



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**ΣΥΛΛΟΓΙΚΑ ΠΥΡΗΝΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΜΕ ΜΑΖΑ
ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΑΚΡΙΒΩΣ
ΕΠΙΛΥΣΙΜΑ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ
ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Ε. ΓΕΩΡΓΟΥΔΗ

Πτυχιούχου Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΣ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Δ. ΜΠΟΝΑΤΣΟΣ

Δ/ντής Ερευνών ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος»

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟΣ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Γ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ

Αν. Καθ. ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, Μάιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΥΛΛΟΓΙΚΑ ΠΥΡΗΝΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ
ΜΕ ΜΑΖΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΗ
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ
ΕΠΙΛΥΣΙΜΑ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ
ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ
ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Ε. ΓΕΩΡΓΟΥΔΗ
Πτυχιούχου Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Γ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΙΑΣ: Αν. Καθ. ΕΜΠ
2. Δ. ΜΠΟΝΑΤΣΟΣ: Δ/ντής Ερευνών
ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος»
3. Κ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ: Αν. Καθ.
ΕΜΠ

**ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Μ. ΚΟΚΚΟΡΗΣ: Αν. Καθ. ΕΜΠ
2. Γ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΙΑΣ: Αν. Καθ. ΕΜΠ
3. Γ. ΛΑΛΑΖΗΣΗΣ: Καθ. ΑΠΘ
4. Ε. ΜΑΥΡΟΜΜΑΤΗ: Αν. Καθ. ΕΚΠΑ
5. Δ. ΜΠΟΝΑΤΣΟΣ: Δ/ντής Ερευνών
ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος»
6. Κ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ: Αν. Καθ. ΕΜΠ
7. Ε. ΦΛΩΡΑΤΟΣ: Καθ. ΕΚΠΑ

Αθήνα, Μάιος 2014

Περίληψη

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή η Χαμιλτονιανή του Bohr [1] τροποποιείται αφήνοντας τη παράμετρο μάζας να εξαρτάται από τη θέση (τετραπολική παραμόρφωση), ακολουθώντας τη μέθοδο των Quesne και Tkachuk [2]. Η ακριβής επιλυσιμότητα της προκύπτουσας Χαμιλτονιανής επιτυγχάνεται με μεθόδους υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [3, 4]. Αποδεικνύεται ότι για μια ειδική επιλογή των παραμέτρων της [2], η εξάρτηση της μάζας από τη θέση ισοδυναμεί με ένα παράγοντα συμμορφοποίησης (conformal factor). Με αυτό το τρόπο προτείνεται ένα γεωμετρικό πλαίσιο για την ανάλυση της σχέσης της Χαμιλτονιανής Bohr με το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων (Interacting Boson Model) [5] της πυρηνικής δομής.

Abstract

In this doctoral dissertation Bohr Hamiltonian [1] is modified by letting the mass parameter to depend on the position (quadrupole deformation), following the method of Quesne and Tkachuk [2]. The Exact solvability of the deformation-dependent mass Bohr Hamiltonian is achieved by supersymmetric quantum mechanics [3, 4]. It is proved that for a special choice of the parameters of [2], the dependence of the mass on the position is equivalent with a conformal factor. With this way a geometrical framework is proposed for the analysis of the relation of the Bohr Hamiltonian with the Interacting Boson Model [5] of nuclear structure.

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή αφιερώνεται με σεβασμό και ευγνωμοσύνη στο Δάσκαλό μου Ευστράτιο Χρ. Γεωργουδή, Δρα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών, που εκτός των άλλων μου δίδαξε και τις βασικές αρχές της επιστημονικής μεθόδου όπως αυτές διαμορφώθηκαν από το κύκλο της Βιέννης.

Αναγνωρίσεις

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Ινστιτούτο Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής του ΕΚΕΦΕ "Δημόκριτος" υπό την εποπτεία του Διευθυντή Ερευνών του ΕΚΕΦΕ "Δ" Διονύση Μπονάτσου. Για τις αμέτρητες χρήσιμες συζητήσεις και την ανελλιπή του παρουσία τον ευχαριστώ θερμά.

Η εκκίνηση της διατριβής προήλθε από πρόταση του Francesco Iachello, ο οποίος ανταποκρίθηκε άμεσα σε όλες τις στιγμές που οι συμβουλές και η συνεισφορά του ήταν απαραίτητη. Το ίδιο ισχύει και για τον Piet Van Isacker ο οποίος διαμόρφωσε καταλυτικά τη γεωμετρική προσέγγιση στην εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση. Η ολόψυχη ευχαριστία μου ίσως δεν μπορεί να συρρικνώσει τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση της διατριβής αυτής.

Σε όλη τη διάρκεια της διατριβής είχαμε συχνή επικοινωνία με τον Nikolay Minkov τον οποίο ευχαριστώ θερμά για τις πολλές χρήσιμες συζητήσεις ιδίως εκείνες που αφορούσαν τον υπολογισμό των τετραπολικών ρυθμών μετάβασης. Επίσης ευχαριστώ θερμά τη Cristianne Quesne για τη λύση πολλών προβλημάτων ιδίως στη κατασκευή των κυματοσυναρτήσεων και στο Davidson και στο Kratzer. Τον Δημήτρη Λένη ευχαριστώ ολόψυχα, όχι μόνο για την ουσιωδέστατη συνεισφορά του στις πρώτες τροποποιήσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση και τις πολλές χρήσιμες συζητήσεις, αλλά και για την ηθική του συμπαράσταση. Επίσης κατά τη διάρκεια των πρώτων υπολογισμών στη γεωμετρική προσέγγιση της εξαρτημένης μάζας από τη παραμόρφωση έλαβα χρήσιμα σχόλια από την Ανδριάννα Μαρτίνου και το Δημήτρη Πετρέλλη τους οποίους ευχαριστώ επίσης για το άριστο περιβάλλον εργασίας. Είμαι ακόμη ευγνώμων στον Γεώργιο Κουτσούμπα για τις χρήσιμες συζητήσεις που ξεκίνησαν στις παραδόσεις της κβαντικής θεωρίας πεδίου και συνεχίστηκαν καθ' όλη τη διάρκεια της διατριβής όπως επίσης και στο Κώστα Παπαδόπουλο για τη κριτική ανάγνωση του αρχικού χειμένου που διαμόρφωσε και τη παρούσα τελική του μορφή.

Στα πρώτα στάδια της διατριβής (2010-2011) είχα την ευκαιρία να κάνω αρκετά ταξίδια σε συνέδρια στο εξωτερικό, για τα οποία οφείλω να ευχαριστήσω τον τότε Διευθυντή του Ινστιτούτου Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής Πέτρο Ραπίδη για τη κάλυψη όλων των εξόδων. Σε αυτά αλλά και σε εκείνα που ακολούθησαν μέχρι και το 2014 πραγματοποιήθηκαν εξαιρετικά χρήσιμες συζητήσεις με πολλούς ανθρώπους. Δεν πρέπει να παραλείψω την αναγνώριση αλλά και τη δεδομένη ευχαριστία μου τουλάχιστον στους εξής: Τον Rostislav V. Jolos για τις συζητήσεις στο Adrasan και τη Dubna οι οποίες ήταν γόνιμες στην ανάδειξη της σχέσης της διατριβής αυτής και του τανυστή μάζας, που προκάλεσαν εν μέρει την αλλαγή της μετρικής του Bohr. Τον David J. Rowe για εκείνες που πραγματοποιήθηκαν στη La Rabida αλλά και τη μετέπειτα επικοινωνία μας και αφορούσαν τη σχέση της παρούσας διατριβής με το Αλγεβρικό Συλλογικό Μοντέλο, η οποία προκάλεσε την ανάδειξη της συμμετρίας $O(6)$. Ακόμη,

θα ήταν μεγάλη παράλειψη αν δεν ευχαριστήσω ολόψυχα τον Pedro Perez Fernandez για τις συζητήσεις που είχαμε στη La Rabida και τη Seville σχετικά με τη προοπτική ανάδειξης της conformality στα συλλογικά πρότυπα της πυρηνικής δομής.

Η αρωγή των γονέων μου και της αδερφής μου ήταν διαρκής που στο τελευταίο χρόνο εκτός από ηθική ήταν και υλική, ως εκ τούτου η συνεισφορά τους ήταν απλά ανεκτίμητη.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	17
2	Πρότυπο Bohr	21
2.1	Ταλαντώσεις πυρηνικής επιφάνειας	21
2.2	Χαμιλτονιανή του Bohr	24
2.2.1	Ασταθείς ως προς γ πυρήνες	26
2.2.2	Αξονικά συμμετρικοί επιμήκεις (prolate) πυρήνες	27
2.2.3	Τριαξονικοί πυρήνες	29
2.3	Ισοτροπικός Ταλαντωτής και κίνηση Kepler	30
2.3.1	Δυναμικό Davidson	30
2.3.2	Δυναμικό Kratzer	32
2.4	Η παράμετρος μάζας	33
3	Μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση	35
3.1	Η μελέτη των C. Quesne και V. Tkachuk	35
3.1.1	Εξίσωση Schrodinger με μάζα εξαρτημένη από τη θέση	36
3.2	Μάζα εξαρτημένη από τη θέση σε σφαιρικές συντεταγμένες	38
3.3	Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση	39
3.3.1	Ακτινική εξίσωση	40
3.4	Αλγεβρική επιλυσιμότητα	41
3.5	Λύσεις στο δυναμικό Davidson	44
3.5.1	Το φάσμα	45
3.5.2	Οι Κυματοσυναρτήσεις	47
3.5.3	Η Βασική Κατάσταση	47
3.5.4	Διεγερμένες Καταστάσεις	48
3.5.5	Συντελεστής Κανονικοποίησης	49
3.6	Λύσεις στο δυναμικό Kratzer	50
3.6.1	Η βασική κατάσταση	52
3.6.2	Διεγερμένες καταστάσεις	53
3.6.3	Συντελεστής Κανονικοποίησης	54
3.7	Ανασκόπηση	55

4	Η φαινομενολογία	59
4.1	Προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα	60
4.2	Δυναμικό Davidson	61
4.2.1	Ασταθείς ως προς γ πυρήνες	61
4.2.2	Αξονικά συμμετρικοί επιμήκεις πυρήνες	62
4.3	Δυναμικό Kratzer	63
4.3.1	Ασταθείς ως προς γ πυρήνες	63
4.3.2	Αξονικά συμμετρικοί επιμήκεις πυρήνες	64
4.4	Ρυθμοί Μετάβασης B(E2)	66
4.4.1	Ρυθμοί μετάβασης στο Davidson	67
4.4.2	Ρυθμοί μετάβασης στο Kratzer	68
4.5	Σχήματα και Πίνακες αριθμητικών αποτελεσμάτων	68
5	Ροπές αδρανείας και η σχέση με το IBM	101
5.1	Τα διδάγματα από τους Quesne-Tkachuk	101
5.2	Ενσωμάτωση σε έξι διαστάσεις	103
5.3	Η $O(6)$ και το IBM	105
5.4	Χαμιλτονιανή Bohr στην S_5 και από τη προβολή της	106
5.5	E(5)	107
6	Συμπεράσματα	111
A'	Γενίκευση της ταυτότητας της Quesne	115
A'.1	Εξίσωση Schroedinger με μάζα εξαρτημένη από τη θέση σε σφαιρικές συντεταγμένες	115
A'.2	Εξίσωση του Schroedinger σε σύμμορφες συντεταγμένες	117
B'	Υπολογισμοί στο Kratzer	121
B'.1	Οι παράμετροι του Kratzer	121
B'.2	Κυματοσυναρτήσεις στο όριο $a \rightarrow 0$	128

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Το δυναμικό Davidson $V(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$ και το αναλλοίωτο της μορφής του (Shape invariance) κάτω από τη μετατόπιση της παραμέτρου του.	31
2.2	Το δυναμικό Kratzer $V(\beta) = \frac{-A}{\beta} + \frac{A^2 B}{\beta^2}$ και το αναλλοίωτο της μορφής του (Shape invariance) κάτω από τη μετατόπιση της παραμέτρου του B . Η παράμετρος A έχει τεθεί ίση με τη μονάδα, δείτε το Παράρτημα Β' για το πώς η A επηρεάζει τη κλίμακα τιμών του β	32
3.1	Οι υπερσυμμετρικοί σύντροφοι.	42
4.1	Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{110}Cd από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson (αριστερά) στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)], βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.1 για το ^{110}Cd και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.8 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.8 για το ^{110}Cd	69
4.2	Ομοίως με το σχήμα 4.1, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{118}Xe από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson.	70
4.3	Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{110}Cd από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer (αριστερά) στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)], βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.1 για το ^{110}Cd και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.8 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.8 για το ^{110}Cd	71
4.4	Ομοίως με το σχήμα 4.3, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{118}Xe από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer.	72

- 4.5 Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{162}Dy από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson (αριστερά), για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)] βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.2 για το ^{162}Dy και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.9 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.9 για το ^{162}Dy 73
- 4.6 Ομοίως με το σχήμα 4.5, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{238}U από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson. 74
- 4.7 Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{170}Er από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer (αριστερά), για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)] βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.5 για το ^{170}Er και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.11 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.11 για το ^{170}Er 75
- 4.8 Ομοίως με το σχήμα 4.7, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{232}Th από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer. 76
- 4.9 Ενεργά δυναμικά Kratzer της (3.93) της Χαμιλτονιανής Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για $L = 4$ για κάποια ισότοπα του Xe (a) και του Ba (b), τα οποία αντιστοιχούν στις παραμέτρους του πίνακα 4.4. Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.1. 77
- 4.10 Ομοίως, εξάρτηση των ενεργών δυναμικών Kratzer της (3.93) με τη παράμετρο a (a) και τη τροχιακή στροφορμή L (b). Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Τα ενεργά δυναμικά για τη κατάσταση με $L = 4$ της βασικής ζώνης του ^{130}Xe (ανταποκρινόμενο στις παραμέτρους του πίνακα 4.5), που έχει σχεδιαστεί και στα δύο μέρη, χρησιμοποιείται για τη σύγκριση. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.1. 77
- 4.11 Ενεργά δυναμικά Kratzer της (3.93) της $L = 4$ για κάποια ισότοπα του Gd (a) και του Dy (b), τα οποία αντιστοιχούν στις παραμέτρους του πίνακα 4.5. Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.2. 78
- 4.12 Ενεργά δυναμικά Kratzer της (3.93) της $L = 4$ για τα ισότοπα της περιοχής $N = 90$, ως καλά παραδείγματα της συμμετρίας κρίσιμου σημείου X(5), τα οποία ανταποκρίνονται στις παραμέτρους του πίνακα 4.5. Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.2. 78

- 4.13 Εξάρτηση των ενεργών δυναμικών Kratzer της (3.93) με τη παράμετρο a (a) και τη τροχιακή στροφορμή L (b). Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Τα ενεργά δυναμικά για τη κατάσταση με $L = 4$ της βασικής ζώνης για το ^{154}Gd (ανταποκρινόμενες στις τιμές του πίνακα 4.5), σχεδιαζόμενα και στα δύο μέρη, χρησιμοποιείται ως βάση για τη σύγκριση. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.2. 79
- 5.1 Η συνάρτηση $\frac{\beta^2}{f^2(\beta)} = \frac{\beta^2}{(1+a\beta^2)^2}$, στην οποία είναι ανάλογες οι ροπές αδρανείας, ως προς τη β , για διάφορες τιμές της a 102
- 5.2 Οι ροπές αδρανείας $\Theta(L)$ για τη βασική ζώνη, κανονικοποιημένη ως προς τη $\Theta(2)$ για $\beta_0 = 2, c = 5$ και διάφορες τιμές της a 103
- 5.3 Τιμές της a για τα ισότοπα του Xe και του Ba, τα δεδομένα ελήφθησαν από το Πίνακα 4.1. 108

Κατάλογος Πινάκων

4.1	Σύγκριση των θεωρητικών προβλέψεων της ασταθούς ως προς γ Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson ($\delta = \lambda = 0$) με τα πειραματικά δεδομένα [87] για τις σπάνιες γαιές και τους ακτινίδες με $R_{4/2} \leq 2.6$ και γνωστές τις καταστάσεις 0_2^+ και 2_7^+ . Παρουσιάζονται οι λόγοι $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, όπως επίσης και οι χαμηλότερες ενεργειακά καταστάσεις των ζωνών β και γ (τα bandheads), κανονικοποιημένες στη κατάσταση 2_1^+ και ταξινομούνται από $R_{0/2} = E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ και $R_{2/2} = E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ αντίστοιχα. Οι παράμετροι β_0 και a είναι ελεύθερες, σχετιζόμενες με το δυναμικό του Davidson και με την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση αντίστοιχα. Οι τροχιακές στροφορμές των υψηλότερων επιπέδων της βασικής ζώνης καθώς και των ζωνών β και γ , περιλαμβάνονται στη προσαρμογή (fit) μέσω των τετραγώνων, ταξινομούνται από L_β , L_β , και L_γ αντίστοιχα, ενώ το n δηλώνει το συνολικό αριθμό των ενεργειακών επιπέδων που περιλαμβάνονται στο fit και σ είναι το μέτρο ποιότητας της Εξ. (4.3). Δείτε το εδάφιο 4.2.1 για περισσότερα. 80
4.1	(Συνέχεια) 81
4.2	Όπως και στον Πίνακα 4.1, αλλά για αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις παραμορφωμένους πυρήνες με το δυναμικό Davidson, στη περιοχή των σπάνιων γαιών και των ακτινίδων με $R_{4/2} > 2.9$. Οι παράμετροι β_0 , a , και c είναι ελεύθερες και σχετίζονται με το δυναμικό Davidson, με την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση και με το δυναμικό ως προς γ [Εξίσωση (2.47)]. Οι θεωρητικές προβλέψεις αποκομίζονται από τις εξισώσεις που αναφέρονται στο εδάφιο 4.2.2, με επιπλέον εκτενή συζήτηση επί του θέματος. 82
4.2	(Συνέχεια) 83
4.3	Τα ενεργειακά επίπεδα της βασικής της ζώνης β_1 και της γ_1 των ^{162}Dy και ^{238}U , κανονικοποιημένα στην ενέργεια της $E(2_1^+)$ που λαμβάνονται από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με παράμετρο μάζας εξαρτημένη από β για αξονικά συμμετρικούς πυρήνες στο δυναμικό Davidson. Οι παράμετροι (a, β_0, c) λαμβάνονται από το πίνακα 4.2. 84

