chi,-\xi}^{(2)}$ και $\hat{Q}_{\chi,\xi}^{(2)} [(d^\dagger \tilde{d})_{-\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}]$, μπορούμε να πάρουμε ολόκληρη την Εξ. (4.15).

Παράρτημα Ε

Συστολή İnönü - Wigner

Οι İnönü και Wigner [109] είχαν περιγράψει τη συστολή ως τη διαδικασία δημιουργίας μιας καινούριας ομάδας (ή μίας άλγεβρας που σχετίζεται με αυτήν την ομάδα), μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού των γεννητόρων (ή των διανυσμάτων βάσης της άλγεβρας) της παλιάς ομάδας. Τα X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ μπορεί είτε να αναφέρονται ως οι γεννήτορες της ομάδας G , όπου n είναι ο αριθμός των γεννητόρων, ή ως τα διανύσματα βάσης της άλγεβρας g , που σχετίζεται με την ομάδα G , [151]. Από εδώ και πέρα θα μείνουμε στον πρώτο ορισμό.

Ας είναι τα X_i οι γεννήτορες της ομάδας G , οι οποίοι υπακούουν στις σχέσεις μετάθεσης

$$[X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k. \quad (60)$$

Αν τα X_i υποβληθούν σε έναν μη μοναδιακό μετασχηματισμό U , προκύπτουν καινούριοι γεννήτορες Y_i ,

$$Y_i = U_i^j X_j. \quad (61)$$

Ο μετασχηματισμός U έχει τη μορφή

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{pmatrix}, \quad (62)$$

με

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I/\epsilon \end{pmatrix}, \quad (63)$$

όπου I , ϵI και I/ϵ είναι $r \times r$ και $(n-r) \times (n-r)$ πίνακες αντίστοιχα. Όσο, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, η ορίζουσα του U θα είναι διαφορετική από το μηδέν και επομένως ο μετασχηματισμός θα είναι μη μοναδιακός.

Οι γεννήτορες Y_i θα έχουν τις ίδιες σχέσεις μετάθεσης με τους X_i , αλλά με διαφορετικές σταθερές δομής, C_{ij}^k , μέχρι μία σταθερά. Οι σταθερές δομής ως προς την καινούρια βάση θα είναι

$$[Y_i, Y_j] = C_{i,j}^k Y_k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} [U_i^m X_m, U_j^n X_n] &= C_{i,j}^k U_k^l X_l \Rightarrow \\ U_i^m U_j^n c_{mn}^l (U^{-1})_l^k &= C_{i,j}^k. \end{aligned} \quad (64)$$

Αλλά τι συμβαίνει όταν ο U είναι μοναδιακός, δηλαδή, όταν το $\epsilon \rightarrow 0$; Σε αυτό το όριο συμβαίνει η συστολή και ο μετασχηματισμός U οδηγεί σε μία καινούρια ομάδα, στη συστολική ομάδα G' . Χάρην απλότητας, συμβολίζουμε τους τελεστές που μετασχηματίζονται χρησιμοποιώντας το πάνω αριστερό μέρος, I , του πίνακα μετασχηματισμού U , ως $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, \dots$ και αυτούς που μετασχηματίζονται από το κάτω δεξί μέρος, ϵI , ως X_i, X_j, X_k, \dots . Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} UX_\alpha &= X_\alpha = Y_\alpha \\ UX_i &= \epsilon X_i = Y_i. \end{aligned} \quad (65)$$

Από τις (62), (63) και (64), μπορεί να βρεθεί η σχέση μεταξύ παλιών και καινούριων σταθερών δομής. Καθώς μόνο τα διαγώνια στοιχεία του U είναι διάφορα του μηδενός, η σχέση μεταξύ παλιών και καινούριων σταθερών δομής γίνεται

$$C_{\mu,\nu}^\lambda = U_\mu^\mu U_\nu^\nu c_{\mu,\nu}^\lambda (U^{-1})_\lambda^\lambda. \quad (66)$$

Προκύπτει ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από το που ανήκουν τα μ, ν και λ , δηλαδή στο πάνω αριστερό ή κάτω δεξί μέρος του U . Έτσι, υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις για το συστολικό όριο.

$$C_{ij}^k = \epsilon \epsilon c_{ij}^k \epsilon^{-1} = \epsilon c_{ij}^k \rightarrow 0 \quad (67)$$

$$C_{ij}^\alpha = \epsilon \epsilon c_{ij}^\alpha 1 = \epsilon^2 c_{ij}^\alpha \rightarrow 0 \quad (68)$$

$$C_{\alpha i}^j = 1 \epsilon c_{\alpha i}^j \epsilon^{-1} = c_{\alpha i}^j \quad (69)$$

$$C_{\alpha i}^\beta = 1 \epsilon c_{\alpha i}^\beta 1 = \epsilon c_{\alpha i}^\beta \rightarrow 0 \quad (70)$$

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = 1 1 c_{\alpha\beta}^\gamma 1 = c_{\alpha\beta}^\gamma \quad (71)$$

$$C_{\alpha\beta}^i = 1 1 c_{\alpha\beta}^i \epsilon^{-1} = \frac{1}{\epsilon} c_{\alpha\beta}^i. \quad (72)$$

Η τελευταία συγκλίνει μόνο εάν $c_{\alpha\beta}^i = 0$, έτσι, $C_{\alpha\beta}^i = 0$. Από την παραπάνω σειρά εξισώσεων, οι τελευταίες δύο δηλώνουν ότι τα X_α και Y_α που είναι κλειστά κάτω από μετάθεση, καλύπτουν υποομάδες των G και G' αντίστοιχα. Η τρίτη από το τέλος δηλώνει ότι τα Y_i καλύπτουν μια αναλλοίωτη υποομάδα της G' , η οποία είναι επίσης αβελιανή, (προερχόμενη από την πρώτη εξίσωση).

Οι συστολές της $SU(3)$ προς την $R^5[SO(3)]$ και της $O(6)$ προς την $R^5[SO(5)]$ βασίζονται στην ιδέα τη συστολής των ομάδων των Inönü και Wigner και συζητώνται με περισσότερη λεπτομέρεια στα παραρτήματα Z και H , αντίστοιχα.

Παράρτημα Ζ

Η συστολή $SU(3) \rightarrow [R^5]SO(3)$

Η συστολή $SU(3) \rightarrow [R^5]SO(3)$ έχει μελετηθεί στις αναφορές [110, 111]. Είναι η διαδικασία κατά την οποία η $SU(3)$ άλγεβρα, που αποτελείται από 8 γεννήτορες που δε μετατίθενται, ανάγεται σε μία $SO(3)$ άλγεβρα (που αποτελείται από τρεις γεννήτορες που δε μετατίθενται), που συνοδεύεται από πέντε αμοιβαίως μετατιθέμενους τελεστές (τους τετραπολικούς τελεστές). Αυτή η απλοποίηση συμβαίνει στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων, στο οποίο, στην $SU(3)$, όλες οι διεγέρσεις αυξάνουν σε ενέργεια, απομονώνοντας τη θεμελιώδη κατάσταση, έτσι ώστε η $SU(3)$ τείνει προσεγγιστικά στον απλό συμπαγή περιστροφέα. Η προκύπτουσα αλγεβρική δομή, είναι πράγματι γνωστή, [152] ως η άλγεβρα του συμπαγούς περιστροφέα. Εδώ, χρησιμοποιείται η κλίμακα της αναφοράς [6]. (Ο τετραπολικός τελεστής των αναφορών [110, 111] είναι $2\sqrt{2}$ φορές τον τετραπολικό τελεστή της αναφοράς [6].)

Οι σχέσεις μετάθεσης της $SU(3)$ γράφονται

$$[\hat{L}_\xi, \hat{L}_\nu] = -\sqrt{2}(1\xi 1\nu | 1\xi + \nu) \hat{L}_{\xi+\nu}, \quad (73)$$

$$[\hat{L}_\xi, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = -\sqrt{6}(1\xi 2\nu | 2\xi + \nu) \hat{Q}_{SU(3),\xi+\nu}^{(2)}, \quad (74)$$

$$[\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}(2\xi 2\nu | 1\xi + \nu) \hat{L}_{\xi+\nu}. \quad (75)$$

Ο τελεστής Casimir δεύτερης τάξης είναι

$$\hat{C}_2[SU(3)] = \frac{2}{3} \left[2\hat{Q}_{SU(3)} \cdot \hat{Q}_{SU(3)} + \frac{3}{4} \hat{L} \cdot \hat{L} \right], \quad (76)$$

ενώ οι ιδιοτιμές του στη βάση του Elliott, (λ, μ) , είναι

$$C_2(\lambda, \mu) = \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu). \quad (77)$$

Εάν θεωρήσουμε, για παράδειγμα, $SU(3)$ μ.α.α. με μεγάλες τιμές του $C_2(\lambda, \mu)$ - δηλαδή για μεγάλους αριθμούς μποζονίων- μπορούμε να αναπροσαρμόσουμε τον τετραπολικό

τελεστή ως

$$\hat{q}_{SU(3),\xi}^{(2)} = \frac{\hat{Q}_{SU(3),\xi}^{(2)}}{\sqrt{C_2(\lambda, \mu)}}. \quad (78)$$

Οι πρώτες δύο σχέσεις μετάθεσης μένουν ίδιες από την αναπροσαρμογή, ενώ η τελευταία γίνεται

$$[\hat{q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} (2\xi 2\nu | 1\xi + \nu) \frac{\hat{L}_{\xi+\nu}}{C_2(\lambda, \mu)}. \quad (79)$$

Τότε, στο όριο των μεγάλων τιμών του $C_2(\lambda, \mu)$, προκύπτει

$$[\hat{q}_{SU(3),\xi}^{(2)}, \hat{q}_{SU(3),\nu}^{(2)}] = 0. \quad (80)$$

Αυτό το αποτέλεσμα, που προκύπτει για μεγάλο αριθμό μποζονίων, ονομάζεται συστολή της $SU(3)$ στην $[R^5]SO(3)$, όπου $[R^5]SO(3)$ είναι η άλγεβρα του συμπαγούς περιστροφέα [152], που παράγεται από του τελεστές στροφορμής της $SO(3)$ και τους πέντε μετατιθέμενους τελεστές $\hat{q}_{SU(3),\xi}^{(2)}$, $\xi = -2, -1, 0, 1, 2$. Άμεση συνέπεια των Εξ. (76) και (77) είναι ότι, στο συστολικό όριο, όροι ανάλογοι της στροφορμής \hat{L} μπορούν να αγνοηθούν. Στο πλαίσιο του IBM, στο οποίο το \hat{L} είναι ανάλογο του $(d^\dagger \tilde{d})^{(1)}$, όπως φαίνεται στην Εξ. (4.4), αυτό υποδηλώνει ότι οι όροι $(d^\dagger \tilde{d})^{(1)}$ μπορούν να αγνοηθούν.