- 4.4 Σύγκριση θεωρητικών προβλέψεων της ασταθούς ως προς γ Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό Kratzer με τα πειραματικά δεδομένα [87] για τις ασπάνιες γαίες και τις ακτινίδες με $R_{4/2} \leq 2.6$ και γνωστές τις καταστάσεις 0_2^+ και 2_7^+ . Ο λόγος $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, όπως επίσης και οι κατώτατες καταστάσεις των ζωνών β και γ , κανονικοποιημένες στη κατάσταση 2_1^+ όπως αναφέρονται ως $R_{0/2} = E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ και $R_{2/2} = E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ αντίστοιχα. Οι τροχιακές στροφορμές των υψηλότερων επιπέδων της βασικής ζώνης, της ζώνης β και της ζώνης γ που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή rms αναφέρονται ως L_β , L_β και L_γ αντίστοιχα. Το n υποδεικνύει το συνολικό αριθμό των ενεργειακών επιπέδων που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή και σ είναι το μέτρο ποιότητας της Εξ. (4.3). Δείτε το εδάφιο 4.3.1 για λεπτομερέστερη ανάλυση. 85
- 4.4 (συνέχεια) 86
- 4.5 Σύγκριση των θεωρητικών προβλέψεων της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό του Kratzer για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες με τα πειραματικά δεδομένα [87] των σπάνιων γαίων και των ακτινίδων με $R_{4/2} > 2.9$ και γνωστές τις καταστάσεις 0_2^+ και 2_7^+ . Οι λόγοι $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, όπως επίσης και οι κατώτατες καταστάσεις των ζωνών β και γ , κανονικοποιημένες στη κατάσταση 2_1^+ αναφερόμενες ως $R_{0/2} = E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ και $R_{2/2} = E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ αντίστοιχα. Οι τροχιακές στροφορμές των υψηλότερων επιπέδων της βασικής ζώνης, της ζώνης β και της γ που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή rms αναφέρονται ως L_β , L_β , και L_γ αντίστοιχα. Το n υποδεικνύει το συνολικό αριθμό των επιπέδων που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή και σ είναι το μέτρο ποιότητας της Εξ. (4.3). Δείτε το εδάφιο 4.3.2 για περαιτέρω συζήτηση. 87
- 4.5 (συνέχεια) 88
- 4.6 Κανονικοποιημένα [στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης, $E(2_1^+)$] ενεργειακά επίπεδα της βασικής ζώνης, των ζωνών β_1 και γ_1 του ^{170}Er και ^{232}Th , αποκομιζόμενα από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β για το δυναμικό Kratzer στους αξονικά παραμορφωμένους πυρήνες χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που δίνονται στο πίνακα 4.5, συγκρινόμενο με τα πειραματικά δεδομένα [87]. Δείτε το 4.3.2 για περαιτέρω συζήτηση. 89
- 4.7 Κανονικοποιημένα [στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης $E(2_1^+)$] ενεργειακά επίπεδα της βασικής ζώνης gsb, της ζώνης β_1 και της γ_1 των ισότονων με $N = 90$, ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd , και ^{156}Dy , αποκομιζόμενα από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με εξαρτημένη μάζα από το β για το δυναμικό του Kratzer για αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες, χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που δίνονται στο πίνακα 4.5, συγκρινόμενα με τα πειραματικά δεδομένα [87] και με τις προβλέψεις της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$ [33, 86, 93]. Το κατώτατο επίπεδο της ζώνης γ_1 στην $X(5)$, η οποία είναι μια ελεύθερη παράμετρος, έχει τεθεί ίση με τη μέση τιμή των πειραματικών τιμών. Δείτε το 4.3.2 για περαιτέρω συζήτηση. 90
- 4.7 (συνέχεια) 91

4.8	Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διαφόρους λόγους $B(E2)$ των ασταθών ως προς γ πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β (με $\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό Davidson, για τις τιμές των παραμέτρων που δείχνονται στο πίνακα 4.4.	92
4.8	(Συνέχεια)	93
4.9	Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διάφορους λόγους $B(E2)$ αξονικά συμμετρικών επιμήκων πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β (με $\delta = \lambda = 0$) στο δυναμικό Davidson, για τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στο πίνακα 4.2.	94
4.9	(Συνέχεια)	95
4.10	Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διάφορους λόγους $B(E2)$ των ασταθών ως προς γ πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό Kratzer, με τιμές παραμέτρων που φαίνονται στο Πίνακα 4.4.	96
4.10	(συνέχεια)	97
4.11	Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διάφορους λόγους $B(E2)$ των αξονικά συμμετρικών επιμήκων πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό του Kratzer, για τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στο πίνακα 4.5. Προκειμένου να διευκολυνθούν οι συγκρίσεις για τα ισότοπα της περιοχής $N = 90$, ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd , και ^{156}Dy , με τις προβλέψεις της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$ [33, 86, 93], οι σχετικές προβλέψεις αναφέρονται στη πρώτη γραμμή του πίνακα, με τις μεταβάσεις $\gamma_1 \rightarrow gsb$ να είναι κανονικοποιημένες ως προς τη μετάβαση $2_\gamma \rightarrow 0_1$, την οποία εξισώνουμε με 100, κοντά στη μέση τιμή για τα πρώτα τρία ισότοπα της $N = 90$. Δείτε το 4.4.2 για περαιτέρω συζήτηση.	98
4.11	(συνέχεια)	99
4.11	(συνέχεια)	100
B'.1	Αριθμητικές τιμές της A για τους ασταθείς ως προς γ πυρήνες των σχημάτων 4.9 και 4.10. Το β_0 είναι η θέση του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού, που υπολογίζεται από την (B'.19). Η β_{exp} είναι η τιμή της τετραπολικής παραμόρφωσης που δίνεται από τη πειραματική τιμή της $B(E2; 0_1 \rightarrow 2_1)$ [96], ενώ το A υπολογίζεται από την εξίσωση (B'.20).	127
B'.2	Αριθμητικές τιμές της A για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες των σχημάτων 4.11, 4.12 και 4.13. Το β_0 είναι η θέση του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (B'.21), β_{exp} είναι η τιμή της τετραπολικής παραμόρφωσης που δίνεται από τη πειραματική τιμή της $B(E2; 0_1 \rightarrow 2_1)$ [96], ενώ το A υπολογίζεται από την εξίσωση (B'.22).	128

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στο πρότυπο του Bohr για τη πυρηνική δομή [6, 7, 8, 9] οι συλλογικοί τρόποι κίνησης των νουκλεονίων σε έναν ατομικό πυρήνα συγκρίνονται με τις ταλαντώσεις ενός μη περιστρεφόμενου (irrotational) ρευστού. Οι ιδιότητες της πυρηνικής ύλης [9] καθορίζουν τη πυκνότητα ϱ_0 του ρευστού που με τη σειρά της δίνει μια παράμετρο μάζας για την υγρή σταγόνα ακτίνας R_0 ,

$$B \sim \varrho_0 R_0^5. \quad (1.1)$$

Το ρευστό συνίσταται από πυρηνική ύλη (nuclear matter) [9], η οποία επιτυγχάνεται μέσω της επέκτασης του, κατά τα άλλα πεπερασμένου για ατομικό πυρήνα, μαζικού αριθμού A στο άπειρο. Η παράμετρος μάζας και η κανονική κβάντωση του τετραπολικού βαθμού ελευθερίας παράγουν τη Χαμιλτονιανή Bohr [1], στην οποία η σύγκριση με τους συλλογικούς πυρηνικούς τρόπους κίνησης πεπερασμένου αριθμού σωματιδίων δεν είναι εμφανής.

Οι συλλογικές κινήσεις των νουκλεονίων μπορούν να δημιουργήσουν μια συλλογική κυματοσυνάρτηση για το πυρήνα μέσω της ολοκληρωτικής μέθοδου του γεννήτορα συντεταγμένων (Generator Coordinate Method) [10]. Τότε κατασκευάζεται μια εξίσωση Schrodinger για το πλάτος της νουκλεονικής συλλογικής κίνησης [11]. Έτσι οι κινήσεις πολλών νουκλεονίων αποκτούν τη φυσική εποπτεία ενός συλλογικού τρόπου κίνησης με μια παράμετρο "μάζας" και δυναμικό. Στην [11] το νέο στοιχείο ήταν ότι η παράμετρος μάζας στην εξίσωση αυτή, όπως παράγεται από το γεννήτορα συντεταγμένων, δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από τη συλλογική συντεταγμένη. Θεωρίες μέσου πεδίου από τη μέθοδο Hartree-Fock-Bogoliubov [12] ή/και τη Random Phase Approximation δείχνουν ότι η συλλογική κίνηση των νουκλεονίων περιγράφεται από τανυστή αδρανείας ή τανυστή μάζας εξαρτημένο από περισσότερες της μίας συλλογικής συντεταγμένης.

Στο πρότυπο Bohr τα αποτελέσματα των θεωριών μέσου πεδίου όσον αφορά το τανυστή μάζας εισάγονται από τη πρόσφατη φαινομενολογική μελέτη των Jolos και von Brentano [14, 15, 16, 17, 18], στην οποία η παράμετρος μάζας της Χαμιλτονιανής Bohr γενικεύεται σε τανυστή περιέχοντας βαθμωτό, τετραπολικό και δεκαεξαπολικό όρο. Ωστόσο, ο τανυστής μάζας παρουσιάζει αδυναμίες ξεκινώντας από την ερμιτιανότητα και την ακριβή επιλυσιμότητα της Χαμιλτονιανής τύπου Bohr που εισάγεται στη μελέτη των Jolos και von Brentano. Επιπλέον οι αδυναμίες επεκτείνονται στην έλλειψη αυτοσυνεπούς θεωρητικής αιτιολόγησης της μεταβλητής μάζας και της τανυστικής της γενίκευσης στο πρότυπο Bohr. Κάτι τέτοιο θα

μπορούσε να επιτευχθεί από υψηλότερες συμμετρίες από ότι εκείνες που φιλοξενεί το πρότυπο Bohr που περιέχονται στις αναπαραστάσεις της $U(5)$.

Οι φαινομενολογικές αποκλίσεις της παραμέτρου μάζας στη Χαμιλτονιανή Bohr αντανakλώνται επίσης στην υπέρμετρη αύξηση των ροπών αδρανείας σε σχέση με τη τετραπολική παραμόρφωση [19, 20]. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε πρώτα στη [7] σαν μια πρώτη εφαρμογή του μέσου πεδίου στη πυρηνική δομή και η υπέρμετρη αύξηση έδειχνε να μετριάζεται με την περίληψη της αλληλεπίδρασης ζευγών (pairing interaction), η οποία είναι παράδειγμα εκδήλωσης πεπερασμένου αριθμού σωματιδίων και απούσα στο πρότυπο Bohr. Το γεγονός αυτό υπονοεί ότι στη Χαμιλτονιανή Bohr η έλλειψη εμφανούς σύγκρισης των ταλαντώσεων του πυρηνικού ρευστού με τις συλλογικές κινήσεις πεπερασμένου αριθμού σωματιδίων, μπορεί να ευθύνεται για την υπέρμετρη αύξηση των ροπών αδρανείας και τις φαινομενολογικές αποκλίσεις της παραμέτρου μάζας.

Οι συλλογικοί πυρηνικοί τρόποι κίνησης μπορούν επίσης να αναλυθούν σε όρους αλληλεπιδρώντων μποζονίων, συζευγμένα νουκλεόνια σθένους τροχιακής στροφορμής μηδέν (μποζόνιο s) και δύο (μποζόνιο d) [5], τα οποία δομούν την ομάδα συμμετρίας $U(6)$, όπως έδειξαν οι Francesco Iachello και Akito Arima σε μια σειρά απο δημοσιεύσεις στα μέσα της δεκαετίας του '70 [21, 22, 23, 24, 25]. Τρεις διαφορετικές αλυσίδες υποομάδων της $U(6)$ ορίζουν τις δυναμικές συμμετρίες του προτύπου των αλληλεπιδρώντων μποζονίων (Interacting Boson Model), τη $U(5)$, την $SU(3)$ και την $O(6)$. Στο κλασσικό του όριο, το οποίο αποκομίζεται από τις σύμφωνες καταστάσεις της $U(6)$ [26, 27, 38, 28, 29], ο αριθμός των μποζονίων εκτείνεται στο άπειρο. Τότε οι δυναμικές συμμετρίες μεταφράζονται σε φάσεις της πυρηνικής δομής οι οποίες φιλοξενούν σφαιρικά, αξονικά συμμετρικά και ασταθή ως προς γ σχήματα, μέσω ενεργειακών επιφανειών εκφρασμένων στις μεταβλητές σχήματος (shape variables).

Η σχέση του κλασσικού ορίου του IBM με το πρότυπο Bohr είναι για πολλά χρόνια ένα ανοιχτό ζήτημα. Η πλήρης παραγωγή των Χαμιλτονιανών που προκύπτουν στο κλασσικό όριο του IBM, στα όρια των δυναμικών του συμμετριών αλλά και στις μεταξύ τους περιοχές, έγινε στη διδακτορική διατριβή του O. Van Roosmalen [29]. Επίσης και στις Χαμιλτονιανές των υπολοίπων εκδοχών του κλασσικού ορίου μέσω των συμφώνων καταστάσεων της $U(6)$ [26, 27, 28], αναδεικνύονται τα φαινόμενα πεπερασμένου αριθμού μποζονίων στη μελέτη των πυρηνικών σχημάτων. Οι Van Isacker και Chen [28] δίνουν έμφαση στην εμφάνιση των μεταβλητών σχήματος από τις σύμφωνες καταστάσεις του IBM στις οποίες περιέχεται ο αριθμός των μποζονίων. Επισημαίνουν ότι στο πρότυπο Bohr οι μεταβλητές σχήματος χρησιμοποιούνται ab initio αγνοώντας το πεπερασμένο αριθμό σωματιδίων του πυρήνα.

Η μελέτη της παρούσας διατριβής για τη σχέση του κλασσικού ορίου του IBM με το πρότυπο Bohr ξεκινά από ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των Χαμιλτονιανών του πρώτου, ιδιαίτερα φανερό στη [29], και αφορά τους κινητικούς όρους όπου η εμφανίζεται η τετραπολική παραμόρφωση μπλεγμένη με τη συζυγή ορμή της. Στα μέσα της δεκαετίας του 2000 ο Francesco Iachello σημείωσε ότι η δουλειά των Quesne και Tkachuk [2] θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στη Χαμιλτονιανή του Bohr προκειμένου να δώσει μορφές πιο συμβατές με εκείνες που προβλέπονται από το γεωμετρικό όριο του IBM. Στη [2] προτείνεται μορφή της εξίσωσης Schrodinger μέσω γενικευμένων τελεστών της ορμής η οποία είναι κατάλληλη και για συστήματα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση. Η ερμιτιανότητα της προτεινόμενης Χαμιλτονιανής είναι εξασφαλισμένη όπως επίσης και η ακριβής επιλυσιμότητά της με μεθόδους υπερσυμμετρικής

κβαντομηχανικής. Η εφαρμογή της στη Χαμιλτονιανή Bohr τη τροποποιεί αφήνοντας τη μάζα να εξαρτάται από τη παραμόρφωση, σε συμφωνία με τις θεωρίες μέσου πεδίου. Από την άλλη, στη δουλειά των Ginnocchio και Kirson [27] αλλά και των Hatch και Levit [38], το κλασσικό όριο του IBM προέβλεπε επίσης μεταβλητή μάζα. Η τροποποίηση αυτή επιτεύχθηκε πρώτα στη [39] και έπειτα στις [40, 41] για τα δυναμικά Davidson και Kratzer.

Το κεφάλαιο 2 υπενθυμίζει τη Χαμιλτονιανή του Bohr και τις γνωστές ακριβείς της λύσεις για τα δυναμικά Davidson και Kratzer. Το κεφάλαιο 3 ξεκινά με μια σύντομη αναδρομή για τη μελέτη των Quesne και Tkachuk και έπειτα την εφαρμόζει στη Χαμιλτονιανή Bohr για τα δυναμικά Davidson και Kratzer κατά τα πρότυπα των [40, 41] αντίστοιχα. Το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου αυτού αφιερώνεται στην αναλυτική περιγραφή της ακριβούς επιλυσιμότητας των προτεινόμενων Χαμιλτονιανών, με μεθόδους υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής όπως αυτές εφαρμόστηκαν στις [40, 41]. Το κεφάλαιο 4 περιέχει μια πλούσια σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα με καινούρια σχήματα και αναλύσεις, από εκείνα/εκείνες που περιέχονται στις [40, 41]. Επίσης αναπτύχθηκε πρωτότυπος κώδικας στη Mathematica για των υπολογισμό των τετραπολικών ρυθμών μετάβασης τα αποτελέσματα του οποίου παρατίθενται στους αντίστοιχους πίνακες. Η φαινομενολογία της Χαμιλτονιανής Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση είναι αρκετά ικανοποιητική, δίνοντας σε ειδικές περιπτώσεις καλύτερη προσαρμογή των λύσεών της από τις ήδη υπάρχουσες σε καταστάσεις με υψηλή στροφορμή. Η συμπεριφορά των ροπών αδρανείας διορθώνεται με την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση όπως δείχνεται στο κεφάλαιο 5.

Το ενδιαφέρον για την ακριβή επιλυσιμότητα της Χαμιλτονιανής του Bohr, είχε ήδη αναπτρωθεί στις αρχές του 2000 όταν και πάλι ο Iachello πρότεινε τις συμμετρίες κρίσιμου σημείου (critical point symmetries) [32, 33] ως δυναμικές συμμετρίες στη Χαμιλτονιανή του Bohr που χαρακτηρίζουν κρίσιμα σημεία μεταβολής σχήματος/φάσης [34]. Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$ προκύπτουν από το άπειρο πηγάδι δυναμικού στη Χαμιλτονιανή του Bohr και τη δεκαετία του 2000 αναπτύχθηκε έντονη δραστηριότητα στις ακριβείς της λύσεις όπως φαίνεται στη [35], στην οποία πρωταγωνιστούν τα δυναμικά Davidson και το Kratzer. Στο IBM η μελέτη των μεταβολών φάσης ήταν συνώνυμες με το κλασσικό του όριο [5, 26] στο πνεύμα των μεταβολών στη συμμετρία της βασικής κατάστασης [30, 31] οι οποίες σήμερα ονομάζονται κβαντικές μεταβολές φάσης με ιδιαίτερη εφαρμογή σε συστήματα συμπυκνωμένης ύλης [36]. Ο άπειρος αριθμός μποζονίων στο πλαίσιο του IBM είναι πρωταρχικής σημασίας για την ανάδειξη αυτών των φαινομένων στην εξέλιξη της δομής των ατομικών πυρήνων [37]. Η σχέση τους με τις μεταβολές σχήματος στη γεωμετρία Bohr και οι πιθανές συμμετρίες που χαρακτηρίζουν τη μετάβαση, συμμετρίες κρίσιμου σημείου, ανέδειξαν ξανά τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του κλασσικού ορίου του IBM και της Χαμιλτονιανής του Bohr.