Στο όριο των μεγάλων τιμών των $C_2(\lambda, \mu)$ και $\lambda \geq \mu$, οι εσωτερικές τετραπολικές ροπές γίνονται [111, 153]

$$q_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\lambda + \mu + 3), \quad q_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3(\mu - K)(\mu + K + 2)}, \quad (81)$$

όπου K είναι η ιδιοτιμή της προβολής της στροφορμής στον άξονα z , για το οποίο ισχύει $K \leq L$, όπως φαίνεται από τον αλγόριθμο της αναγωγής $SU(3) \supset SO(3)$ [6]. (Ας θυμηθούμε σε αυτό το σημείο, ότι ο τετραπολικός τελεστής των αναφορών [110, 111, 153] είναι $2\sqrt{2}$ φορές ο τετραπολικός τελεστής που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.) Για καταστάσεις με $\lambda \gg L$ (και ως εκ τούτου $\lambda \gg K$) και $\lambda \gg \mu$, προκύπτει [110]

$$q_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \quad (82)$$

ενώ το q_2 γίνεται αμελητέο. Καθώς η ζώνη θεμελιώδους κατάστασης ανήκει στη $(2N, 0)$ μ.α.α. της $SU(3)$, ενώ άλλες χαμηλοενεργειακές ζώνες ανήκουν στις $(2N - 4i - 6j, 2i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, 2, \dots$, μ.α.α. με σχετικά χαμηλά i, j , η συστολή συμβαίνει στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων N . Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση που μας ενδιαφέρει, η ενδογενής τετραπολική ροπή γίνεται

$$q_0 = N\sqrt{2}. \quad (83)$$

Μία ισοδύναμη δήλωση είναι ότι ο τελεστής $\hat{Q}_{SU(3)}^{(2)}$ μπορεί προσεγγιστικά να αντικατασταθεί από το βαθμωτό $\lambda/\sqrt{2}$, όπως φαίνεται από τις Εξ. (76) και (77), καθώς οι

όροι που περιέχουν \hat{L} και μ είναι αμελητέοι σε αυτό το όριο, έχοντας ως αποτέλεσμα μόνο ο πρώτος όρος στη δεξιά μέρος αυτών των εξισώσεων να επιβιώνει.

Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν προκύψει για μ.α.α. με $\lambda \gg L$, οπότε, αντιστοιχούν στο χαμηλό μέρος του φάσματος.

Στην $SU(3)$, οι μ.α.α. χτίζονται από την $(2,0)$ μ.α.α, ενώ στην περίπτωση της $\overline{SU(3)}$ οι μ.α.α. χτίζονται από την $(0,2)$ μ.α.α. [6]. Σαν αποτέλεσμα, στο $\overline{SU(3)}$ πλαίσιο ενδιαφερόμαστε για καταστάσεις με μεγάλες τιμές του $C_2(\lambda, \mu)$ και $\lambda < \mu$, στις οποίες οι ενδογενείς τετραπολικές ροπές γίνονται [110, 111]

$$q_0 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(2\lambda + \mu + 3), \quad q_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{3(\mu - K)(\mu + K + 2)}, \quad (84)$$

Για καταστάσεις με $\mu \gg L$ και $\mu \gg \lambda$, προκύπτει

$$q_0 = -\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \quad (85)$$

ενώ το q_2 γίνεται αμελητέο. Καθώς η ζώνη θεμελιώδους κατάστασης ανήκει στη $(0, 2N)$ μ.α.α. της $SU(3)$, ενώ άλλες χαμηλοενεργειακές καταστάσεις ανήκουν στις μ.α.α. $(2i, 2N - 4i - 6j)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, 2, \dots$ με σχετικά χαμηλά i, j , η συστολή πράγματι συμβαίνει στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων, με την ενδογενή τετραπολική ροπή να γίνεται

$$q_0 = -N\sqrt{2}. \quad (86)$$

Καθώς η $SU(3)$ σχετίζεται με ωειδή σχήματα, ενώ η $\overline{SU(3)}$ σχετίζεται με πεπλατυσμένα ως προς τους πόλους σχήματα, τα πρόσημα στις Εξ. (83) και (86) είναι συνεπή με το γεγονός ότι οι ενδογενείς τετραπολικές ροπές είναι θετικές για ωειδείς πυρήνες και αρνητικές για πεπλατυσμένους ως προς τους πόλους πυρήνες [14].

Παράρτημα Η

Η συστολή $O(6) \rightarrow [R^5]SO(5)$

Παρόμοια διαδικασία με αυτή του παραρτήματος Ε ακολουθείται για τη συστολή της $O(6)$ προς την $[R^5]SO(5)$ [112, 113]. Αυτή είναι μια διαδικασία κατά την οποία η άλγεβρα $O(6)$, αποτελούμενη από 15 μη μετατιθέμενους γεννήτορες, ανάγεται σε μια $SO(5)$ άλγεβρα (αποτελούμενη από 10 μη μετατιθέμενους γεννήτορες), συνοδευόμενη από 5 αμοιβαίως μετατιθέμενους τελεστές (τους τετραπολικούς τελεστές). Η προκύπτουσα αλγεβρική δομή είναι γνωστή [113] ως η άλγεβρα του γ -ασταθούς περιστροφέα.

Οι σχέσεις μετάθεσης των τετραπολικών τελεστών γράφονται

$$[\hat{Q}_{O(6),\xi}^{(2)}, \hat{Q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = 2 \sum_{k=1,3} (2\xi 2\nu | k\xi + \nu) (d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k)}. \quad (87)$$

Ο τελεστής Casimir δεύτερης τάξης είναι [6]

$$\hat{C}_2[O(6)] = 2\hat{Q}_{O(6)}^{(2)} \cdot \hat{Q}_{O(6)}^{(2)} + 4 \sum_{k=1,3} (d^\dagger \tilde{d})^{(k)} \cdot (d^\dagger \tilde{d})^{(k)}. \quad (88)$$

Οι ιδιοτιμές του είναι

$$C_2(\sigma) = 2\sigma(\sigma + 4), \quad (89)$$

όπου σ είναι ο χβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(6)$.