Όμως η μελέτη των Quesne και Tkachuk έδειξε επίσης ότι η προτεινόμενη μορφή της εξίσωσης Schrodinger μέσω των γενικευμένων τελεστών της ορμής μπορεί να περιγράψει και συστήματα σε καμπύλο χώρο. Σε αυτό το σημείο η παρούσα διατριβή συνεισφέρει επίσης στη μελέτη της μη-σχετικιστικής εξίσωσης Schrodinger σε σύμμορφες συντεταγμένες. Στο Παράρτημα Α' παρουσιάζεται πλήρης μαθηματική απόδειξη ότι εξίσωση Schrodinger σε σύμμορφες συντεταγμένες είναι μια ειδική περίπτωση του φορμαλισμού των Quesne και Tkachuk για συστήματα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση. Το αποτέλεσμα αυτό δε πρέπει να συγχέεται με την ισοδυναμία των Quesne και Tkachuk για τη καμπυλότητα. Ένας σύμμορφος μεταχη-

ματισμός στη μετρική είναι πιο γενικός από τη καμπυλότητα καθώς περιέχει την αναφορά στο άπειρο.

Ο προσανατολισμός της διατριβής στη γεωμετρία του Bohr και ειδικότερα στην αλλαγή της μετρικής της, επηρεάζεται αφενός από την ανάγκη εκδήλωσης υψηλότερων συμμετριών από την $U(5) \supset SO(5)$ σε Χαμιλτονιανές τύπου Bohr. Ανάλογες καταστάσεις υπάρχουν σε κοσμολογικά πρότυπα [42] όπου στη πιο απλή μορφή τους [43] οι παρεμβάσεις στο στοιχείο μήκους του χώρου αντανακλούν διαφορετικά σχήματα για τις τριδιάστατες επιφάνειες στο χωρόχρονο αναδεικνύοντας υψηλότερη συμμετρία από την $SO(3)$, την $SO(3,1)$. Αφετέρου οι υποδείξεις των θεωριών μέσου πεδίου σχετικά με το τανυστή μάζας λαμβάνουν έτσι μια πιο φυσική μορφή με βαθμωτό μέρος τη μάζα και τανυστικό τη μετρική προσφέροντας άμεσα τη σύνδεση με υψηλότερες συμμετρίες.

Όπως θα δειχθεί στο κεφάλαιο 5, η εξάρτηση των ροπών αδρανείας από τη τετραπολική παραμόρφωση είναι προβληματική εξαιτίας της γεωμετρίας του Bohr. Ο παράγοντας συμμορφοποίησης είναι μια βαθμωτή ποσότητα στο τανυστή της μετρικής και ενσωματώνει τη γεωμετρία του Bohr σε μία επιπλέον διάσταση. Οι φαινομενολογικές του επιπτώσεις συμπίπτουν με την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση και αφορούν τη μετριοποίηση της υπέρμετρης αύξησης των ροπών αδρανείας. Στα συμπεράσματα δίνεται έμφαση στη νέα σχέση που προκύπτει μεταξύ του κλασσικού ορίου του IBM και του προτύπου Bohr, καθώς και στη σύνδεση των συμμετριών κρίσιμου σημείου με τις χβαντικές μεταβολές φάσης.

Κεφάλαιο 2

Πρότυπο Bohr

Η Χαμιλτονιανή του Bohr [1] και οι γενικεύσεις της, το συλλογικό γεωμετρικό πρότυπο [8, 13, 9, 44] ή "Πρότυπο Bohr", έχουν δώσει για αρκετές δεκαετίες ένα ισχυρό πλαίσιο για τη κατανόηση της συλλογικής συμπεριφοράς των ατομικών πυρήνων. Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η χαμιλτονιανή του προτύπου και οι σχετικές λύσεις της για τα δυναμικά Davidson και Kratzer, τα οποία αποτελούν περιπτώσεις του ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή και της κίνησης Kepler με μετατοπισμένο ελάχιστο. Η παρουσίαση των λύσεων για το Davidson ακολουθεί κυρίως την ακριβώς διαχωρίσιμη μορφή της [45] η οποία εξελίσσεται ακόμη περισσότερο με τη πρόταση της κοινής ακτινικής εξίσωσης για όλους τους τύπους κίνησης, ασταθείς ως προς γ , αξονικά συμμετρικούς και τριαξονικούς πυρήνες. Η ίδια λογική ακολουθείται και για το Kratzer, σε αντίθεση με την υπάρχουσα μορφή τους στις [46, 47]. Τέλος συζητούνται τα προβλήματα με τη παράμετρο μάζας, θεωρητικά και πειραματικά, ως σύνδεση με ό,τι ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

2.1 Ταλαντώσεις πυρηνικής επιφάνειας

Στο πρότυπο του Bohr [1, 9] τα πυρηνικά φάσματα ερμηνεύονται βάσει των τετραπολικών παραμορφώσεων της πυρηνικής επιφάνειας

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^* \Upsilon_{\mu}^{(2)}(\theta, \phi) \right). \quad (2.1)$$

R_0 είναι η ακτίνα του πυρήνα σε σφαιρική ισορροπία. Η συνάρτηση $\Upsilon_{\mu}^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός όρος των κανονικοποιημένων σφαιρικών αρμονικών. Οι παράμετροι του αναπτύγματος α_{μ} , ($\mu=2,1,0,-1,-2$) είναι οι συλλογικές συντεταγμένες που περιγράφουν τη τετραπολική παραμόρφωση. Για μικρά α_{μ} το σχήμα γίνεται ελλειψοειδές. Η ακτίνα του σχήματος θα πρέπει να μένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς στροφών και ομοτιμίας, γι' αυτό τα α_{μ} μετασχηματίζονται όπως οι $\Upsilon_{\mu}^{(2)}$

$$\alpha_{\mu}^* = (-1)^{\mu} \alpha_{-\mu}, \quad (2.2)$$

ως σφαιρικοί τανυστές. Το πυρηνικό φάσμα εξάγεται από τη κατασκευή μιας Χαμιλτονιανής που χαρακτηρίζει την ενέργεια της τετραπολικής παραμόρφωσης. Η εισαγωγή των συζυγών

ορμών για τις συντεταγμένες α_μ γίνεται μέσα από τη κανονική κβάντωση του τετραπολικού βαθμού ελευθερίας

$$[\alpha_\mu, \pi_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Το κινητικό μέρος της ενέργειας γράφεται

$$T = \frac{1}{2B} \sum_{\mu} |\pi_{\mu}|^2 = \frac{-\hbar^2}{2B} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{\mu} \partial \alpha_{-\mu}}, \quad (2.4)$$

ενώ το δυναμικό για αρμονικές ταλαντώσεις της επιφάνειας

$$V = \frac{1}{2}C \sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 = \frac{1}{2}C \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \alpha_{\mu} \alpha_{-\mu}. \quad (2.5)$$

Η παράμετρος μάζας B και η σταθερά ταλάντωσης C λαμβάνονται από τις ιδιότητες της πυρηνικής ύλης [9, 1] οι οποίες θα συζητηθούν παρακάτω. Οι τετραπολικές παραμορφώσεις της πυρηνικής επιφάνειας μπορούν να εξεταστούν ως σύστημα αρμονικών ταλαντωτών με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{B}}. \quad (2.6)$$

Η Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H = \hbar\omega \left(\sum_{\mu} d_{\mu}^{\dagger} d_{\mu} + \frac{5}{2} \right), \quad (2.7)$$

όπου τα

$$d_{\mu}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda \alpha_{\mu} - \frac{i}{\lambda \hbar} \pi_{\mu} \right), \quad \lambda = \sqrt{\frac{B\omega}{\hbar}}, \quad (2.8)$$

περιγράφουν τα διεγερμένα ενεργειακά επίπεδα ως τετραπολικά φωνόνια (μποζόνια στροφορμής $L = 2$). Η βασική κατάσταση 0^+ είναι το κενό των τετραπολικών φωνονίων. Η πρώτη διεγερμένη 2^+ είναι ένα τετραπολικό φωνόνιο. Η σύζευξη δύο τετραπολικών φωνονίων δίνει τις καταστάσεις $0^+, 2^+, 4^+$, που δείχνει τον εκφυλισμό της δεύτερης διεγερμένης κατάστασης, κ.ο.κ. για τις υπόλοιπες διεγερμένες.

Στο πρότυπο του Bohr και στις επεκτάσεις του το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο (GCM) [9] ή το αλγεβρικό συλλογικό μοντέλο [44], η παραπάνω Χαμιλτονιανή περιγράφει πυρηνικά φάσματα με ισαπέχοντα ενεργειακά επίπεδα. Είναι παράδειγμα ισοτροπικού ταλαντωτή σε πέντε διαστάσεις ($\mu=2,1,0,-1,-2$) με ομάδα συμμετρίας τη $U(5)$.

Από την άλλη, πλήθος πυρηνικών φασμάτων προσεγγίζουν περιστροφικό χαρακτήρα που αποκλίνει από εκείνον του αρμονικού ταλαντωτή. Στο πρότυπο του Bohr το περιστροφικό φάσμα επιτυγχάνεται από Χαμιλτονιανή που παράγεται μέσω μιας ειδικής παραμετροποίησης, ή της επιβολής δεσμών, στα α_{μ} .

Τα α_{μ} ως σφαιρικοί τανυστές [1], μετασχηματίζονται σύμφωνα με την $L = 2$ μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $SO(3)$

$$a_{\nu} = \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{\mu} D_{\mu\nu}^2(\Omega), \quad (2.9)$$

όπου $\mathcal{D}_{\mu\nu}^2(\Omega)$ η μήτρα του Wigner [48]. Ο Bohr προκειμένου να εισάγει περιστροφικό χαρακτήρα στο φάσμα του τετραπολικού βαθμού ελευθερίας (σε 5 διαστάσεις) εισήγαγε το σύστημα των κυρίων αξόνων ή όπως συνηθίζεται να λέγεται το εσωτερικό (intrinsic frame) ή σύστημα σώματος (body frame). Οι χρονο-εξαρτώμενες γωνίες Euler $\Omega = (\Phi, \Theta, \psi)$ λέγεται ότι καθορίζουν το προσανατολισμό των κυρίων αξόνων ως προς το σύστημα εργαστηρίου. Οι τετραπολικές παραμορφώσεις δεν είναι πλέον τυχαίες στο χώρο, όπως συμβαίνει στο σύστημα εργαστηρίου. Καθορίζονται βάσει του προσανατολισμού του συστήματος των κυρίων αξόνων ως προς το σύστημα εργαστηρίου. Τρεις συζυγείς στροφορές ως προς τις γωνίες Euler και τρεις κβαντικοί αριθμοί επιλέγουν τη τετραπολική παραμόρφωση του σχήματος. Αυτοί είναι η ολική στροφορμή L , η προβολή της M στον άξονα εργαστηρίου z , και η προβολή της K στον άξονα z' του σώματος.

Η ειδική επιλογή του Bohr [1] για το σύστημα των κυρίων αξόνων παραμετροποιεί τα a_ν

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \sin \gamma, \quad a_1 = a_{-1} = 0, \quad (2.10)$$

ή απευθείας τα α_μ [44]

$$\alpha_\mu(\beta, \gamma, \Omega) = \beta \left[\cos \gamma \mathcal{D}_{0\mu}^2(\Omega) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma (\mathcal{D}_{2\mu}^2(\Omega) + \mathcal{D}_{-2\mu}^2(\Omega)) \right]. \quad (2.11)$$

Οι στροφές του εσωτερικού συστήματος ως προς τον εαυτό του μπορούν να γίνουν με 24 διαφορετικούς τρόπους (για σφαιρική συμμετρία με άπειρους) [1] οι οποίοι ως παράγοντες φάσης καθορίζουν τις συμμετρίες της κυματοσυνάρτησης. Η πυρηνική επιφάνεια έτσι περιγράφεται με δύο μεταβλητές σχήματος (β, γ) . Η μεταβλητή β δηλώνει το απόλυτο μέγεθος της τετραπολικής παραμόρφωσης του πυρήνα

$$\sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 = a_0 + 2a_2 = \beta^2. \quad (2.12)$$

Το δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή στο τετραπολικό βαθμό ελευθερίας παίρνει τη μορφή

$$V = \frac{1}{2}C\beta^2. \quad (2.13)$$

Εκτός από τους δεσμούς στις τετραπολικές συντεταγμένες α_μ που επιβάλλονται από το σύστημα των κυρίων αξόνων, επιπλέον δεσμοί στις μεταβλητές σχήματος αποκαλύπτουν αξονικές συμμετρίες. Οι κύριοι άξονες $\kappa = 1, 2, 3$ υφίστανται τις μεταβολές [1]

$$\delta R_\kappa = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta R_0 \cos \left(\gamma - \kappa \frac{2\pi}{3} \right). \quad (2.14)$$

Τα ζεύγη τιμών $(\gamma, \kappa) = (0, 3), (2\pi/3, 1)$ και $(4\pi/3, 2)$ δίνουν μονάδα για το συνημίτονο και παράγουν επιμηχυσμένο (prolate) ελλειψοειδές με άξονα συμμετρίας το εκάστοτε κ . Ομοίως τα ζεύγη $(\gamma, \kappa) = (\pi, 3), (\pi/3, 2)$ και $(5\pi/3, 1)$ παράγουν πεπλατυσμένο (oblate) ελλειψοειδές με άξονα συμμετρίας το εκάστοτε κ . Για όλες τις άλλες τιμές λαμβάνεται παραμορφωμένο σχήμα δίχως κάποιον άξονα συμμετρίας. Η γωνία γ δείχνει την απόκλιση από την αξονική συμμετρία.

2.2 Χαμιλτονιανή του Bohr

Η Χαμιλτονιανή

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B}\nabla^2 + \frac{1}{2}C\beta^2, \quad (2.15)$$

αντιστοιχεί στην ειδική παραμετροποίηση του Bohr και μπορεί να κατασκευαστεί από τη λαπλασιανή (τελεστής Laplace-Beltrami ή περιγραφή Pauli-Podolsky [49])

$$\nabla^2 = \sum_{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j. \quad (2.16)$$

Τα στοιχεία της μήτρας g_{ij} βρίσκονται από το μετασχηματισμό των συντεταγμένων α_μ στις μεταβλητές $q^1 = \beta$, $q^2 = \gamma$, $q^3 = \Phi$, $q^4 = \Theta$, $q^5 = \psi$. Η μετρική g_{ij} ορίζει στοιχείο μήκους

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dq^i dq^j, \quad (2.17)$$

και τα στοιχεία της βρίσκονται από τη σχέση

$$g_{ij} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_j} \delta_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Η μετρική της ειδικής παραμετροποίησης του Bohr είναι [44, 40]

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\Phi\Phi} & g_{\Phi\Theta} & g_{\Phi\psi} \\ 0 & 0 & g_{\Theta\Phi} & g_{\Theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\psi\Phi} & 0 & g_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

με [40]

$$\begin{aligned} g_{\Phi\Phi} &= \frac{\mathcal{J}_1}{B} \sin^2 \Theta \cos^2 \psi + \frac{\mathcal{J}_2}{B} \sin^2 \Theta \sin^2 \psi + \frac{\mathcal{J}_3}{B} \cos^2 \Theta, \\ g_{\Phi\Theta} &= \frac{1}{B} (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1) \sin \Theta \sin \psi \cos \psi, \\ g_{\Phi\psi} &= \frac{\mathcal{J}_3}{B} \cos \Theta, \\ g_{\Theta\Theta} &= \frac{\mathcal{J}_1}{B} \sin^2 \psi + \frac{\mathcal{J}_2}{B} \cos^2 \psi, \\ g_{\psi\psi} &= \frac{\mathcal{J}_3}{B}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Οι ποσότητες

$$\mathcal{J}_k = 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - k \frac{2\pi}{3} \right), \quad (2.21)$$

είναι οι ροπές αδρανείας όπως θα φανεί και από τη Χαμιλτονιανή. Η διαγώνια μετρική συμβαίνει για $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 = 0$. Η ορίζουσα της μετρικής βρίσκεται να είναι [1]

$$g = \frac{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3}{B^3} \beta^2 \sin^2 \Theta = 4\beta^8 \sin^2 3\gamma \sin^2 \Theta, \quad (2.22)$$

με στοιχείο όγκου

$$dV = 2\beta^4 \sin 3\gamma \sin \Theta d\Phi d\Theta d\psi d\beta d\gamma. \quad (2.23)$$

Από τα στοιχεία της μετρικής και την ορίζουσά της υπολογίζεται η λαπλασιανή (2.16). Αντικαθιστώντας τη στην (2.15) αποκαλύπτεται η Χαμιλτονιανή του Bohr

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + \frac{1}{2} C \beta^2. \quad (2.24)$$

Οι Q_k ($k = 1, 2, 3$) είναι οι συνιστώσες της τροχιακής στροφορμής στο σύστημα των κυρίων αξόνων (στη [50] δίνονται οι αναλυτικές εκφράσεις τους). Ο κινητικός όρος σπάει σε ένα δονητικό

$$T_{vib} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \quad (2.25)$$

και ένα περιστροφικό όρο

$$T_{rot} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[-\frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right]. \quad (2.26)$$

Στον T_{rot} ο συντελεστής των Q_k είναι ροπές αδρανείας που ορίστηκαν ως τέτοιες από την εξίσωση (2.21). Από την άλλη, ο δονητικός όρος T_{vib} σπάει στον όρο των διεγέρσεων κατά β

$$T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right], \quad (2.27)$$

που δείχνει τις αξονικές διεγέρσεις της επιφάνειας, και σε εκείνον κατά γ

$$T_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \quad (2.28)$$

που δείχνει τις διεγέρσεις της επιφάνειας που την κάνουν να αποκλίνει από την αξονική συμμετρία. Οι διεγέρσεις του πυρήνα δεν είναι αναγκαστικά αποσυζευγμένες ως προς τις κατευθύνσεις (β, γ) , αυτό άλλωστε φαίνεται και από τη παρουσία του β^2 στον T_γ . Εν γένει η συμπεριφορά της επιφάνειας ως προς τις διεγέρσεις β και γ χαρακτηρίζεται από δυναμικό $V(\beta, \gamma)$. Στη γενικότητά της η Χαμιλτονιανή του Bohr γράφεται

$$H_B = T_\beta + T_\gamma + T_{rot} + V(\beta, \gamma). \quad (2.29)$$

Οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή T_{rot} είναι [19] $|LMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \mathcal{D}_{MK}^L(\Omega)$, με \mathcal{D} τη συνάρτηση Wigner, οι οποίες δομούν τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της συμμετρίας $SO(3)$. Οι

ιδιοκαταστάσεις των τελεστών T_β και T_γ επηρεάζονται από τη μορφή του δυναμικού $V(\beta, \gamma)$. Ωστόσο, το γενικό χαρακτηριστικό του προτύπου είναι η ομαδοποίηση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της $SO(3)$ σε ενεργειακές ζώνες. Αξίζει να προαναφερθούν ποιοτικά τα γενικά χαρακτηριστικά του φάσματος της H_B .

Οι διεγέρσεις ως προς β εισάγουν νέο κβαντικό αριθμό n_β ο οποίος ορίζει και τις ζώνες β ("β-bands"). Για $n_\beta = 0$ η επιφάνεια εμφανίζει κίνηση μηδενικού σημείου (zero point motion) ως τη βασική ζώνη (ground state band) περιστροφικών καταστάσεων. Οι διεγέρσεις ως προς γ εισάγουν το κβαντικό αριθμό n_γ ο οποίος ορίζει τις ζώνες γ ("γ-bands"). Στις περιπτώσεις όπου το σχήμα ισορροπίας δεν είναι καλά παραμορφωμένο, όπως στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες, οι αντίστοιχες ζώνες καλούνται ως ημί- β (quasi- β) και ημί- γ (quasi- γ) αντίστοιχα.

2.2.1 Ασταθείς ως προς γ πυρήνες

Το δυναμικό $V(\beta, \gamma)$ αποτελεί ένα δεσμό για τη κίνηση ως προς (β, γ) ή τη σταθεροποιεί γύρω από κάποιο ελάχιστο της συνάρτησης $V(\beta, \gamma)$. Αν $V(\beta, \gamma) = V(\beta)$ η κίνηση σταθεροποιείται ως προς β , ως προς γ αφήνεται ασταθής. Στην [51] αυτός ο τρόπος κίνησης μελετήθηκε για πρώτη φορά και αφορά πυρήνες στους οποίους συμβαίνει απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία δίχως ενεργειακό κόστος. Οι T_γ και T_{rot} δίνουν

$$T_\gamma + T_{rot} = -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{(-1)\Lambda^2}{\beta^2}, \quad (2.30)$$

$$\Lambda^2 = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)}. \quad (2.31)$$

Η Χαμιλτονιανή του Bohr γίνεται [50, 53, 54]

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\Lambda^2}{\beta^2} \right] + V(\beta). \quad (2.32)$$

Αυτή είναι μια ακτινική Χαμιλτονιανή με το φυγόκεντρο όρο Λ^2 να παίζει το ρόλο γενικευμένης στροφορμής σε 5 διαστάσεις. Για την ακρίβεια, Λ^2 είναι ο δεύτερης τάξης τελεστής Casimir της ομάδας συμμετρίας $SO(5)$ [50, 53, 54, 44] με ιδιοκαταστάσεις που δομούν τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της. Η εξίσωση του Schrodinger είναι

$$H_B \Psi = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2}{\beta^2} + v(\beta) \right] \Psi = \epsilon \Psi, \quad (2.33)$$

όπου ανηγμένες ενέργειες $\epsilon = BE/\hbar^2$ και ανηγμένα δυναμικά $v = BV/\hbar^2$ έχουν χρησιμοποιηθεί. Τότε οι κυματοσυναρτήσεις τίθενται στη μορφή [51]

$$\Psi(\beta, \gamma, \Omega) = \xi(\beta) \Phi(\gamma, \Omega). \quad (2.34)$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών δίνει την ακτινική εξίσωση

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\tau(\tau+3)}{\beta^2} + v(\beta) \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta). \quad (2.35)$$

Η γωνιακή εξίσωση

$$\Lambda^2 \Phi(\gamma, \Omega) = \tau(\tau + 3) \Phi(\gamma, \Omega), \quad (2.36)$$

έχει λυθεί από τον Bès [52]. Ο Λ^2 μετατίθεται με τον L^2 και τον Q_3 . Η γωνιακή συνάρτηση αναπτύσσεται στο πλήρες σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων Wigner $\mathcal{D}_{MK}^L(\Omega)$ [50, 57],

$$\Phi_{\tau\bar{\nu}_\Delta LM}(\gamma, \Omega) = \sum_{K=0, \text{even}}^L \eta_{\tau\bar{\nu}_\Delta LK}(\gamma) \phi_{MK}^L(\Omega), \quad (2.37)$$

με $\phi_{MK}^L(\Omega) = [(2L + 1)/(16\pi^2(1 + \delta_{K,0}))]^{1/2} [\mathcal{D}_{MK}^L(\Omega) + (-1)^L \mathcal{D}_{M-K}^L(\Omega)]$ και $\eta_{\tau\bar{\nu}_\Delta LK}(\gamma)$ πολώνυμα τα οποία περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις του γ [57]. $\tau(\tau + 3) \equiv \Lambda$ [32] αναπαριστά τις ιδιοτιμές του αναλλοίωτου τελεστή Casimir της ομάδας συμμετρίας $SO(5)$, ενώ τ είναι ο κβαντικός αριθμός της seniority ο οποίος χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SO(5)$. Οι τιμές της τροχιακής στροφορμής L που συμβαίνουν για κάθε τ εξαρτώνται από το χαμένο κβαντικό αριθμό $\bar{\nu}_\Delta$ (δεν αντανακλά κάποια συμμετρία) και δίνονται από τον αλγόριθμο των [5, 51]. Μέσα στη βασική ζώνη (gsb) δίνει $L = 2\tau$. Η κατάσταση $L = 2$ της quasi- γ_1 ζώνης είναι εκφυλισμένη με την $L = 4$ της gsb, η $L = 3, 4$ της quasi- γ_1 ζώνης είναι εκφυλισμένες με την $L = 6$ της gsb, οι $L = 5, 6$ της quasi- γ_1 ζώνης είναι εκφυλισμένες στην $L = 8$ της gsb, κ.ο.κ.

2.2.2 Αξονικά συμμετρικοί επιμήκεις (prolate) πυρήνες

Η κίνηση ως προς γ μπορεί να σταθεροποιηθεί γύρω από το μηδέν από κατάλληλο δυναμικό $w(\gamma)$ με ελάχιστο στο $\gamma = 0$. Το σχήμα γίνεται αξονικά συμμετρικό επιμήκεις (prolate). Για την ακρίβεια, στο $\gamma = 0$ το γ -μέρος των ροπών αδρανείας (2.21) δίνει $\mathcal{J}_3 = 0$, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$, παράγοντας τη διαγώνια μετρική του Bohr όπως φαίνεται από το μηδενισμό των μη διαγώνιων στοιχείων της (2.20). Για μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας, $\gamma \approx 0$, το γ μέρος των ροπών αδρανείας αναπτύσσεται δίνοντας όρο της τροχιακής στροφορμής [33]

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \approx \frac{4}{3}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right). \quad (2.38)$$

Οι ιδιοκαταστάσεις του T_{rot} (2.26) είναι οι συναρτήσεις Wigner άρα

$$T_{rot} \mathcal{D}_{MK}^L(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2B} \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] \mathcal{D}_{MK}^L(\Omega). \quad (2.39)$$

Γράφοντας τις κυματοσυναρτήσεις [33, 47]

$$\Psi(\beta, \gamma, \Omega) = \phi_K^L(\beta, \gamma) \mathcal{D}_{M,K}^L(\Omega), \quad (2.40)$$

η εξίσωση του Schrodinger γίνεται

$$H_B \Psi = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{2\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{8\beta^2} \left[\frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] + v(\beta, \gamma) \right\} \phi_K^L(\beta, \gamma) = \epsilon \phi_K^L(\beta, \gamma). \quad (2.41)$$

Ο ακριβής διαχωρισμός επιτυγχάνεται από την επιλογή $v(\beta, \gamma) = v(\beta) + w(\gamma)/\beta^2$. Τότε $\phi_K^L(\beta, \gamma) = \xi(\beta)\eta_K(\gamma)$ και η (2.41) γράφεται

$$\frac{T_\beta \xi(\beta)}{\xi(\beta)} + \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{T_\gamma \eta_K(\gamma)}{\eta_K(\gamma)} + \frac{1}{4} \frac{T_{rot} \eta_K(\gamma)}{\eta_K(\gamma)} + w(\gamma) \right\} + v(\beta) = \epsilon. \quad (2.42)$$

Όπως αναφέρθηκε η παρουσία του όρου $1/\beta^2$ στο γωνιακό μέρος δεν οδηγεί στη πλήρη αποσύζευξη της ακτινικής από τη γωνιακή εξίσωση. Στην [33] το πρόβλημα αυτό λύνεται με τη λήψη της μέσης τιμής $\langle \beta^2 \rangle$ στις καταστάσεις $\xi(\beta)$ και την εισαγωγή της στη γωνιακή εξίσωση ως μια παράμετρο. Αν και αυτή είναι μια πειραματικά συνεπής αντιμετώπιση, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη προσέγγιση της [45] όπου ο ακριβής διαχωρισμός επιτυγχάνεται ως

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\tilde{\Lambda}}{2\beta^2} + v(\beta) \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta), \quad (2.43)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + 2w(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = \lambda \eta_K(\gamma), \quad (2.44)$$

όπου

$$\tilde{\Lambda} = \lambda + \frac{L(L+1)}{3}. \quad (2.45)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (2.43) έχει την ίδια μορφή όπως και η (2.35), με τη τελευταία να λαμβάνεται στη περίπτωση των σταθμών ως προς γ πυρήνων. Ωστόσο, τα αποτελέσματα διαφέρουν ως προς τη φυσική του προβλήματος. Η εξάρτηση από τη τροχιακή στροφορμή, περιεχόμενη στα $\tilde{\Lambda}$ και Λ αντίστοιχα, είναι διαφορετική. Επιπροσθέτως, η γωνιακή εξίσωση είναι διαφορετική σε κάθε περίπτωση εξαιτίας της διαφορετικής μεταχείρισης της μεταβλητής γ . Στη πρώτη περίπτωση ο γωνιακός βαθμός ελευθερίας γ περιορίζεται σε $\gamma \approx 0$, ενώ στη τελευταία είναι ανεξάρτητος του γ .

Η εξίσωση (2.44) για $\gamma \approx 0$ γίνεται [33]

$$\left[-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4\gamma^2} + 2w(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = \epsilon_\gamma \eta_K(\gamma). \quad (2.46)$$

Για το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή

$$w(\gamma) = \frac{1}{2}(3c)^2 \gamma^2, \quad (2.47)$$

οι λύσεις είναι [33]

$$\lambda = \epsilon_\gamma - \frac{K^2}{3}, \quad \epsilon_\gamma = (6c)(n_\gamma + 1), \quad n_\gamma = 0, 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

Οι επιτρεπόμενες ζώνες χαρακτηρίζονται από

$$\begin{aligned} n_\gamma = 0, \quad K = 0; \quad n_\gamma = 1, \quad K = \pm 2; \\ n_\gamma = 2, \quad K = 0, \pm 4; \quad \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

Τελικά

$$\bar{\Lambda} = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + \epsilon_\gamma = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + (6c)(n_\gamma + 1). \quad (2.50)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις δίνονται σε όρους των πολυωνύμων Laguerre [45]

$$\begin{aligned} \eta_{n_\gamma|K|}(\gamma) &= C_{n_\gamma|K|} \gamma^{|K/2|} e^{-(3c)\gamma^2/2} L_{\tilde{n}}^{|K/2|}(3c\gamma^2), \\ \tilde{n} &= (n_\gamma - |K/2|)/2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.2.3 Τριαξονικοί πυρήνες

Για λόγους πληρότητας παρουσιάζεται και αυτή η περίπτωση, στην οποία ωστόσο τα πειραματικά δεδομένα είναι σχεδόν ανύπαρκτα. Εδώ το δυναμικό παίρνει ξανά τη μορφή $v(\beta, \gamma) = v(\beta) + w(\gamma)/\beta^2$ αλλά με βαθύ ελάχιστο του $w(\gamma)$ στο $\gamma = \pi/6$. Το K , η προβολή της τροχιακής στροφορμής στον άξονα z' του σώματος, δεν είναι καλός κβαντικός αριθμός πλέον. Το α , η προβολή της τροχιακής στροφορμής στον άξονα του σώματος x' χρησιμοποιείται, όπως βρέθηκε στη [58] από τη μελέτη του τριαξονικού περιστροφέα [59, 60]. Τότε η τροχιακή στροφορμή γράφεται [58, 83]

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \approx 4(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) - 3Q_1^2. \quad (2.52)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή [83]

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \phi_\alpha^L(\beta, \gamma) \mathcal{D}_{M,\alpha}^L(\Omega), \quad (2.53)$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών οδηγεί σε

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\bar{\Lambda}}{2\beta^2} + v(\beta) \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta), \quad (2.54)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + 2w(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \Lambda' \eta(\gamma), \quad (2.55)$$

με $\phi_\alpha^L(\beta, \gamma) = \xi_{L,\alpha}(\beta) \eta(\gamma)$, και

$$\bar{\Lambda} = \frac{4L(L+1) - 3\alpha^2}{4} + \Lambda'. \quad (2.56)$$

Η (2.55) έχει λυθεί για το δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή

$$w(\gamma) = \frac{1}{4}c \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2, \quad (2.57)$$

για τη περίπτωση του $\gamma \approx \pi/6$ [83], η οποία δίνει

$$\Lambda' = \epsilon_\gamma = \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right). \quad (2.58)$$

Τελικά

$$\bar{\Lambda} = \frac{4L(L+1) - 3\alpha^2}{4} + \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right). \quad (2.59)$$

Ισχύει και σε αυτή τη περίπτωση η κοινή μορφή της ακτινικής εξίσωσης. Στη βιβλιογραφία των τριαξονικών πυρήνων είναι σύνηθες αντί της προβολής α να χρησιμοποιείται ο κβαντικός αριθμός της "ταλάντευσης" (wobbling) [8, 58] $n_w = L - \alpha$. Εισάγοντας $\alpha = L - n_w$ στη (2.59) λαμβάνεται

$$\bar{\Lambda} = \frac{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w)}{4} + \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right). \quad (2.60)$$

2.3 Ισοτροπικός Ταλαντωτής και κίνηση Kepler

Όπως δείχτηκε ο χωρισμός των μεταβλητών είναι τέτοιος ώστε να αφήνει αναλλοίωτη την ακτινική εξίσωση για κάθε γωνιακό τύπο κίνησης. Οι λύσεις της εξαρτώνται από τη μορφή του δυναμικού $u(\beta)$. Σε ό,τι ακολουθεί η ακτινική εξίσωση θα έχει ως αριθμητή του φυγόκεντρου όρου τη ποσότητα Λ υπονοώντας τη κατάλληλη αντικατάσταση κάθε φορά. Ο αρμονικός ταλαντωτής και δυναμικά τύπου Coulomb (κίνηση Kepler) έχουν χρησιμοποιηθεί για το $u(\beta)$ και οι λύσεις τους είναι γνωστές [50, 46]. Εφαρμοζόμενα αρχικά στη μοριακή φυσική, τα δυναμικά Davidson και Kratzer στο πρότυπο Bohr παράγουν βασικές καταστάσεις με σφαιρική συμμετρία, αν και το σχήμα τους διατηρεί εκείνα του ισοτροπικού ταλαντωτή και της κίνησης Kepler.

2.3.1 Δυναμικό Davidson

Το δυναμικό Davidson [55]

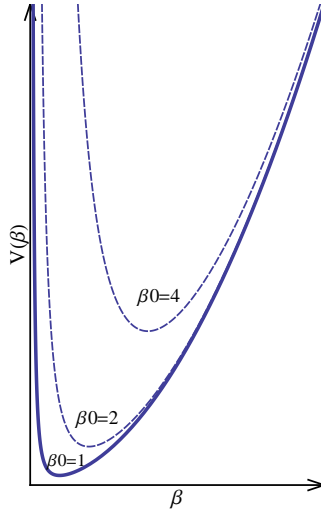
$$u(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}, \quad (2.61)$$

δηλώνει ισοτροπικό ταλαντωτή με τη παράμετρο β_0 στο φυγόκεντρο όρο να δηλώνει τη θέση του ελαχίστου του. Η β_0 αντανακλά τη τετραπολική παραμόρφωση της βασικής κατάστασης. Οι λύσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr για το δυναμικό του Davidson είναι γνωστές και ιδιαίτερα δημοφιλείς καθώς αναπαράγουν σε πολύ καλή ακρίβεια τις κανονικότητες των ρυθμών μετάβασης B(E2)s από τη δεύτερη στη πρώτη διεγερμένη κατάσταση (κανονικοποιημένη ως προς τη μετάβαση της πρώτης διεγερμένης στη βασική) [45]. Η ακτινική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$H_B \Psi = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{(\Lambda + \beta_0^4)}{\beta^2} + \beta^2 \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta), \quad (2.62)$$

όπου χρήση του $\Lambda \equiv \tau(\tau + 3)$ αναφέρεται στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες, ενώ η αντικατάστασή του με το $\tilde{\Lambda}$ αναφέρεται στους αξονικά συμμετρικούς επιμήχεις πυρήνες. Οι J.P. Elliott, J. A. Evans και P. Park [54] εφαρμόζοντας το Davidson στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες, έδειξαν ότι με την αντικατάσταση

$$p(p+3) = \tau(\tau+3) + \beta_0^4 \equiv \Lambda + \beta_0^4, \quad (2.63)$$



Σχήμα 2.1: Το δυναμικό Davidson $V(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$ και το αναλλοίωτο της μορφής του (Shape invariance) κάτω από τη μετατόπιση της παραμέτρου του.