Εάν θεωρήσουμε $O(6)$ μ.α.α. με μεγάλο σ , μπορούμε να αναπροσαρμόσουμε τους τετραπολικούς τελεστές ως

$$\hat{q}_{O(6),\xi}^{(2)} = \frac{\hat{Q}_{O(6),\xi}^{(2)}}{\sqrt{C_2(\sigma)}}. \quad (90)$$

Τότε, οι σχέσεις μετάθεσης των τετραπολικών τελεστών γίνονται

$$[\hat{q}_{O(6),\xi}^{(2)}, \hat{q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = 2 \sum_{k=1,3} (2\xi 2\nu | k\xi + \nu) \frac{(d^\dagger \tilde{d})_{\xi+\nu}^{(k)}}{C_2[\sigma]}. \quad (91)$$

Έτσι, στο όριο του μεγάλου σ (και μικρού τ , όπου τ είναι ο χβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(5)$) [113] προκύπτει

$$[\hat{q}_{O(6),\xi}^{(2)}, \hat{q}_{O(6),\nu}^{(2)}] = 0. \quad (92)$$

Η διαδικασία ονομάζεται συστολή της $O(6)$ προς την $[R^5]SO(5)$, όπου η $[R^5]SO(5)$ είναι η άλγεβρα του γ -ασταθούς περιστροφέα, που δημιουργείται από του τελεστές της $SO(5)$ και τους πέντε μετατιθέμενους τελεστές $q_{O(6),\xi}^{(2)}$, $\xi = -2, -1, 0, 1, 2$, που είναι οι συντεταγμένες [113].

Άμεση επίπτωση των Εξ. (88) και (89) είναι ότι, στο συστολικό όριο, όροι ανάλογοι του $(d^\dagger \tilde{d})^{(k)}$ μπορούν να αγνοηθούν.

Η πιο κυρίαρχη μ.α.α. της $O(6)$, στην οποία ανήκει η θεμελιώδης ζώνη, είναι η (N) . Έτσι, στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων, είναι κατάλληλο να χρησιμοποιηθεί αυτή η συστολή. Η ενδογενής τετραπολική ροπή θα είναι τότε

$$q'_0 = \sigma, \quad (93)$$

όπως φαίνεται από τις Εξ. (88) και (89). Έτσι, στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει, η ενδογενής τετραπολική ροπή γίνεται

$$q'_0 = N. \quad (94)$$

Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν προκύψει για μ.α.α. με $\sigma \gg \tau$, οπότε αντιστοιχούν στο χαμηλό μέρος του φάσματος (καθώς $L \leq 2\tau$, καθώς φαίνεται από τον αλγόριθμο αναγωγής $SO(5) \supset SO(3)$ [6]).

Παράρτημα Θ

Μια εναλλακτική βάση

Τα διανύσματα Nilsson που χρησιμοποιήθηκαν στην Εξ. (5.7) μπορούν εύκολα να εκφραστούν με όρους ολικής στροφορμής j

$$|Nl\Lambda\Sigma\rangle = \sum_j (l\Lambda \frac{1}{2}\Sigma |j\Omega\rangle) |Nlj\Omega\rangle, \quad (95)$$

όπου ο συντελεστής Clebsch-Gordan φαίνεται στο δεξί μέρος.

Το ανάπτυγμα της Εξ. (5.7) μπορεί να γραφτεί ως

$$\chi_{N\Omega} = \sum_{lj} \left[\Sigma_{\Lambda} a_{l\Lambda}^{\Omega} (l\Lambda \frac{1}{2}\Sigma |j\Omega\rangle) \right] |Nlj\Omega\rangle. \quad (96)$$

Βασικά, το άθροισμα πάνω στα l μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό φαίνεται με τον εξής τρόπο. Η κυματοσυνάρτηση $\chi_{N\Omega}$ υποτίθεται ότι έχει συγκεκριμένη ομοτιμία. Όπως φαίνεται από την Εξ. (5.9), η ομοτιμία των διανυσμάτων του δεξιού μέρους της Εξ. (5.7) ορίζεται από τη σφαιρική αρμονική. Σα συνέπεια, μόνο άρτιες ή μόνο περιττές τιμές του l μπορούν να προκύψουν στο ανάπτυγμα. Καθώς $j = l \pm \frac{1}{2}$, βλέπουμε ότι το j και η ομοτιμία της $\chi_{N\Omega}$ καθορίζουν ποιες δύο πιθανές τιμές του l θα συνεισφέρουν.

Το ανάπτυγμα της Εξ. (95) μπορεί εύκολα να αντιστραφεί

$$|Nlj\Omega\rangle = \sum_{\Sigma} (l\Lambda \frac{1}{2}\Sigma |j\Omega\rangle) |Nl\Lambda\Sigma\rangle, \quad (97)$$

όπου δεν υπάρχει άθροιση πάνω στο Λ , καθώς $\Omega = \Lambda + \Sigma$.

Δίνουμε ένα παράδειγμα του πως κάποιος πηγαίνει από τη μία βάση στην άλλη. Στο κώδικα Nilsson που χρησιμοποιήθηκε, τα αποτελέσματα βρίσκονται στην $|Nlj\Omega\rangle$ βάση, για παραμόρφωση $\epsilon_2 = 0.22$.