στο φυγόκεντρο όρο, η συμμετρία $SO(5)$ συντηρείται. Οι λύσεις της ακτινικής εξίσωσης είναι [45, 56]

$$\xi(\beta) \equiv F_n^L(\beta) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n + p + \frac{5}{2})} \right]^{1/2} \beta^{p+2} L_n^{p+\frac{3}{2}} e^{-\beta^2/2}, \quad (2.64)$$

όπου $\Gamma(n)$ η συνάρτηση Γ , και $L_n^{p+\frac{3}{2}}(\beta^2)$ τα προσαρτημένα πολυώνυμα Laguerre. Μέσω της (2.63)

$$p = -\frac{3}{2} + \sqrt{\Lambda + \beta_0^4 + \frac{9}{4}}, \quad (2.65)$$

όπου εδώ εκτός από τους ασταθείς ως προς γ , οι λύσεις αυτές ισχύουν και για τους αξονικά συμμετρικούς με την αντικατάσταση του Λ με το $\tilde{\Lambda}$. Οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι

$$E_{n,L} = 2n + p + \frac{5}{2} = 2n + 1 + \sqrt{\Lambda + \beta_0^4 + \frac{9}{4}}. \quad (2.66)$$

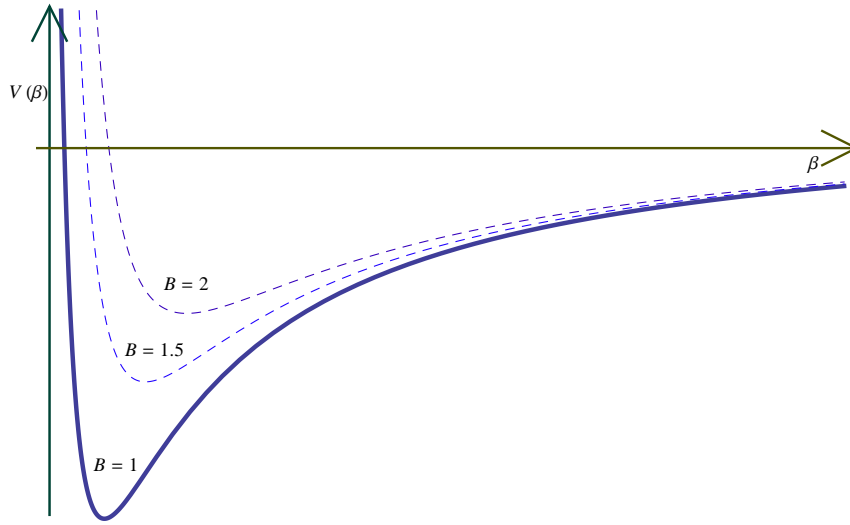
Η πλήρης κυματοσυνάρτηση για το δυναμικό Davidson είναι

$$\Psi(\beta, \gamma, \Omega) = F_n^L(\beta) \eta(\gamma) \left[\frac{2L+1}{(16\pi^2(1+\delta_{K,0}))} \right]^{1/2} [\mathcal{D}_{MK}^L(\Omega) + (-1)^L \mathcal{D}_{M-K}^L(\Omega)], \quad (2.67)$$

όπου $\eta(\gamma)$ οι κυματοσυναρτήσεις ως προς γ για τους ασταθείς ως προς γ ή τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες. Ένας ασταθής ως προς γ πυρήνας αναπαρίσταται από μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου β_0 η οποία λαμβάνεται από τη προσαρμογή κατά rms (root mean square fitting) των λύσεων για το φάσμα της (2.66) στο αντίστοιχο πειραματικό. Αντίστοιχα, ένας αξονικά συμμετρικός επιμήκεις πυρήνας αναπαρίσταται από συγκεκριμένη τιμή

στο σετ των παραμέτρων (β_0, c) η οποίες λαμβάνονται ομοίως. Αυτός είναι και ο λόγος επικράτησης του φαινομενολογικού προτύπου Bohr για πάνω από 60 χρόνια, που όπως λέει και ο Casten με σχετικά πολύ μικρό αριθμό παραμέτρων είμαστε σε θέση να ξέρουμε το τι κάνει ένας ατομικός πυρήνας, όχι όμως γιατί το κάνει.

2.3.2 Δυναμικό Kratzer



Σχήμα 2.2: Το δυναμικό Kratzer $V(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{A^2 B}{\beta^2}$ και το αναλλοίωτο της μορφής του (Shape invariance) κάτω από τη μετατόπιση της παραμέτρου του B . Η παράμετρος A έχει τεθεί ίση με τη μονάδα, δείτε το Παράρτημα Β' για το πώς η A επηρεάζει τη κλίμακα τιμών του β .

Το δυναμικό Kratzer χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στο πρότυπο Bohr σε μια σειρά από δουλειές των Fortunato και Vitturi [47, 46]. Η συμβατή μορφή που χρησιμοποιήθηκε με τη παρούσα δουλειά είναι

$$v(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{A^2 B}{\beta^2}, \quad (2.68)$$

όπου οι παράμετροι A και B ρυθμίζουν παράλληλα το βάθος και τη θέση του ελαχίστου του δυναμικού. Η παράμετρος A μπορεί να προκύψει ως ένας παράγοντας κλίμακας, όπως δείχτηκε στη [41] και για λόγους πληρότητας παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β'. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του Kratzer στην εικόνα 2.2 φανερώνουν το αναλλοίωτο σχήματος (Shape Invariance), ιδιότητα που θα συζητηθεί εκτενώς στο κεφάλαιο 3.

Η ακτινική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$H_B \Psi = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{(\Lambda + B)}{\beta^2} - \frac{A}{\beta} \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta), \quad (2.69)$$

όπου Λ ή $\tilde{\Lambda}$ για τους ασταθείς ως προς γ ή τους αξονικά συμμετρικούς πυρήνες.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της [47, 46] οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις λαμβάνουν τη μορφή $\xi(\beta) = \chi(\beta)/\beta^2$. Ειδικότερα οι $\chi(\beta)$ είναι βασικά κάποια πολυώνυμα Laguerre με

$$\chi(x)_{n,L} = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+2p+1)}} x^{p+\frac{1}{2}} e^{-x/2} L_n^{(2p)}(x), \quad (2.70)$$

όπου

$$\varepsilon = -\varepsilon, \quad x = 2\beta\sqrt{\varepsilon}, \quad p = \sqrt{\Lambda + \frac{9}{4} + B}, \quad \sqrt{\varepsilon} = \frac{A/2}{p+n+\frac{1}{2}}. \quad (2.71)$$

Το φάσμα των ασταθών ως προς γ πυρήνων λαμβάνεται ως έχει, ενώ το αντίστοιχο των αξονικά συμμετρικών επιμήκων πυρήνων λαμβάνεται από την αντικατάσταση του Λ με το $\tilde{\Lambda}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το φάσμα αυτό διαφέρει από το αντίστοιχο της [46] για το δυναμικό Kratzer. Αυτό οφείλεται στην έκφραση για την ενέργεια λόγω της κοινής μορφής της ακτινικής εξίσωσης. Στην [46] $\varepsilon = \varepsilon^\beta + \varepsilon^\gamma$ με τις ιδιοτιμές ε^γ να λαμβάνονται από τη γωνιακή εξίσωση χρησιμοποιώντας τη ποσότητα $\langle \beta^2 \rangle$ στις $\xi(\beta)$. Εδώ, λαμβάνονται από τις αντικαταστάσεις της (2.71).

2.4 Η παράμετρος μάζας

Συνήθως, όπως και παραπάνω, η μάζα στη Χαμιλτονιανή του Bohr λαμβάνεται σταθερή. Ωστόσο η συσσώρευση πειραματικών δεδομένων τις δεκαετίες που πέρασαν δηλώνουν ότι μια τέτοια προσέγγιση μάλλον είναι μη επαρκής. Συγκεκριμένα:

1) Οι ροπές αδρανείας (2.21) προβλέπονται να είναι ανάλογες του β^2 . Οι πειραματικές τιμές για τη πυρηνική παραμόρφωση β^2 λαμβάνονται από τα πειραματικά δεδομένα για τους ρυθμούς μετάβασης ($B(E2)$), ιδίως για τους καλά παραμορφωμένους πυρήνες [19]. Οι αντίστοιχες για τις ροπές αδρανείας λαμβάνονται από το περιστροφικό φάσμα ενός ατομικού πυρήνα και δείχνουν μια πολύ μετριότερη αύξηση σε σχέση με το β . Αυτή η ασυμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα έχει οδηγήσει στο επιχείρημα ότι η Χαμιλτονιανή του Bohr δικαιολογεί τη χρήση της για δονητικούς και μεταβατικούς πυρήνες, αλλά η χρήση της για περιστροφικούς πυρήνες χρειάζεται ακόμα περισσότερη διερεύνηση. Για τη ακρίβεια, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $1/\beta^2$ του φυγόκεντρου όρου της Χαμιλτονιανής του Bohr, $\frac{1}{\beta^2}\Lambda^2$, δημιουργεί αυτή τη προβληματική συμπεριφορά, παρόλο που ο τελεστής Λ^2 επιτρέπει τη ταξινόμηση των ιδιοκαταστάσεων της στις αναπαραστάσεις της $SO(5)$.

2) Λεπτομερείς σύγκρισεις με τα πειραματικά δεδομένα, από τις δουλειές των R.V. Jolos και P. von Brentano έχουν πρόσφατα δείξει ότι [14, 15, 16, 17, 18] ο τανυστής μάζας της συλλογικής Χαμιλτονιανής δε μπορεί να θεωρηθεί μια σταθερή ποσότητα, αλλά μια συνάρτηση των συλλογικών συντεταγμένων, με τους τετραπολικούς και τους δεκαεξαπολικούς όρους παρόντες, επιπροσθέτως του μονοπολικού.

3) Το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων (Interacting Boson Model, IBM) [5, 34], προσφέρει μια αλγεβρική περιγραφή για τους ατομικούς πυρήνες μέσω των αναπαραστάσεων της $U(6)$, συμπληρωματική ως προς εκείνη της χαμιλτονιανής του Bohr. Στο γεωμετρικό του όριο, που λαμβάνεται από τις σύμφωνες καταστάσεις της $U(6)$ [5], όροι της μορφής $\beta^2 p_\beta$

(όπου p_β η συζυγής ορμή της β) ή και πιο περίπλοκοι εμφανίζονται [29], επιπροσθέτως του συνήθους όρου της κινητικής ενέργειας p_β^2 . Άρα ίσως είναι κατάλληλο να ψάξουμε για μια τροποποιημένη μορφή της Χαμιλτονιανής του Bohr στην οποία η μορφή της κινητικής ενέργειας θα τροποποιηθεί από όρους ορμής που περιέχουν τη β^2 και άρα πιο περίπλοκους όρους.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια μιας μη σταθερής μάζας στο πλαίσιο της Χαμιλτονιανής του Bohr έχει χρησιμοποιηθεί πολύ πριν σε αριθμητικούς υπολογισμούς μιας γενικευμένης Χαμιλτονιανής του Bohr [62], όπως επίσης και στους αντίστοιχους υπολογισμούς μέσου πεδίου [12]. Η κύρια διαφορά της παρούσας δουλειάς από τις προηγούμενες είναι η ακριβής επιλυσιμότητα της Χαμιλτονιανής του Bohr με αυτό το τρόπο. Επιπροσθέτως, στη παρούσα περίπτωση ο αριθμός των ελευθέρων παραμέτρων είναι μικρός (δύο ή τρεις), ενώ η συναρτησιακή εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση διαμορφώνεται από της συνθήκη ολοκληρωσιμότητας της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής για τα δυναμικά Davidson και Kratzer αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 3

Μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια Χαμιλτονιανή τύπου Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη μεταβλητή β , διατηρώντας αφενός την ερμιτιανότητά της, αφετέρου τη κοινή μορφή της ακτινικής εξίσωσης και από τρίτου την ακριβή επιλυσιμότητά της για τα δυναμικά Davidson και Kratzer. Η παράμετρος μάζας για αυτά τα δυναμικά θα είναι η συνάρτηση $B(\beta) = B_0/(1 + a\beta^2)^2$ και $B(\beta) = B_0/(1 + a\beta)^2$ αντίστοιχα, όπου B_0 και a θεωρούνται θετικές σταθερές.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, όταν δηλαδή η μάζα εξαρτάται από τη θέση $m(x)$ ($B(\beta)$), η ερμιτιανότητα της χαμιλτονιανής δεν ισχύει καθώς η $m(x)$ ($B(\beta)$) δε μετατίθεται με την ορμή p_x (p_β). Αυτό ήταν και ένα χρόνιο πρόβλημα στο πρότυπο Bohr για τη κατασκευή χαμιλτονιανής με μάζα εξαρτημένη από την αξονική παραμόρφωση. Ο Von Roos [63] είχε ήδη από τις αρχές του '80 προτείνει ερμιτιανή χαμιλτονιανή με μάζα εξαρτημένη από τη θέση. Η μελέτη των C. Quesne και V. Tkachuk αναφέρεται στη χαμιλτονιανή του Von Roos και επιτυγχάνει την αλγεβρική επιλυσιμότητά της μέσω της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [67, 4].

Ξεκινώντας με μια σύντομη εισαγωγή στη μελέτη των C. Quesne και V. Tkachuk, παρουσιάζεται εκτενώς η γενίκευσή της σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων και η εφαρμογή της στη κατασκευή Χαμιλτονιανής του προτύπου Bohr ώστε η παράμετρος μάζας να εξαρτάται από την αξονική παραμόρφωση. Ακολουθεί μια περιεκτική αναφορά στη μέθοδο της αλγεβρικής επιλυσιμότητας των Bagchi, Banerjee, Quesne και Tkachuk [3], η οποία για συγκεκριμένες κλάσσες δυναμικών παράγει ακριβείς λύσεις για τις Χαμιλτονιανές όπου η μάζα εξαρτάται από τη θέση. Παρουσιάζονται εκτενώς, με εφαρμογή αυτής της μεθόδου, οι λύσεις της νέας Χαμιλτονιανής (φάσμα και ιδιοσυναρτήσεις) για τα δυναμικά Davidson και Kratzer.

3.1 Η μελέτη των C. Quesne και V. Tkachuk

Οι C. Quesne και V. Tkachuk σε μια σειρά από δημοσιεύσεις [64, 2] ξεκίνησαν να μελετούν την ακριβή επιλυσιμότητα συστημάτων με γενικευμένες σχέσεις απροσδιοριστίας. Αρχικά τέτοιες σχέσεις προέκυψαν στη φυσική υψηλών ενεργειών, με την εισαγωγή ενός θεμελιώδους ή ελάχιστου μήκους (minimal length)[65] στη δράση και τα ολοκληρώματα τροχιών αντί της σταθεράς του Planck. Αργότερα ο A. Kempf [66] πρότεινε ότι διορθώσεις στις κανονικές

σχέσεις απροσδιοριστίας, σαν μια "χαλάρωση" του \hbar , θα μπορούσαν να περιγράψουν συστήματα με μη σημειακές διεγέρσεις σε χαμηλές ενέργειες, όπως συλλογικές διεγέρσεις στερεών, ημί-σωματίδια (quasi-particles) ή και σύνθετα σωματίδια όπως τα νουκλεόνια στους πυρήνες. Στην [64] οι Quesne και Tkachuk, επηρεασμένοι από τη δουλειά του Kempf, ξεκίνησαν να μελετούν την εξίσωση Schrodinger αρμονικών ταλαντωτών με γενικευμένες σχέσεις μετάθεσης. Η ακριβής επιλυσιμότητά της επιτεύχθηκε μέσω της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [4, 67], την οποία εφάρμοσαν με τρόπο που έμοιαζε στη παλαιότερη μέθοδο της παραγοντοποίησης (Factorization method), γνωστή από τις αρχές του 50, με τις δουλειές των Schrodinger [68] και Infeld και Hull [69].

Από τη μελέτη των Quesne και Tkachuk, θα περιοριστούμε στις γενικευμένες σχέσεις μετάθεσης που έχουν τη μορφή

$$[x_i, p_j] = i\hbar f(a; x)\delta_{ij}, \quad (3.1)$$

όπου a μια παράμετρος. Στην [2] έδειξαν ότι η ανταποκρινόμενη Χαμιλτονιανή σε τέτοιου τύπου σχέσεις μετάθεσης περιγράφει συστήματα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση ή και συστήματα τα οποία βρίσκονται σε καμπύλο χώρο. Μαζί με τους Bagchi και Banerjee [3] ανέπτυξαν καινούρια συστηματική μαθηματική μέθοδο, για την ακριβή επιλυσιμότητα συστημάτων με μάζα εξαρτημένη από τη θέση, για συγκεκριμένες κλάσεις δυναμικών. Προτού παρουσιαστεί περιεκτικά πώς επιτυγχάνονται οι λύσεις για τα δυναμικά του ισοτροπικού ταλαντωτή και της κίνησης Kepler, θα δειχθεί πώς οι γενικευμένες σχέσεις μετάθεσης δημιουργούν μη σχετικιστική εξίσωση Schrodinger ίδιας μορφής με εκείνη που δημιουργεί το πρόβλημα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση.

3.1.1 Εξίσωση Schrodinger με μάζα εξαρτημένη από τη θέση

Στη μελέτη των Quesne και Tkachuk η μορφή της εξίσωσης Schrodinger με γενικευμένες σχέσεις μετάθεσης και η μορφή της αντίστοιχης εξίσωσης με μάζα εξαρτημένη από τη θέση παραμένει αναλλοίωτη. Η διατήρηση της μορφής επαφίεται στη παρουσία του ίδιου, πλην όμως γενικευμένου, τελεστή της ορμής στο κινητικό όρο. Παρατήρησαν ότι οι σχέσεις μετάθεσης (3.1), μπορούν να αναχθούν στις κανονικές, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, αν θεωρηθεί ο γενικευμένος τελεστής

$$p_i \rightarrow \pi_i = \sqrt{f}p_i\sqrt{f}. \quad (3.2)$$

Τότε η γενικευμένη σχέση μετάθεσης

$$[x_i, \pi_j] = i\hbar f(a; x)\delta_{ij}, \quad (3.3)$$

μέσω της (3.2) δίνει τη κανονική $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Εξίσωση Schrodinger με τη παρουσία του τελεστή $\sqrt{f}\nabla\sqrt{f}$ αντανακλά γενικευμένες σχέσεις μετάθεσης θέσης -ορμής και έχει τη μορφή [2]

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{f}\nabla\sqrt{f}\right)^2 + v(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x}) = \epsilon\psi(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

όπου ανηγμένες ενέργειες $\epsilon = m_0E/\hbar^2$ και ανηγμένα δυναμικά $v = m_0V/\hbar^2$ έχουν χρησιμοποιηθεί. Στην ίδια δημοσίευση [2] οι Quesne και Tkachuk έδειξαν ότι τέτοιοι γενικευμένοι

τελεστές της ορμής $\sqrt{f}p\sqrt{f}$, εμφανίζονται σε προβλήματα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση. Αυτό το πέτυχαν μέσω της αναφοράς τους στη Χαμιλτονιανή του Von Roos [63], η οποία προτάθηκε για τη περιγραφή των ηλεκτρονίων στη στερεά κατάσταση. Ο Von Roos πρότεινε τη χαμιλτονιανή [63]

$$H = -\frac{\hbar^2}{4}[m^{\delta'}(\mathbf{x})\nabla m^{\kappa'}(\mathbf{x})\nabla m^{\lambda'}(\mathbf{x}) + m^{\lambda'}(\mathbf{x})\nabla m^{\kappa'}(\mathbf{x})\nabla m^{\delta'}(\mathbf{x})] + V(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

όπου V το δυναμικό και οι παράμετροι δ' , κ' , λ' περιορίζονται από τη συνθήκη $\delta' + \kappa' + \lambda' = -1$. Έδειξε ότι αποτελεί τη πιο γενική μορφή ερμιτιανού τελεστή για προβλήματα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση. Οι Quesne και Tkachuk [2] υπέθεσαν συνάρτηση μάζας της μορφής

$$m = \frac{m_0}{f^2(x)}, \quad (3.6)$$

οπότε η (3.5) γίνεται

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m_0}[f^\delta(\mathbf{x})\nabla f^\kappa(\mathbf{x})\nabla f^\lambda(\mathbf{x}) + f^\lambda(\mathbf{x})\nabla f^\kappa(\mathbf{x})\nabla f^\delta(\mathbf{x})] + V(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

με $\delta + \kappa + \lambda = 2$. Όπως δείχνεται στο Παράρτημα Α', η (3.7) μετά από αρκετή άλγεβρα καταλήγει στην

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{f(\mathbf{x})}\nabla f(\mathbf{x})\nabla\sqrt{f(\mathbf{x})} + V_{\text{eff}}(\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

όπου εμφανίζεται ο γενικευμένος τελεστής της ορμής $\sqrt{f}\nabla\sqrt{f}$ στο κινητικό όρο, ενώ ορίζεται το ενεργό δυναμικό

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{1}{2}(1 - \delta - \lambda)f(\mathbf{x})[\nabla^2 f(\mathbf{x})] + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(\nabla f(\mathbf{x}))^2\right]. \quad (3.9)$$

Η ανταποκρινόμενη εξίσωση Schrodinger γίνεται

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{f}\nabla\sqrt{f}\right)^2 + v_{\text{eff}}(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x}) = \epsilon\psi(\mathbf{x}), \quad (3.10)$$

όπου ανηγμένες ενέργειες $\epsilon = m_0E/\hbar^2$ και ανηγμένα δυναμικά $v_{\text{eff}} = m_0V_{\text{eff}}/\hbar^2$ έχουν χρησιμοποιηθεί. Η αναλλοιώτητα της μορφής της εξίσωσης (3.4) με την αντίστοιχη της (3.10) στηρίζεται στο αναλλοίωτο της μορφής του δυναμικού $v_{\text{eff}}(\mathbf{x})$ ως προς το $v(\mathbf{x})$. Οι παράμετροι κ, δ, λ δεν επηρεάζουν τη συναρτησιακή σχέση του $V(\mathbf{x})$, ενώ αντίθετα η συνάρτηση $f(a; \mathbf{x})$ μπορεί να την επηρεάσει, όπως φαίνεται από την (3.9).

Στην [3], εφαρμόζοντας τεχνικές της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής, οι συναρτήσεις $f(a; \mathbf{x})$ καθορίζονται για συγκεκριμένες κλάσεις υπερδυναμικών (θα εξηγηθούν παρακάτω), με την αυθαιρέσία των παραμέτρων κ, δ, λ . Κριτήριο για τη κατασκευή τους αποτελεί η επέκταση της συνθήκης ολοκληρωσιμότητας της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [4] που δεν είναι άλλη από το αναλλοίωτο σχήματος του δυναμικού (Shape Invariance). Ο ιστροπικός ταλαντωτής και το δυναμικό Coulomb έχουν αντίστοιχες συναρτήσεις [3] $f(a; x) = 1 + ax^2$ και $f(a; x) = 1 + ax$.

Η μορφή του ενεργού δυναμικού (3.9) βγαίνει από την άλγεβρα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Στη συνέχεια θα δείξουμε πως ο κινητικός όρος και η μορφή του ενεργού δυναμικού για μάζα εξαρτημένη από τη θέση γενικεύονται σε καμπυλόγραμμες, για την ακρίβεια σφαιρικές συντεταγμένες, που τέτοιες είναι και εκείνες του εσωτερικού συστήματος στο πρότυπο Bohr.

3.2 Μάζα εξαρτημένη από τη θέση σε σφαιρικές συντεταγμένες

Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, χρειαζόμαστε τη λαπλασιανή

$$\nabla^2 = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j. \quad (3.11)$$

Στην [40] η χαμιλτονιανή του Bohr τροποποιείται με εξάρτηση της μάζας από τη τετραπολική παραμόρφωση (θέση στο πρότυπο Bohr) εφαρμόζοντας απευθείας τις σχέσεις για το ενεργό δυναμικό (3.9) με τη παραπάνω λαπλασιανή. Ωστόσο εδώ θα παρουσιαστεί μια πιο γενική απόδειξη, που θα φανεί χρήσιμη στο τελευταίο κεφάλαιο. Ακολουθώντας τους Quesne και Tkachuk, θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή

$$H = -\frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{m^{\delta'}}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} m^{\kappa'} g^{ij} \partial_j m^{\lambda'} + \frac{m^{\lambda'}}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} m^{\kappa'} g^{ij} \partial_j m^{\delta'} \right] + U, \quad (3.12)$$

με $\delta' + \kappa' + \lambda' = -1$. Μέσω της (3.6)

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m_0} \left[\frac{f^\delta}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} f^\kappa g^{ij} \partial_j f^\lambda + \frac{f^\lambda}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} f^\kappa g^{ij} \partial_j f^\delta \right] + U, \quad (3.13)$$

με $\delta + \kappa + \lambda = 2$. Θα περιοριστούμε στις σφαιρικές συντεταγμένες για χώρο n διαστάσεων, με ακτινική συντεταγμένη β , όπου το β -μέρος της \sqrt{g} είναι το β^{n-1} . Η γεωμετρία του n -διάστατου χώρου R^n εκφράζεται ως το τανυστικό γινόμενο της ακτινικής γραμμής R_+ , που αναπαριστά την ολότητα των τιμών του β , και της σφαίρας S_{n-1} , που αναπαριστά την ολότητα των τιμών των $n-1$ γωνιών, δηλαδή $R^n \sim R_+ \times S_{n-1}$. Αν η συνάρτηση f εξαρτάται μονάχα από την ακτινική συντεταγμένη, $f = f(\beta)$, η (3.13) δίνει

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m_0} \left[\frac{f^\delta}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^\kappa \partial_\beta f^\lambda + \frac{f^\lambda}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^\kappa \partial_\beta f^\delta + \frac{2f^2}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \right] + U, \quad (3.14)$$

τώρα με $i, j \neq \beta$. Όπως φαίνεται στο Παράρτημα Α', η σχέση αυτή καταλήγει

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f \partial_\beta \sqrt{f} + \frac{f^2}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \right] + U_{\text{eff}}, \quad (3.15)$$

όπου ορίζεται το ενεργό δυναμικό

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{\hbar^2}{m_0} \left[\frac{1}{4}(1 - \lambda - \delta) \left(f \partial_\beta [(\partial_\beta f)] + \frac{n-1}{\beta} f (\partial_\beta f) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\partial_\beta f) (\partial_\beta f) \right]. \quad (3.16)$$

Η εξίσωση Schrodinger ορίζει ανηγμένες ενέργειες $\varepsilon = \frac{m_0 E}{\hbar^2}$ και ενεργό δυναμικό $v_{\text{eff}} = \frac{m_0 U}{\hbar^2}$. Με $(\partial_\beta f) \equiv f'$,

$$v_{\text{eff}} = v + \frac{1}{4}(1 - \lambda - \delta) \left(f f'' + \frac{n-1}{\beta} f f' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (f')^2. \quad (3.17)$$

Ο γωνιακός όρος της (3.15), $\frac{f^2}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j$, μπορεί να γραφεί σε μορφή που περιέχει το τελεστή Casimir της ομάδας συμμετρίας $SO(n)$. Ακόμα και στη περίπτωση που η σφαίρα S_{n-1} δεν είναι καλά ορισμένη, όπως στη περίπτωση του προτύπου Bohr για τη περιγραφή αζονικά συμμετρικών ή τριαζονικών πυρήνων, η Χαμιλτονιανή (3.15) διατηρεί τη μορφή της όπως θα δειχθεί παρακάτω.

3.3 Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση

Η αρχική Χαμιλτονιανή του Bohr [1] είναι

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k \right)} \right] + V(\beta, \gamma). \quad (3.18)$$

Θεωρώντας σταθερή παράμετρο B_0 ως προς τις συντεταγμένες (β, Ω_4) , ορίζεται η εξαρτημένη μάζα από τη παραμόρφωση

$$B(\beta) = \frac{B_0}{(f(\beta))^2}. \quad (3.19)$$

Εφαρμόζονται τα αποτελέσματα του εδαφίου 3.2 για τη Χαμιλτονιανή (3.15) και το ενεργό δυναμικό (3.16) στην $n = 5$ γεωμετρία του Bohr. Τότε γεννάται η Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση, η οποία διαβάζεται

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_0} \left[\frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} + \frac{f^2}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{f^2}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k \right)} \right] + V_{\text{eff}}(\beta, \gamma), \quad (3.20)$$

με

$$V_{\text{eff}}(\beta, \gamma) = V(\beta, \gamma) + \frac{\hbar^2}{B_0} \left[\frac{1}{4}(1 - \lambda - \delta) \left(f f'' + \frac{4}{\beta} f f' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (f')^2 \right]. \quad (3.21)$$

Ο ακτινικός όρος T_β αλλάζει δραστικά. Αντίθετα γωνιακός $T_\gamma + T_{rot}$ διατηρεί τη μορφή του με το πολλαπλασιαστικό παράγοντα f^2 . Η εξίσωση Schrodinger για τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση γράφεται πιο απλά

$$H\Psi = \left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} + \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda^2 + v_{\text{eff}} \right] \Psi = \epsilon \Psi, \quad (3.22)$$

με

$$v_{\text{eff}} = v(\beta, \gamma) + \frac{1}{4}(1 - \lambda - \delta) \left(f f'' + \frac{4}{\beta} f f' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (f')^2, \quad (3.23)$$

όπου ανηγμένες ενέργειες $\epsilon = B_0 E / \hbar^2$ και ανηγμένα δυναμικά $v_{\text{eff}} = B_0 V_{\text{eff}} / \hbar^2$ έχουν χρησιμοποιηθεί. Ομοίως με το κεφάλαιο 2, η μορφή αυτής της εξίσωσης δεν αλλάζει κατά το χωρισμό των μεταβλητών όπου ο Casimir της $SO(5)$ Λ^2 αντικαθίσταται από το σύμβολο Λ με τη σύμβαση ότι

- i) για ασταθείς ως προς γ πυρήνες θα δίνεται από το $\Lambda = \tau(\tau + 3)$,
- ii) για αξονικά συμμετρικούς επιμήχεις πυρήνες θα πρέπει να αντικατασταθεί από το

$$\tilde{\Lambda} = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + (6c)(n_\gamma + 1),$$

- iii) για τριαξονικούς πυρήνες θα πρέπει να αντικατασταθεί από το

$$\bar{\Lambda} = \frac{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w)}{4} + \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right).$$

Άρα στη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση οι γωνιακές εξισώσεις και κυματοσυναρτήσεις είναι ακριβώς ίδιες με εκείνες του κεφαλαίου 2. Μονάχα η ακτινική εξίσωση αλλάζει μορφή, για την επίλυση της οποίας θα εφαρμοστεί πιστά και σχεδόν κατά γράμμα η μέθοδος που περιγράφεται στην [3] για τα δυναμικά Davidson και Kratzer που αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του ισοτροπικού ταλαντωτή και της κίνησης Kepler αντίστοιχα.

3.3.1 Ακτινική εξίσωση

Η ακτινική εξίσωση τώρα γίνεται

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} + \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda + v_{\text{eff}} \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta). \quad (3.24)$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις δίνει

$$\frac{1}{2} f^2 \xi'' + \left(f f' + \frac{2f^2}{\beta} \right) \xi' + \left(\frac{(f')^2}{8} + \frac{f f''}{4} + \frac{f f'}{\beta} \right) \xi - \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda \xi + \epsilon \xi - v_{\text{eff}} \xi = 0, \quad (3.25)$$

Θέτοντας

$$\xi(\beta) = \frac{R(\beta)}{\beta^2}, \quad (3.26)$$

η (3.25) τίθεται στη μορφή

$$HR = - \left(\sqrt{f} \frac{d}{d\beta} \sqrt{f} \right)^2 R + 2u_{\text{eff}}R = 2\epsilon R, \quad (3.27)$$

με

$$u_{\text{eff}} = v_{\text{eff}} + \frac{f^2 + \beta f f'}{\beta^2} + \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda. \quad (3.28)$$

Η (3.27) έχει τη μορφή της εξίσωσης (3.10) του εδαφίου 3.1.1 η οποία δέχεται λύσεις με την εφαρμογή της αλγεβρικής μεθόδου που ανέπτυξαν οι Bagchi, Banerjee, Quesne και Tkachuk [3] μέσω της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [4, 67]. Για λόγους πληρότητας θα παρουσιαστεί πολύ περιληπτικά η μέθοδος της [3] προτού εφαρμοστεί στην ακτινική εξίσωση Schrodinger (3.27) για τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση.

3.4 Αλγεβρική επιλυσιμότητα

Δεκαπέντε περίπου χρόνια μετά τη πρόταση της εξίσωσής του, ο E. Schrodinger πρότεινε [68] την αλγεβρική επιλυσιμότητά της μέσω απλής παραγοντοποίησης με γενικευμένους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, όχι μόνο για το μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή αλλά και για τον ισοτροπικό καθώς και τη κίνηση Kepler. Οι Infeld και Hull [69] συστηματοποίησαν και γενίκευσαν τη μέθοδο παραγοντοποίησης για ακόμη περισσότερα φυσικά προβλήματα. Η υπερσυμμετρική κβαντομηχανική ξεκίνησε με τις δουλειές του E. Witten [70] όταν διερευνούσε ρεαλιστικά μοντέλα για το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας. Μετά τη πρόταση του Gendenshtein [71] ότι η εφαρμογή των μεθόδων της υπερσυμμετρίας στην εξίσωση Schrodinger μπορεί να προσφέρει μια συνθήκη ολοκληρωσιμότητας για τη μη-σχετικιστική κβαντομηχανική, αλλά και της δουλειάς του Sukumar [72] για την ιεραρχία των Χαμιλτονιανών, το πεδίο της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής σχεδόν αυτονομήθηκε από την υπερσυμμετρία με τη συστηματική εφαρμογή της στην ακριβή επιλυσιμότητα της εξίσωσης Schrodinger. Η εφαρμογή αυτή συστηματοποιήθηκε στις δουλειές των F. Cooper, A. Khare και U. Sukhatme [4, 67] που φαίνεται πολύ απλά ότι η υπερσυμμετρική κβαντομηχανική προτείνει τη παραγοντοποίηση της εξίσωσης Schrodinger με τους γενικευμένους τελεστές

$$A^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W(x), \quad (3.29)$$

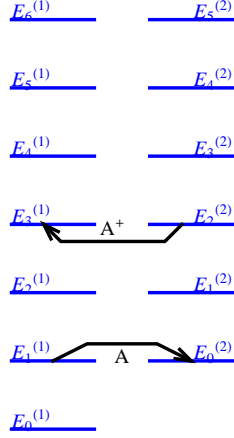
όπου ο τελεστής της θέσης αντικαθίσταται από το υπερδυναμικό $W(x)$. Τα διγραμμικά γινόμενα A^+A^- και A^-A^+ δημιουργούν δύο χαμιλτονιανές $H_{1,2}$, τους λεγόμενους υπερσυμμετρικούς συντρόφους

$$H_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{1,2}(x), \quad (3.30)$$

με

$$V_1(x) = W^2(x) - W'(x), \quad V_2(x) = W^2(x) + W'(x). \quad (3.31)$$

Οι ιδιοκαταστάσεις της H_2 , με ενέργειες $E_{n_1}^{(2)}$, είναι πλήρως εκφυλισμένες με τις αντίστοιχες της H_1 , πλην της βασικής κατάστασης της τελευταίας. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1, καταστροφής



Σχήμα 3.1: Οι υπερσυμμετρικοί σύντροφοι.

κατάστασης της H_1 μέσω του A^- , με ενέργεια $E_n^{(1)}$, δημιουργεί κατάσταση της H_2 με την ίδια ενέργεια. Οι καταστάσεις της H_2 έχουν ενέργειες $E_{n_1}^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$. Η δράση του A^- στη βασική κατάσταση της H_1 δε παράγει κάποια κατάσταση της H_2 , δίνει τίποτα και αποτελεί τη βασική απαίτηση της υπερσυμμετρίας ότι η ιδιοτιμή της ενέργειας της βασικής κατάστασης είναι μηδέν. Οι διεγερμένες καταστάσεις της H_1 δημιουργούνται από τη δράση των A^+ σε εκείνες της H_2 .