Το ανάπτυγμα που προκύπτει για το $\frac{1}{2}[550]$ επίπεδο είναι

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}[550] \right\rangle = & -0.0132 \left| 51 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + 0.0692 \left| 51 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - 0.0179 \left| 53 \frac{5}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ & + 0.2966 \left| 53 \frac{7}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - 0.0258 \left| 55 \frac{9}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + 0.9519 \left| 55 \frac{11}{2} \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (98)$$

Το τροχιακό $|\frac{1}{2}[550]\rangle$ έχει περιττή ομοτιμία. Έτσι, μόνο περιττές τιμές του l θα εμφανιστούν στο δεξί μέρος της εξίσωσης. Για παράδειγμα, στον όρο με $j = 5/2$, οι πιθανές τιμές του l είναι $l = 2, 3$, καθώς $s = 1/2$. Από αυτές, μόνο η $l = 3$ είναι επιτρεπτή. Έτσι, το σχετικό διάνυσμα γράφεται, $|\frac{1}{2}[53\frac{5}{2}]\rangle$.

Από την άλλη, στο πρωτότυπο άρθρο του Nilsson [1] το ίδιο τροχιακό $\frac{1}{2}[550]$ αναπτύσσεται σε όρους του $|N\Lambda\Sigma\rangle$ διανύσματος ως

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}[550]\right\rangle_{\eta=4} &= 1.000 \left|550\frac{1}{2}\right\rangle + 0.479 \left|530\frac{1}{2}\right\rangle + 0.183 \left|510\frac{1}{2}\right\rangle \\ &+ 0.843 \left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.343 \left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.071 \left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \quad (99)$$

Οι αριθμητικοί συντελεστές αντιστοιχούν σε $\eta = 4$. Για $\eta = 2$ τα ανάπτυγμα γράφεται

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}[550]\right\rangle_{\eta=2} &= 1.000 \left|550\frac{1}{2}\right\rangle + 0.237 \left|530\frac{1}{2}\right\rangle + 0.046 \left|510\frac{1}{2}\right\rangle \\ &+ 0.888 \left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.192 \left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.024 \left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \quad (100)$$

Προκειμένου να συγκρίνουμε τα δύο αποτελέσματα και προκειμένου να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον χώρο διαμόρφωσης των ιδιοκαταστάσεων που περιγράφηκε στην Ενότητα 2, πρέπει να αναπτύξουμε τα διανύσματα που φαίνονται στην Εξ. (98) σε όρους των διανυσμάτων που φαίνονται στις Εξ. (99) και (100). Για παράδειγμα, κάποιος έχει,

$$\left|55\frac{11}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left(50\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left|\frac{11}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|550\frac{1}{2}\right\rangle + \left(51\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{11}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle. \quad (101)$$

Η εξήγηση του να γράφει κάποιος αυτήν την εξίσωση είναι η ακόλουθη. Από το αριστερό μέρος της εξίσωσης γνωρίζουμε ότι $N = 5$, $j = 11/2$, $\Omega = 1/2$. Καθώς η ομοτιμία πρέπει να είναι περιττή, από τις πιθανές τιμές του $l = 5, 6$, μόνο η $l = 5$ επιτρέπεται. Έτσι, στο δεξί μέρος, το άθροισμα περιορίζεται μόνο πάνω στο Σ . Καθώς $\Omega = \Lambda + \Sigma$ και $\Omega = 1/2$, έχουμε μόνο δύο όρους: ($\Lambda = 0, \Sigma = 1/2$) και ($\Lambda = 1, \Sigma = -1/2$).

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει

$$\left|55\frac{9}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left(50\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|550\frac{1}{2}\right\rangle + \left(51\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (102)$$

$$\left|53\frac{7}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left(30\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left|\frac{7}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|530\frac{1}{2}\right\rangle + \left(31\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{7}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (103)$$

$$\left|53\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left(30\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|530\frac{1}{2}\right\rangle + \left(31\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right.\right) \left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (104)$$

$$\left|51\frac{31}{22}\right\rangle = \left(10\frac{11}{22}\left|\frac{31}{22}\right.\right)\left|510\frac{1}{2}\right\rangle + \left(11\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{31}{22}\right.\right)\left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (105)$$

$$\left|51\frac{11}{22}\right\rangle = \left(10\frac{11}{22}\left|\frac{11}{22}\right.\right)\left|510\frac{1}{2}\right\rangle + \left(11\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{11}{22}\right.\right)\left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle. \quad (106)$$

Εν συνεχεία προκύπτει

$$\left|55\frac{111}{22}\right\rangle = 0.7385\left|550\frac{1}{2}\right\rangle + 0.6742\left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (107)$$

$$\left|55\frac{91}{22}\right\rangle = -0.6742\left|550\frac{1}{2}\right\rangle + 0.7385\left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (108)$$

$$\left|53\frac{71}{22}\right\rangle = 0.7559\left|530\frac{1}{2}\right\rangle + 0.6547\left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (109)$$

$$\left|53\frac{51}{22}\right\rangle = -0.6547\left|530\frac{1}{2}\right\rangle + 0.7559\left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (110)$$

$$\left|51\frac{31}{22}\right\rangle = 0.8165\left|510\frac{1}{2}\right\rangle + 0.5774\left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle, \quad (111)$$

$$\left|51\frac{11}{22}\right\rangle = -0.5774\left|510\frac{1}{2}\right\rangle + 0.8165\left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle. \quad (112)$$

Αντικαθιστώντας αυτά τα αποτελέσματα στην Εξ. (98) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}[550]\right\rangle &= 0.7204\left|550\frac{1}{2}\right\rangle + 0.2359\left|530\frac{1}{2}\right\rangle + 0.0641\left|510\frac{1}{2}\right\rangle \\ &+ 0.6227\left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.1806\left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.0292\left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \quad (113)$$