Από την άλλη, όπως έδειξε ο Gendenshtein [71], δεδομένης της γνώσης των υπερδυναμικών, μπορεί να στηθεί θεωρία πλήρους αλγεβρικής επιλυσιμότητας για την εξίσωση του Schrodinger. Για τους υπερσυμμετρικούς συντρόφους, πρότεινε τη συνθήκη αναλλοίωτου σχήματος (Shape Invariance)

$$V_2(\alpha_1; x) = V_1(\alpha_2; x) + R(\alpha_1), \quad (3.32)$$

όπου α_1, α_2 είναι σύνολα παραμέτρων ανεξάρτητα του x , με την α_2 να είναι συνάρτηση του α_1 και το υπόλοιπο $R(\alpha_1)$ να είναι επίσης ανεξάρτητο του x . Με άλλα λόγια τα δύο δυναμικά έχουν την ίδια συναρτησιακή εξάρτηση στο x , με τη διαφορά τους να εντοπίζεται στις παραμέτρους του καθενός, και στη σχετική τους μετατόπιση από το υπόλοιπο $R(\alpha_1)$. Επιπροσθέτως, είναι γνωστό ότι η συνθήκη του αναλλοίωτου σχήματος μπορεί να γραφεί μέσω των A^\pm [73]

$$A^-(\alpha_1)A^+(\alpha_1) = A^+(\alpha_2)A^-(\alpha_2) + R(\alpha_1). \quad (3.33)$$

Οι παράμετροι α_i εισάγονται στο υπερδυναμικό $W(\alpha_i; x)$ ώστε

$$A^\pm(\alpha_i) = \mp \frac{d}{dx} + W(\alpha_i; x). \quad (3.34)$$

Η προς επίλυση Χαμιλτονιανή $H \equiv H_1 \equiv H(\alpha_0)$, θεωρείται ως το πρώτο μέλος μιας ιεραρχίας

Χαμιλτονιανών

$$H(\alpha_i) = A^+(\alpha_i)A^-(\alpha_i) + \sum_{j=0}^i \varepsilon_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

με το αναλλοίωτο σχήματος

$$A^-(\alpha_i)A^+(\alpha_i) = A^+(\alpha_{i+1})A^-(\alpha_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.36)$$

το οποίο καταλήγει στη συνθήκη

$$W^2(\alpha_i; x) + W'(\alpha_i; x) = W^2(\alpha_{i+1}; x) - W'(\alpha_{i+1}; x) + \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.37)$$

Η αναδρομική σχέση μεταξύ των α_i είναι χαρακτηριστική του δυναμικού $V(\alpha_i; x)$. Για την ακρίβεια, αυτή είναι η χρησιμότητα του αναλλοίωτου σχήματος, ότι ένα δυναμικό μπορεί να δώσει ακριβείς λύσεις στην εξίσωση Schrodinger αν και μόνον αν οι παράμετροί του ικανοποιούν συγκεκριμένη αναδρομική σχέση. Οι F. Cooper, A. Khare και U. Sukhatme [4, 67] διαπίστωσαν ότι η σχέση μετατόπισης μεταξύ των α_i , τύπου $\alpha_{i+1} = \alpha_i + p$, $p \in \mathbb{N}$, ανταποκρίνεται σε μια πληθώρα ακριβώς επιλύσιμων δυναμικών μεταξύ των οποίων εκείνα του ισοτροπικού ταλαντωτή και της κίνησης Kepler. Για αυτά τα δυναμικά κατασκευάζουν τα υπερδυναμικά $W(\alpha_i; x)$, το φάσμα και τις ιδιοσυναρτήσεις τους.

Από την άλλη, δεδομένης της συναρτησιακής μορφής των υπερδυναμικών από τη παραπάνω μελέτη, η οποία συμβαίνει απουσία της $f(a; x)$, οι Bagchi, Banerjee, Quesne και Tkachuk [3] κατασκευάζουν τις συναρτήσεις $f(a; x)$ επεκτείνοντας τη συνθήκη αναλλοίωτου σχήματος για τους γενικευμένους τελεστές ιεραρχίας

$$A^\pm(\mu_i, \nu_i) = \mp \sqrt{f} \frac{d}{dx} \sqrt{f} + W(\mu_i, \nu_i; x), \quad (3.38)$$

όπου εδώ το σύνολο α_i είναι οι παράμετροι μ_i και ν_i . Εύκολα βλέπει κανείς ότι παραγοντοποιούν εξίσωση Schrodinger με το γενικευμένο τελεστή ορμής $\sqrt{f} \frac{d}{dx} \sqrt{f}$ στο κινητικό όρο. Το αναλλοίωτο σχήματος γράφεται

$$A^-(\mu_i, \nu_i)A^+(\mu_i, \nu_i) = A^-(\mu_{i+1}, \nu_{i+1})A^+(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}, \quad (3.39)$$

και καταλήγει στη συνθήκη

$$W^2(\mu_i, \nu_i; x) + f(a; x)W'(\mu_i, \nu_i; x) = W^2(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; x) - f(a; x)W'(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; x) + \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.40)$$

όπου $\mu_0 = \mu$, $\nu_0 = \nu$. Επειδή $A^-\psi_0(x) = 0$, το υπερδυναμικό $W(\mu, \nu; x)$ και η συνάρτηση $f(a; x)$ ικανοποιούν επίσης τη συνθήκη

$$W^2(\mu, \nu; x) - f(a; x)W'(\mu, \nu; x) + \varepsilon_0 = v_{\text{eff}}(x), \quad (3.41)$$

όπου $v_{\text{eff}}(x)$ το ανηγμένο ενεργό δυναμικό της εξίσωσης (3.9). Οι συναρτήσεις $f(a; x)$ κατασκευάζονται βάσει των δύο τελευταίων εξισώσεων, ως εκείνες που ικανοποιούν το αναλλοίωτο σχήματος. Η απαίτηση αυτή αντανακλά την άλλη ότι η εξάρτηση της μάζας από τη θέση στο

κινητικό όρο, θα πρέπει να επιδρά στο δυναμικό προκαλώντας μονάχα μια αλλαγή στις παραμέτρους του και καμία άλλη στη συναρτησιακή μορφή ή το σχήμα του. Ευθέως λαμβάνουμε τα αποτελέσματά των Bagchi, Banerjee, Quesne και Tkachuk [3] για τον ισοτροπικό ταλαντωτή

$$V(\beta) = \beta^2 + \frac{\Lambda}{\beta^2} : \quad W(\mu, \nu; \beta) = \frac{\mu}{\beta} + \nu\beta, \quad f(a; \beta) = 1 + a\beta^2, \quad (3.42)$$

και το δυναμικό Coulomb

$$V(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} + \frac{\Lambda}{\beta^2} : \quad W(\mu, \nu; \beta) = \frac{\mu}{\beta} + \nu, \quad f(a; \beta) = 1 + a\beta. \quad (3.43)$$

Γίνεται πλέον φανερό ότι η a παραμετροποιεί την εξάρτηση της μάζας από τη θέση. Για $a = 0$ οι συναρτήσεις $f(a; \beta)$ απουσιάζουν και η μάζα είναι ανεξάρτητη από τη θέση όπως στη συνήθη κβαντομηχανική. Οι Bagchi, Banerjee, Quesne και Tkachuk [3] ταξινομούν τα υπερδυναμικά και τις συναρτήσεις $f(a; \beta)$ σε κλάσεις υπερδυναμικών. Για παράδειγμα το υπερδυναμικό και η f του δυναμικού Coulomb ανήκουν στη πρώτη κλάση, ενώ οι αντίστοιχες του ισοτροπικού ταλαντωτή ανήκουν στη δεύτερη κλάση. Κάθε κλάση παράγει χαρακτηριστικές λύσεις, δηλαδή φάσμα και ιδιοσυναρτήσεις.

Για τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση, η ακτινική εξίσωση

$$HR = - \left(\sqrt{f} \frac{d}{d\beta} \sqrt{f} \right)^2 R + 2u_{\text{eff}}R = 2\epsilon R, \quad (3.44)$$

με

$$u_{\text{eff}} = v_{\text{eff}} + \frac{f^2 + \beta f f'}{\beta^2} + \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda, \quad (3.45)$$

μπορεί να επιλυθεί αλγεβρικά έχοντας από τη παραπάνω μελέτη τα υπερδυναμικά $W(\mu, \nu; \beta)$ και τις συναρτήσεις $f(a; \beta)$ για το δυναμικό $v(\beta)$. Θα εφαρμοστεί η μέθοδος που αναπτύχθηκε αμέσως πριν στη παραπάνω εξίσωση για τα δυναμικά Davidson και Kratzer. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί αναλυτικά η άλγεβρα των υπολογισμών για το φάσμα και τις ιδιοσυναρτήσεις. Η φυσική και η σύγκριση με το πείραμα θα είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

3.5 Λύσεις στο δυναμικό Davidson

Στη περίπτωση αυτή το $v(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$. Το ενεργό δυναμικό που εμφανίζεται στην εξίσωση (3.44), $2u_{\text{eff}}$, λαμβάνει τη μορφή

$$2u_{\text{eff}} = 2\beta^2 + 2\frac{\beta_0^4}{\beta^2} + \frac{1}{2}(1-\lambda-\delta) \left(f f'' + \frac{4}{\beta} f f' \right) + \left(\frac{1}{2}-\delta \right) \left(\frac{1}{2}-\lambda \right) (f')^2 + 2\frac{f^2 + \beta f f'}{\beta^2} + \frac{f^2}{\beta^2} \Lambda. \quad (3.46)$$

Το υπερδυναμικό $W(\mu, \nu; \beta)$ και η συνάρτηση $f(a; \beta)$ για το δυναμικό Davidson είναι τα ίδια όπως στη περίπτωση του ισοτροπικού ταλαντωτή

$$W(\mu, \nu; x) = \frac{\mu}{\beta} + \nu\beta, \quad f(a; \beta) = 1 + a\beta^2. \quad (3.47)$$

Γί αυτή τη συνάρτηση $f(a; \beta)$ το u_{eff} διατηρεί αναλλοίωτη τη μορφή του 5-διάστατου αρμονικού ταλαντωτή με

$$2u_{\text{eff}} = k_1\beta^2 + k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta^2}. \quad (3.48)$$

Αντιστοιχία με την Εξ. (3.46) και ότι $f(a; \beta) = 1 + a\beta^2$ επιβάλλει

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 + a^2[5(1 - \delta - \lambda) + (1 - 2\delta)(1 - 2\lambda) + 6 + \Lambda], \\ k_0 &= a[5(1 - \delta - \lambda) + 8 + 2\Lambda], \\ k_{-1} &= 2 + \Lambda + 2\beta_0^4. \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.5.1 Το φάσμα

Τώρα η ακτινική εξίσωση

$$HR = - \left(\sqrt{f} \frac{d}{d\beta} \sqrt{f} \right)^2 R + 2u_{\text{eff}}R = 2\epsilon R, \quad (3.50)$$

μπορεί να λυθεί αλγεβρικά μέσω των υπερσυμμετρικών τελεστών

$$A_i^\pm = A^\pm(\mu_i, \nu_i) = \mp \sqrt{f} \frac{d}{dx} \sqrt{f} + W(\mu_i, \nu_i; x), \quad (3.51)$$

υποθέτοντας ότι είναι το πρώτο μέλος $H_0 = H$ μιας ιεραρχίας Χαμιλτονιανών

$$H_i = A_i^+ A_i^- + \sum_{j=0}^i \epsilon_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

Η αντιστοιχία του $A^+(\mu, \nu)A^-(\mu, \nu)$ με την H δίνει τη συνθήκη

$$W^2(\mu, \nu; \beta) - f(\beta)W'(\mu, \nu; \beta) + \epsilon_0 = 2u_{\text{eff}}(\beta). \quad (3.53)$$

Άρα

$$\left(\frac{\mu}{\beta} + \nu\beta \right)^2 - (1 + a\beta^2) \left(-\frac{\mu}{\beta^2} + \nu \right) + \epsilon_0 = k_1\beta^2 + k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta^2}, \quad (3.54)$$

που είναι ισοδύναμες με

$$\mu(\mu + 1) = k_{-1}, \quad \nu(\nu - a) = k_1, \quad 2\mu\nu + \mu a - \nu + \epsilon_0 = k_0. \quad (3.55)$$

Οι λύσεις τους είναι

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(-1 \pm \Delta_1), & \nu &= \frac{a}{2}(1 \pm \Delta_2), \\ \epsilon_0 &= k_0 - 2\mu\nu - \mu a + \nu, \\ \Delta_1 &\equiv \sqrt{1 + 4k_{-1}}, & \Delta_2 &\equiv \sqrt{1 + 4\frac{k_1}{a^2}}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

με τη προϋπόθεση ότι $1 + 4k_1/a^2 \geq 0$ ($1 + 4k_{-1}$ είναι πάντα θετικό). Όπως θα δείξουμε παρακάτω οι συνθήκες που επιβεβαιώνουν ότι η κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης είναι φυσικά αποδεκτή επιλέγουν το κάτω πρόσημο για το μ και το πάνω για το ν :

$$\mu = -\frac{1}{2}(1 + \Delta_1), \quad \nu = \frac{a}{2}(1 + \Delta_2). \quad (3.57)$$

Αυτά είναι αρκετά για την ενέργεια της βασικής κατάστασης ϵ_0 . Οι ενέργειες των διεγερμένων καταστάσεων βρίσκονται από τη συνθήκη

$$W^2(\mu_i, \nu_i; \beta) + f(\beta)W'(\mu_i, \nu_i; \beta) = W^2(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; \beta) - f(\beta)W'(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; \beta) + \epsilon_{i+1}, \quad (3.58)$$

όπου $\mu_0 = \mu$, $\nu_0 = \nu$. Με άλλα λόγια

$$\left(\frac{\mu_i}{\beta} + \nu_i\beta\right)^2 + (1+a\beta^2)\left(-\frac{\mu_i}{\beta^2} + \nu_i\right) = \left(\frac{\mu_{i+1}}{\beta} + \nu_{i+1}\beta\right)^2 - (1+a\beta^2)\left(-\frac{\mu_{i+1}}{\beta^2} + \nu_{i+1}\right) + \epsilon_{i+1}, \quad (3.59)$$

που οδηγεί σε τρεις συνθήκες

$$\begin{aligned} \mu_i(\mu_i - 1) &= \mu_{i+1}(\mu_{i+1} + 1), \\ \nu_i(\nu_i + a) &= \nu_{i+1}(\nu_{i+1} - a), \\ 2\mu_i\nu_i - \mu_i a + \nu_i &= 2\mu_{i+1}\nu_{i+1} + \mu_{i+1}a - \nu_{i+1} + \epsilon_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Οι λύσεις τους είναι

$$\mu_{i+1} = \mu_i - 1, \quad \nu_{i+1} = \nu_i + a, \quad (3.61)$$

και

$$\epsilon_{i+1} = 2(\mu_i\nu_i - \mu_{i+1}\nu_{i+1}) - (\mu_i + \mu_{i+1})a + \nu_i + \nu_{i+1}. \quad (3.62)$$

Υπάρχουν και άλλες λύσεις για τα μ_{i+1} και ν_{i+1} , δηλαδή $\mu_{i+1} = -\mu_i$ και $\nu_{i+1} = -\nu_i$, αλλά τα εναλλασσόμενα πρόσημα δε θα ήταν συμβατά με τις φυσικά αποδεκτές λύσεις για τις διεγερμένες καταστάσεις. Τελικά, η επαναληψιμότητα (iteration) της (3.61) οδηγεί στη

$$\mu_i = \mu - i, \quad \nu_i = \nu + ia. \quad (3.63)$$

Το ενεργειακό φάσμα της ακτινικής εξίσωσης δίνεται τότε από

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \epsilon_i = \frac{1}{2} \left[k_0 - 2\mu_n\nu_n - a \left(2 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i + \mu_n \right) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \nu_i + \nu_n \right], \quad (3.64)$$

που δίνει

$$\epsilon_n = \frac{1}{2}[k_0 - 2\mu\nu - a\mu + \nu - 4(a\mu - \nu)n + 4an^2]. \quad (3.65)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη (3.56), έχουμε

$$\epsilon_n = \frac{1}{2}[k_0 + \frac{1}{2}a(3+2\Delta_1+2\Delta_2+\Delta_1\Delta_2) + 2a(2+\Delta_1+\Delta_2)n + 4an^2], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

Η εξίσωση (3.66) προσφέρει μονάχα μια φορμαλιστική λύση στο ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων. Το εύρος των τιμών n καθορίζεται από την ύπαρξη φυσικά αποδεκτών κυματοσυναρτήσεων.

3.5.2 Οι Κυματοσυναρτήσεις

Προκειμένου να γίνουν φυσικά αποδεκτές, οι δέσμιες κυματοσυναρτήσεις θα πρέπει να ικανοποιούν δύο συνθήκες [3]:

(i) Όπως και στη περίπτωση της συνήθους (σταθερής μάζας) κβαντομηχανικής, θα πρέπει να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού του u_{eff}

$$\int_0^\infty d\beta |R_n(\beta)|^2 < \infty. \quad (3.67)$$

(ii) Επιπροσθέτως, θα πρέπει να εξασφαλίζουν την ερμιτιανότητα του H . Γί αυτό το σκοπό είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι ο τελεστής $-i\sqrt{f}(d/d\beta)\sqrt{f}$ είναι ερμιτιανός, το οποίο δίνει τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} |R_n(\beta)|^2 f(\beta) &\rightarrow 0 \quad \text{για } \beta \rightarrow 0 \quad \text{και } \beta \rightarrow \infty, \\ |R_n(\beta)|^2 &\rightarrow 0 \quad \text{για } \beta \rightarrow 0 \quad \text{και } |R_n(\beta)|^2 \beta^2 \rightarrow 0 \quad \text{για } \beta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Επειδή οι συνθήκες (3.68) είναι φανερά πιο αυστηρές από την (3.67), θα μας απασχολήσουν μονάχα οι πρώτες.

3.5.3 Η Βασική Κατάσταση

Η κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης λαμβάνεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$A^-(\mu, \nu) R_0(\mu, \nu; \beta) = 0. \quad (3.69)$$

Δηλαδή

$$R_0(\beta) = R_0(\mu, \nu; \beta) = \frac{N_0}{\sqrt{f(\beta)}} \exp\left(-\int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta}\right),$$

όπου N_0 είναι κάποιος συντελεστής κανονικοποίησης. Εδώ

$$\int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} = \int^\beta \left(\frac{\mu}{\tilde{\beta}} + \frac{(\nu - \mu a)\tilde{\beta}}{1 + a\tilde{\beta}^2} \right) d\tilde{\beta} = \mu \ln \beta + \frac{1}{2a}(\nu - \mu a) \ln(1 + a\beta^2). \quad (3.70)$$

Άρα

$$R_0(\beta) = N_0 \beta^{-\mu} f^{-(\nu - \mu a + a)/(2a)}. \quad (3.71)$$

Για $\beta \rightarrow 0$, η συνάρτηση $|R_0(\beta)|^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\mu}$. Η συνθήκη (3.68) απαιτεί ότι $-2\mu > 0$ ή $\mu < 0$. Αφού η ποσότητα k_{-1} , οριζόμενη στην εξίσωση (3.49), είναι μεγαλύτερη του 2, έπεται ότι η Δ_1 , που ορίζεται στη (3.56), είναι μεγαλύτερη του 3, άρα η επιλογή του άνω προσήμου για το μ στη (3.56) θα οδηγούσε στο $\mu > 1$. Επειδή αυτό δεν είναι αποδεκτό, πρέπει να λάβουμε ως επιλογή το κάτω πρόσημο, $\mu < -2$.