Το διάνυσμα της Εξ. (113) κανονικοποιείται στο 1, ενώ τα διανύσματα των Εξ. (99), (100) όχι (κανονικοποιούνται αντάυτου στους συντελεστές του πρώτου διανύσματος του αναπτύγματος). Πορκειμένου να γίνουν πιο εύκολες οι συγκρίσεις, κανονικοποιούμε (113) κατά τον ίδιο τρόπο (διαιρώντας τους συντελεστές με το 0.7204), παίρνοντας

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}[550]\right\rangle &= 1.000\left|550\frac{1}{2}\right\rangle + 0.327\left|530\frac{1}{2}\right\rangle + 0.089\left|510\frac{1}{2}\right\rangle \\ &+ 0.864\left|551 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.251\left|531 - \frac{1}{2}\right\rangle + 0.040\left|511 - \frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \quad (114)$$

Βιβλιογραφία

- [1] S. G. Nilsson, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk. **29**, 16 (1955)
- [2] J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. Lon. **245**, 128 (1958).
- [3] R. D. Ratna Raju, J. P. Draayer, K. T. Hecht, Nucl. Phys. A **202**, 433 (1973).
- [4] J. P. Draayer, K. J. Weeks, Ann. Phys. (NY) **156**, 41 (1984).
- [5] A. Bohr, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk. **26**, no.14 (1952).
- [6] F. Iachello and A. Arima, The interacting boson model, Cambridge University Press, (1987).
- [7] D. Bonatsos, Interacting Boson Models of Nuclear Structure, Clarendon Press, (1987).
- [8] A. Arima and F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **35**, 1069 (1975).
- [9] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. **99**, 253 (1976).
- [10] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. **111**, 201 (1978).
- [11] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. **123**, 468 (1979).
- [12] P. Van Isacker, Rep. Prog. Phys. **62**, 1661 (1999).
- [13] M. Hamermesh, Group theory and its application to physical problems, Dover Publications, NY, (1962).
- [14] R. F. Casten, Nuclear Structure from a simple perspective, Oxford University Press, Oxford (1990).
- [15] F. Iachello, Lie Algebras and Applications (Springer Berlin Heidelberg, 2006).
- [16] N. V. Zamfir, P. von Brentano, R. F. Casten, J. Jolie, Phys. Rev. C **66**, 021304(P) (2002).
- [17] V. Werner, P. von Brentano, R.F. Casten, J. Jolie, Phys. Lett. B **527**, 55 (2002).

- [18] E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, R. F. Casten, Phys. Rev. C **69**, 064306 (2004).
- [19] R.F. Casten, Prog. Part. Nucl. Phys. **62**, 183 (2009).
- [20] D. H. Feng, R. Gilmore, S. R. Deans, Phys. Rev. C **23**, 1254 (1981).
- [21] J. N. Ginocchio, M. W. Kirson, Phys. Rev. Lett. **44**, 1744 (1980).
- [22] A. E. L. Dieperink, O. Scholten, F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **44**, 1747 (1980).
- [23] F. Iachello, N. V. Zamfir, R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **81**, 1191 (1998).
- [24] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **85**, 3580 (2000).
- [25] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **87**, 052502 (2001).
- [26] Y. Alhassid, N. Whelan, Phys. Rev. C **43**, 2637 (1991)
- [27] Y. Alhassid, N. Whelan, Phys. Rev. Lett. **67**, 816 (1991)
- [28] Y. Alhassid, N. Whelan, B. Lauritzen, Phys. Rev. Lett. **70**, 572 (1993)
- [29] N. Whelan, Y. Alhassid, Nucl. Phys. A **556**, 42 (1993)
- [30] N. Whelan, PhD thesis, Yale University (1993)
- [31] Y. Alhassid, A. Leviatan, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, L1265 (1992).
- [32] A. Leviatan, Phys. Rev. Lett. **77**, 818 (1996).
- [33] A. Leviatan, P. Van Isacker, Phys. Rev. Lett. **89**, 222501 (2002).
- [34] A. Leviatan, Phys. Rev. Lett. **98**, 242502 (2007).
- [35] A. Leviatan, Prog. Part. Nucl. Phys. **66**, 93 (2011).
- [36] D. J. Rowe, Phys. Rev. Lett. **93**, 122502 (2004).
- [37] D. J. Rowe, P. S. Turner, and G. Rosensteel, Phys. Rev. Lett. **93**, 232502 (2004).
- [38] D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **745**, 47 (2004).
- [39] P. S. Turner and D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **756**, 333 (2005).
- [40] G. Rosensteel and D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **759**, 92 (2005).
- [41] C. Kremer, J. Beller, A. Leviatan, N. Pietralla, G. Rainovski, R. Trippel, P. Van Isacker, Phys. Rev. C **89**, 041302(P) (2014).

- [42] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Classical Mechanics, (Addison Wesley, 2002),
kef. 11
- [43] Martin C. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, (Springer-
Verlag, New York, 1990)
- [44] Fritz Haake, Quantum Signatures of Chaos, (Springer-Verlag, 2010)
- [45] T. A. Brody, J. Flores, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong, Rev. Mod.
Phys. **53**, No. 3, 385 (1981)
- [46] O. Bohigas, H. A. Weidenmüller, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **38**, 421 (1988)
- [47] H. A. Weidenmüller, G. E. Mitchell, Rev. Mod. Phys. **81**, 539 (2009)
- [48] J. L. Rosen, J. S. Desjardins, J. Rainwater, W. W. Havens, Phys. Rev. **118**,
687 (1960)
- [49] J. L. Rosen, J. S. Desjardins, J. Rainwater, W. W. Havens, Phys. Rev. **120**,
2214 (1960)
- [50] C. E. Porter and N. Rosenzweig, Phys. Rev. **120**, 1698 (1960)
- [51] M. L. Mehta, Nucl. Phys. **18**, 395 (1960)
- [52] M. L. Mehta, M. Gaudin, Nucl. Phys. **18**, 420 (1960)
- [53] M. Gaudin, Nucl. Phys. **25**, 447 (1961)
- [54] R. G. Thomas, C. E. Porter, Phys. Rev. **104**, 483 (1956)
- [55] I. I. Gurevich , M. I. Pevsner, Nuclear Phys. **2**, 575 (1957)
- [56] E. P. Wigner, Ann. Math. **53**, 36 (1951)
- [57] E. P. Wigner, Ann. Math. **62**, 548 (1955)
- [58] E. P. Wigner, Ann. Math. **65**, 203 (1957)
- [59] E. P. Wigner, Ann. Math. **67**, 325 (1958)
- [60] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962)
- [61] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 157 (1962)
- [62] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 166 (1962)
- [63] F. J. Dyson and M. L. Mehta, J. Math. Phys. **4**, 701 (1963)
- [64] M. L. Mehta and F. J. Dyson, J. Math. Phys. **4**, 713 (1963)

- [65] J. Von Neumann, E. P. Wigner, Phys. Z. **30**, 467 (1929)
- [66] H. S. Camarda, P. D. Georgopoulos, Phys. Rev. Lett. **50**, 7 (1983)
- [67] O. Bohigas, M. J. Giannoni, C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984)
- [68] M.R. Schroeder, J. Audio Eng. Soc. **35**, 307 (1987)
- [69] H. J. Stöckmann, J. Stein, Phys. Rev. Lett. **64**, 2215 (1990)
- [70] H. Alt, H. D. Gräf, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, P. Schart, H. A. Weidenmüller, Phys. Rev. Lett. **74**, 62 (1995)
- [71] H. Alt, H. D. Gräf, R. Hofferbert, C. Rangacharyulu, H. Rehfeld, A. Richter, P. Schart, A. Wirzba, Phys. Rev. E **54**, 2303 (1996)
- [72] Th. Zimmermann, H. Köppel, L. S. Cederbaum, C. Persch, W. Demtröder, Phys. Rev. Lett. **61**, 3 (1988)
- [73] G. Persch, E. Mehdizadeh, W. Demtröder, T. Zimmermann, L. S. Cederbaum, Ber. Bunsenges. Phys. Chem. **92**, 312 (1988)
- [74] H. Held, J. Schlichter, G. Raithel, H. Walther, Europhys. Lett. **43**, 392 (1998)
- [75] C. Ellegaard, T. Guhr, K. Lindemann, H.Q. Lorensen, J. Nygård, M. Oxborrow, Phys. Rev. Lett. **75**, 1546 (1995)
- [76] C. Ellegaard, T. Guhr, K. Lindemann, J. Nygård, M. Oxborrow, Phys. Rev. Lett. **77**, 4918 (1996)
- [77] P. So, S. M. Anlage, E. Ott, R. N. Oerter, Phys. Rev. Lett. **74**, 2662 (1995)
- [78] U. Stoffregen, J. Stein, H. J. Stockmann, M. Kus, F. Haake, Phys. Rev. Lett. **74**, 2666 (1995)
- [79] K. Sacha, J. Zakrzewski, D. Delande, Phys. Rev. Lett. **83**, 2922, (1999)
- [80] K. Sacha, Jour. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **33**, 2617, (2000)
- [81] A. Hoenig, D. Wintgen, Phys. Rev. A **39**, 5642 (1989)
- [82] M. Oxborrow, C. Ellegaard, In Proceedings of the 3rd Experimental Chaos Conference (Edinburgh, 1995)
- [83] S. Deus, P.M. Koch, L. Sirko, Phys. Rev. E **52**, 1146 (1995)
- [84] O. Legrand, C. Schmit, D. Sornette, Europhys. Lett. **18**, 101 (1992)
- [85] A. Pandey, Ann. Phys. **119**, 170 (1979)

- [86] R. U. Haq, A. Pandey, O. Bohigas, Phys. Rev. Lett. **48**, 1086 (1982)
- [87] M. V. Berry, Ann. Phys. **131**, 163 (1981)
- [88] M. V. Berry, M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 375 (1977)
- [89] Y. Alhassid, A. Novoselsky, Phys. Rev. C **45**, 4 (1992)
- [90] Y. Alhassid, R. D. Levine, Phys. Rev. Lett. **57**, 2879 (1986)
- [91] Y. Alhassid, M. Feingold, Phys. Rev. A **39**, 374 (1989)
- [92] J. Jolie, R. F. Casten, P. Cejnar, S. Heinze, E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **93**, 132501 (2004)
- [93] P. Cejnar, J. Jolie, Phys. Rev. E **58**, 387 (1998)
- [94] M. Macek, Jan Dobeš, P. Cejnar, Phys. Rev. C **80**, 014319 (2009)
- [95] M. Macek, J. Dobeš, and P. Cejnar, Phys. Rev. C **82**, 014308 (2010).
- [96] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **104**, 022502 (2010)
- [97] D. Bonatsos, S. Karampagia, R. F. Casten, Phys. Rev. C **83**, 054313 (2011)
- [98] M. Macek, P. Stránský, P. Cejnar, Phys. Rev. C **75**, 064318 (2007)
- [99] Y. Alhassid and N. Whelan, Phys. Rev. Lett. **67**, 816 (1991).
- [100] N. Whelan and Y. Alhassid, Nucl. Phys. A **556**, 42 (1993).
- [101] P. Cejnar and J. Jolie, Phys. Rev. E **58**, 387 (1998).
- [102] M. Macek, P. Stránský, P. Cejnar, S. Heinze, J. Jolie, and J. Dobeš, Phys. Rev. C **75**, 064318 (2007).
- [103] D. J. Rowe, Phys. Rev. Lett. **93**, 122502 (2004).
- [104] D. J. Rowe, Phys. Rev. Lett. **93**, 232502 (2004).
- [105] D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **745**, 47 (2004).
- [106] P. S. Turner and D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **756**, 333 (2005).
- [107] G. Rosensteel and D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **759**, 92 (2005).
- [108] M. Macek, J. Dobeš, and P. Cejnar, Phys. Rev. C **80**, 014319 (2009).
- [109] E. Īnónú and E. P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. (N.Y.) **39**, 510 (1953).

- [110] R. Le Blanc, J. Carvalho, and D. J. Rowe, Phys. Lett. B **140**, 155 (1984).
- [111] D. J. Rowe, Prog. Part. Nucl. Phys. **37**, 265 (1996).
- [112] J. Meyer-ter-Vehn, Phys. Lett. B **84**, 10 (1979).
- [113] J. P. Elliott, P. Park, and J. A. Evans, Phys. Lett. B **171**, 145 (1986).
- [114] E. A. McCutchan, Dennis Bonatsos, N. V. Zamfir, Phys. Rev. C , 034306 (2006).
- [115] A. Leviatan, A. Novoselsky, I. Talmi, Phys. Lett. B **172**, 144 (1986)
- [116] A. de-Shalit, M. Goldhaber, Phys. Rev. **92**, 1211 (1953)
- [117] I. Talmi, Rev. Mod. Phys. **34**, 704 (1962)
- [118] P. Federman, S. Pittel, Phys. Lett. B **69**, 385 (1977)
- [119] P. Federman, S. Pittel, Phys. Lett. B **77**, 29 (1978)
- [120] P. Federman, S. Pittel, Phys. Rev. C **20**, 820 (1979)
- [121] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, J. Skalski, T. Werner, Phys. Rev. Lett. **60**, 2254 (1988)
- [122] W. Nazarewicz, Prog. Part. Nucl. Phys. **28**, 307 (1992)
- [123] T. R. Werner, J. Dobaczewski, M. V. Guidry, W. Nazarewicz, J. A. Sheikh, Nucl. Phys. A **578**, 1 (1994)
- [124] P. Cejnar, J. Jolie, R. F. Casten, Rev. Mod. Phys. **82**, 2155 (2010)
- [125] R. F. Casten, D. S. Brenner, P. E. Haustein, Phys. Rev. Lett. **58**, 658 (1987)
- [126] R. Casten, Nuclear Structure from a Simple Perspective, (Oxford University Press, 2nd Edition, 2000)
- [127] M.G. Mayer, Phys. Rev. **78**, 16 (1950).
- [128] A. de Shalit and H. Feshbach, Theoretical Nuclear Physics Vol. I: Nuclear Structure (Wiley, New York, 1974).
- [129] M. Moshinsky, T. H. Seligman, and K. B. Wolf, J. Math. Phys. **13**, 901 (1972).
- [130] W. Greiner, *Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1989).
- [131] R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **54**, 1991 (1985)
- [132] R. F. Casten, K. Heyde, A. Wolf, Phys. Lett. B **208**, 33 (1988)

- [133] J.-Y. Zhang, R. F. Casten, D. S. Brenner, Phys. Lett. B **227**, 1 (1989)
- [134] P. Van Isacker, D. D. Warner, D. S. Brenner, Phys. Rev. Lett. **74**, 4607 (1995)
- [135] D. S. Brenner, R. B. Cakirli, R. F. Casten, Phys. Rev. C **73**, 034315 (2006)
- [136] D. S. Brenner, C. Wesselborg, R. F. Casten, E. A. Millman, Phys. Lett. B **243**, 1 (1990)
- [137] R. B. Cakirli, D. S. Brenner, R. F. Casten, E. A. Millman, Phys. Rev. Lett. **94**, 092501 (2005)
- [138] D. D. Warner, M. A. Bentley, P. Van Isacker, Nature Phys. **2**, 315 (2006)
- [139] R. B. Cakirli, R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **96**, 132501 (2006)
- [140] M. Stoitsov, R. B. Cakirli, R. F. Casten, W. Nazarewicz, W. Satula, Phys. Rev. Lett. **98**, 132502 (2007)
- [141] D. Neidherr *et al.* , Phys. Rev. C **80**, 044323 (2009)
- [142] L. Chen *et al.* , Phys. Rev. Lett. **102**, 122503 (2009)
- [143] D. Neidherr *et al.* , Phys. Rev. Lett. **102**, 112501 (2009)
- [144] M. Breitenfeldt *et al.* , Phys. Rev. C **81**, 034313 (2010)
- [145] R. B. Cakirli, K. Blaum, R. F. Casten, Phys. Rev. C **82**, 061304(P) (2010)
- [146] D. Bonatsos, S. Karampagia, R. B. Cakirli, R. F. Casten, K. Blaum, L. Amon Susam, Phys. Rev. C **88**, 054309 (2013)
- [147] S. Raman, C. W. Nestor, Jr., P. Tikkanen, At. Data Nucl. Data Tables **78**, 1 (2001).
- [148] G. Vanden Berghe, H. E. De Meyer, P. Van Isacker, Phys. Rev. C **32**, 1049 (1985).
- [149] R. J. Casperson, Comp. Phys. Commun. **183**, 1029 (2012)
- [150] A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, (Princeton University Press, Princeton, 1957).
- [151] Gilmore, Lie groups, lie algebras, and some of their applications (John Wiley and Sons, Inc, 1974).
- [152] H. Ui, Prog. Theor. Phys. **44**, 153 (1970).
- [153] D. J. Rowe, M. G. Vassanji, J. Carvalho, Nucl. Phys. A **504**, 76 (1989).