Για $\beta \rightarrow \infty$, η $|R_0(\beta)|^2 \beta^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\nu/a}$. Η συνθήκη (3.68) απαιτεί $\nu > 0$. Αυτός ο περιορισμός ικανοποιείται από την επιλογή του άνω προσήμου για το ν στο πρώτο μέλος της (3.56). Η επιλογή του κάτω προσήμου δεν ικανοποιείται αν περιοριστούμε σε αρκετά

μικρές τιμές του a . Τότε το k_1 στην (3.49) θα είναι θετικό και η Δ_2 στη (3.56) θα είναι μεγαλύτερη του 1. Για αρκετά μεγάλες τιμές του a , ωστόσο, και οι δύο επιλογές του προσήμου μπορεί να είναι αποδεκτές. Αφού, μεταξύ των δύο αποδεκτών κυματοσυναρτήσεων, είναι σύνηθες στη κβαντομηχανική να επιλεγεί η πιο ομαλα συμπεριφερόμενη (δείτε, π.χ τη [74] και τις αναφορές της), υποθέτουμε το άνω πρόσημο για το ν , άρα λαμβάνεται η εξίσωση (3.57).

3.5.4 Διεγερμένες Καταστάσεις

Η κυματοσυνάρτηση της n -οστής διεγερμένης κατάστασης βρίσκεται από τη δράση των υπερσυμμετρικών τελεστών δημιουργίας στη βασική κατάσταση του n -οστού μέλους της ιεραρχίας. Για παράδειγμα η πρώτη διεγερμένη με συντελεστή κανονικοποίησης N_1 είναι

$$R_1(\mu_0, \nu_0; \beta) = N_1 A^+(\mu_0, \nu_0) R_0(\mu_1, \nu_1; \beta), \quad (3.72)$$

όπου $R_0(\mu_1, \nu_1; \beta)$ η βασική κατάσταση του του πρώτου μέλους της ιεραρχίας. Η συστηματική μελέτη των [3] παράγει τις λύσεις για τις διεγερμένες καταστάσεις $R_n(\mu, \nu; \beta)$ με πολυώνυμα $P_n(\mu, \nu; y)$ που ικανοποιούν εξισώσεις χαρακτηριστικές της κλασσης του υπερδυναμικού. Στη περίπτωση του υπερδυναμικού $W(\mu, \nu; \beta) = \frac{\mu}{\beta} + \nu\beta$ οι λύσεις είναι [3]

$$R_n(\mu, \nu; \beta) = N_n y^{-\frac{n}{2}} P_n(\mu, \nu; y) R_0(\mu_n, \nu_n; \beta), \quad y = \beta^2, \quad (3.73)$$

με τα πολυώνυμα n -οστού βαθμού στα y να ικανοποιούν την εξίσωση [3]

$$P_{n+1}(\mu, \nu; y) = -2y(1+ay) \frac{d}{dy} P_n(\mu_1, \nu_1; y) + [\mu_{n+1} + \mu + n + (\nu_{n+1} + \nu + na)y] P_n(\mu_1, \nu_1; y), \quad (3.74)$$

με αρχική τιμή τη $P_0(\mu, \nu; y) = 1$. Άρα

$$R_n(\beta) = R_n(\mu, \nu; \beta) \propto \beta^{-n} R_0(\mu_n, \nu_n; \beta) P_n(\mu, \nu; y). \quad (3.75)$$

Από τις εξισώσεις (3.63) και (3.71), έπεται ότι η βασική κατάσταση του n οστού μέλους της ιεραρχίας είναι

$$R_0(\mu_n, \nu_n; \beta) \propto \beta^{-\mu_n} f^{-(\nu_n - \mu_n a + a)/(2a)} \propto R_0(\mu, \nu; \beta) \beta^n f^{-n}, \quad (3.76)$$

ώστε η εξίσωση (3.75) να γίνεται

$$R_n(\beta) \propto R_0(\beta) f^{-n} P_n(\mu, \nu; y). \quad (3.77)$$

Γίνεται πλέον φανερό ότι η $R_n(\beta)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις για την ερμιτιανότητα του H για κάθε $n = 1, 2, \dots$, αφού και η $R_0(\beta)$ την ικανοποιεί. Απομένει πλέον να λύσουμε την εξίσωση (3.74). Γι' αυτό το σκοπό ας κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$t = 1 - \frac{2}{f} = \frac{-1 + ay}{1 + ay}, \quad P_n(\mu, \nu; y) = C_n f^n Q_n(\mu, \nu; t), \quad (3.78)$$

όπου η C_n είναι κάποια σταθερά. Για τον ορισμό (3.78), έπεται ότι το $Q_n(\mu, \nu; t)$ είναι ένα πολυώνυμο n -οστού βαθμού στα t . Διαδοχικά λαμβάνουμε

$$y = \frac{1+t}{a(1-t)}, \quad 1+ay = \frac{2}{1-t}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{a}{2}(1-t)^2 \frac{d}{dt}. \quad (3.79)$$

Ευθέως τότε η εξίσωση (3.74) γίνεται

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} Q_{n+1}(\mu, \nu; t) = \left\{ -(1-t^2) \frac{d}{dt} + \left[\mu + \frac{\nu}{a} + \left(\frac{\nu}{a} - \mu + 1 \right) t \right] \right\} Q_n(\mu-1, \nu+a; t). \quad (3.80)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολυώνυμα Jacobi ικανοποιούν τη σχέση (δείτε την εξίσωση (1.8.7) της [75])

$$2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = \left\{ -(1-x^2) \frac{d}{dx} + [\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x] \right\} P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad (3.81)$$

βλέπουμε ότι τα $Q_n(\mu, \nu; t)$ είναι βασικά κάποια πολυώνυμα Jacobi

$$Q_n(\mu, \nu; t) = P_n^{\left(\frac{\nu}{a}-\frac{1}{2}, -\mu-\frac{1}{2}\right)}(t) = P_n^{\left(\frac{\Delta_2}{2}, \frac{\Delta_1}{2}\right)}(t), \quad (3.82)$$

δεδομένης της επιλογής

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 2(n+1), \quad C_0 = 1, \quad (3.83)$$

ή με άλλα λόγια $C_n = 2^n n!$. Άρα συμπεραίνουμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις δίνονται από

$$R_n(\beta) = \frac{N_n}{N_0} R_0(\beta) P_n^{\left(\frac{\nu}{a}-\frac{1}{2}, -\mu-\frac{1}{2}\right)}(t) = N_n \beta^{-\mu} f^{-(\nu-\mu a+a)/(2a)} P_n^{\left(\frac{\nu}{a}-\frac{1}{2}, -\mu-\frac{1}{2}\right)}(t), \quad (3.84)$$

ή

$$R_n(\beta) = N_n \beta^{(1+\Delta_1)/2} f^{-1-(\Delta_1+\Delta_2)/4} P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t), \quad t = \frac{-1+a\beta^2}{1+a\beta^2}, \quad (3.85)$$

όπου N_n είναι κάποιος συντελεστής κανονικοποίησης.

3.5.5 Συντελεστής Κανονικοποίησης

Για τον υπολογισμό του N_n , εκφράζουμε αρχικά όλη τη κυματοσυνάρτηση σε όρους της t :

$$R_n = N_n y^{(1+\Delta_1)/4} (1+ay)^{-1-(\Delta_1+\Delta_2)/4} P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t), \quad (3.86)$$

ή

$$R_n = N_n 2^{-1-(\Delta_1+\Delta_2)/4} a^{-(1+\Delta_1)/4} (1+t)^{(1+\Delta_1)/4} (1-t)^{(3+\Delta_2)/4} P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t). \quad (3.87)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$d\beta = \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{dt}{\sqrt{a}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}}, \quad (3.88)$$

λαμβάνουμε

$$\int_0^\infty |R_n|^2 d\beta = |N_n|^2 2^{-2-(\Delta_1+\Delta_2)/2} a^{-1-\Delta_1/2} \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\Delta_2/2} (1+t)^{\Delta_1/2} [P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t)]^2 dt, \quad (3.89)$$

σε όρους του ολοκληρώματος κανονικοποίησης των πολυωνύμων Jacobi [84]. Άρα, η συνθήκη κανονικοποίησης είναι

$$|N_n|^2 \left(2^{-2-(\Delta_1+\Delta_2)/2} a^{-1-\Delta_1/2} \right) \frac{2^{(\Delta_1+\Delta_2)/2+1} \Gamma(n + \frac{\Delta_1}{2} + 1) \Gamma(n + \frac{\Delta_2}{2} + 1)}{(2n + \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + 1) n! \Gamma(n + \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + 1)} = 1, \quad (3.90)$$

και δίνει

$$N_n = \left(2a^{\Delta_1/2+1} \left(2n + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + 1 \right) n! \right)^{1/2} \left(\frac{\Gamma(n + \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + 1)}{\Gamma(n + \frac{\Delta_1}{2} + 1) \Gamma(n + \frac{\Delta_2}{2} + 1)} \right)^{1/2}. \quad (3.91)$$

3.6 Λύσεις στο δυναμικό Kratzer

Θα θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση του δυναμικού Kratzer [80]

$$v(\beta) = -\frac{1}{\beta} + \frac{\tilde{B}}{\beta^2}. \quad (3.92)$$

Η λύση θα προκύψει από τις νέες παραμέτρους (k_0, k_{-1}, k_{-2}) και τη σχέση τους με τις παραμέτρους (μ_i, ν_i) του υπερδυναμικού. Το ενεργό δυναμικό που εμφανίζεται στην εξίσωση (3.44) $2u_{\text{eff}}$, λαμβάνει τη μορφή

$$2u_{\text{eff}} = -2\frac{1}{\beta} + 2\frac{\tilde{B}}{\beta^2} + \frac{1}{2}(1-\lambda-\delta) \left(ff'' + \frac{4}{\beta} ff' \right) + \left(\frac{1}{2}-\delta \right) \left(\frac{1}{2}-\lambda \right) (f')^2 + 2\frac{f^2 + \beta ff'}{\beta^2} + \frac{f^2}{\beta^2} \Lambda. \quad (3.93)$$

Το υπερδυναμικό $W(\mu, \nu; \beta)$ και η συνάρτηση $f(a; \beta)$ για το δυναμικό Kratzer είναι τα ίδια όπως στη περίπτωση του δυναμικού Coulomb [3]

$$W(\mu, \nu; \beta) = \frac{\mu}{\beta} + \nu, \quad f(a; \beta) = 1 + a\beta. \quad (3.94)$$

Γι αυτή τη συνάρτηση $f(a; \beta)$, το u_{eff} διατηρεί αναλλοίωτη τη κίνηση Kepler

$$2u_{\text{eff}} = k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta} + \frac{k_{-2}}{\beta^2}. \quad (3.95)$$

Αντιστοιχία με την (3.93) για την $f(a; \beta) = 1 + a\beta$ επιβάλλει

$$\begin{aligned} k_0 &= a^2 [2(3 - \delta - \lambda) + \frac{1}{4}(1 - 2\delta)(1 - 2\lambda) + \Lambda], \\ k_{-1} &= -2 + 2a[(4 - \delta - \lambda) + \Lambda], \\ k_{-2} &= 2 + \Lambda + 2\tilde{B}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Το υπερδυναμικό $W(\mu, \nu; \beta)$ ικανοποιεί τις δύο συνθήκες

$$W^2(\mu, \nu; \beta) - f(\beta)W'(\mu, \nu; \beta) + \varepsilon_0 = 2u_{\text{eff}}(\beta), \quad (3.97)$$

και

$$W^2(\mu_i, \nu_i; \beta) + f(\beta)W'(\mu_i, \nu_i; \beta) = W^2(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; \beta) - f(\beta)W'(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; \beta) + \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.98)$$

όπου $\mu_0 = \mu$, $\nu_0 = \nu$. Εισάγοντας τις εξ. (3.94) και (3.96) στην (3.97), λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\mu}{\beta} + \nu\right)^2 - (1 + a\beta) \left(-\frac{\mu}{\beta^2}\right) + \varepsilon_0 = k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta} + \frac{k_{-2}}{\beta^2}, \quad (3.99)$$

που ισοδυναμεί με τις τρεις εξισώσεις

$$\mu(\mu + 1) = k_{-2}, \quad \mu(2\nu + a) = k_{-1}, \quad \nu^2 + \varepsilon_0 = k_0. \quad (3.100)$$

Οι λύσεις τους είναι

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(-1 \pm \Delta), & \nu &= \frac{k_{-1} - a\mu}{2\mu}, & \varepsilon_0 &= k_0 - \nu^2, \\ \Delta &\equiv \sqrt{1 + 4k_{-2}}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

όπου σημειώνουμε ότι το $1 + 4k_{-2}$ είναι πάντα θετικό. Οι φυσικά αποδεκτές λύσεις για τη κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης θα δώσουν το κάτω πρόσημο για τη παράμετρο μ :

$$\mu = -\frac{1}{2}(1 + \Delta). \quad (3.102)$$

Ομοίως, από την Εξ. (3.98), λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\mu_i}{\beta} + \nu_i\right)^2 + (1 + a\beta) \left(-\frac{\mu_i}{\beta^2}\right) = \left(\frac{\mu_{i+1}}{\beta} + \nu_{i+1}\right)^2 - (1 + a\beta) \left(-\frac{\mu_{i+1}}{\beta^2}\right) + \varepsilon_{i+1}, \quad (3.103)$$

που οδηγεί στις τρεις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mu_i(\mu_i - 1) &= \mu_{i+1}(\mu_{i+1} + 1), \\ \mu_i(2\nu_i - a) &= \mu_{i+1}(2\nu_{i+1} + a), \\ \nu_i^2 &= \nu_{i+1}^2 + \varepsilon_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Οι λύσεις τους είναι

$$\mu_{i+1} = \mu_i - 1, \quad 2\mu_{i+1}\nu_{i+1} = 2\mu_i\nu_i - a(\mu_i + \mu_{i+1}), \quad \varepsilon_{i+1} = \nu_i^2 - \nu_{i+1}^2. \quad (3.105)$$

Υπάρχει φυσικά άλλη μια λύση για το μ_{i+1} , δηλαδή $\mu_{i+1} = -\mu_i$, αλλά τα εναλλασσόμενα πρόσημα δεν είναι συμβατά με τις φυσικά αποδεκτές λύσεις για τις κυματοσυναρτήσεις των

διεγερμένων καταστάσεων. Τέλος, η επαναληψιμότητα των πρώτων δύο σχέσεων στην (3.105) οδηγεί σε

$$\mu_i = \mu - i, \quad \nu_i = \frac{2\mu(\nu - ai) + ai^2}{2(\mu - i)}. \quad (3.106)$$

Για μελλοντική χρήση, αξίζει να σημειωθεί ότι τα ν_i μπορούν να ξαναγραφούν σε όρους των μ_i ως

$$\nu_i = \frac{a}{2} \left(\mu_i - \frac{\tilde{K}}{\mu_i} \right), \quad \tilde{K} \equiv k_{-2} - \frac{k_{-1}}{a}. \quad (3.107)$$

Από την (3.106), πράγματι έπεται ότι

$$\nu_i = \frac{a}{2} \left(\mu_i - \frac{\mu(\mu - \frac{2\nu}{a})}{\mu_i} \right), \quad (3.108)$$

ενώ η εξίσωση (3.100) οδηγεί σε

$$k_{-2} - \frac{k_{-1}}{a} = \mu \left(\mu - \frac{2\nu}{a} \right). \quad (3.109)$$

Το ενεργειακό φάσμα δίνεται από

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \epsilon_i = \frac{1}{2} (k_0 - \nu_n^2) = \frac{1}{2} \left[k_0 - \left(\frac{k_{-1} + a \left[n^2 + \frac{1}{2}(1 + \Delta)(2n + 1) \right]}{2n + 1 + \Delta} \right)^2 \right], \quad (3.110)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

3.6.1 Η βασική κατάσταση

Η βασική κατάσταση

$$R_0(\beta) = R_0(\mu, \nu; \beta) = \frac{N_0}{\sqrt{f(\beta)}} \exp \left(- \int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} \right), \quad (3.111)$$

με N_0 το συντελεστή κανονικοποίησης δίνει

$$\int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} = \int^\beta \left(\frac{\mu}{\tilde{\beta}} + \frac{\nu - a\mu}{1 + a\tilde{\beta}} \right) d\tilde{\beta} = \mu \ln \beta + \frac{1}{a}(\nu - a\mu) \ln(1 + a\beta). \quad (3.112)$$

Άρα

$$R_0(\beta) = N_0 \beta^{-\mu} f^{-\frac{\nu - a\mu}{a} - \frac{1}{2}} = N_0 \beta^{-\mu} f^{\frac{1}{2}(\mu + \frac{\tilde{K}}{\mu} - 1)}, \quad (3.113)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η Εξ. (3.107) για $i = 0$. Για $\beta \rightarrow 0$, η συνάρτηση $|R_0(\beta)|^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\mu}$. Η συνθήκη (3.68) υποθέτει ότι $\mu < 0$. Αφού η ποσότητα k_{-2} , οριζόμενη στην Εξ. (3.96), είναι μεγαλύτερη από 2, έπεται ότι η Δ , οριζόμενη στη (3.101),

είναι μεγαλύτερη από 3, ώστε το πάνω πρόσημο στην (3.101) να οδηγεί στο $\mu > 1$. Αυτό δεν είναι αποδεκτό οπότε διατηρείται το κάτω πρόσημο, $\mu < -2$.

Για $\beta \rightarrow \infty$, η ποσότητα $|R_0(\beta)|^2\beta$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-\mu+\frac{\tilde{K}}{\mu}}$. Η συνθήκη (3.68) υποθέτει ότι $\tilde{K}/\mu < \mu$ ή

$$\mu^2 < \tilde{K}. \quad (3.114)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.100), (3.102) και (3.107) ο περιορισμός ξαναγράφεται

$$|\mu| = \frac{1}{2}(1 + \Delta) < -\frac{k-1}{a}. \quad (3.115)$$

Μια φυσικά αποδεκτή κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης τελικά υπάρχει αν και μόνο αν η ανισότητα (3.115) ικανοποιείται από τις παραμέτρους του προβλήματος.

3.6.2 Διεγερμένες καταστάσεις

Για το υπερδυναμικό της πρώτης κλάσης [3] δίνει τις κυματοσυναρτήσεις

$$R_n(\beta) = R_n(\mu, \nu; \beta) \propto R_0(\mu_n, \nu_n; \beta) P_n(\mu, \nu; y), y = \frac{1}{\beta}, \quad (3.116)$$

όπου τα πολυώνυμα $P_n(\mu, \nu; y)$ είναι n -οστού βαθμού στα y , ικανοποιώντας την εξίσωση

$$P_{n+1}(\mu, \nu; y) = y(y+a) \frac{d}{dy} P_n(\mu, \nu; y) + [(\mu_{n+1} + \mu)y + \nu_{n+1} + \nu] P_n(\mu, \nu; y), \quad (3.117)$$

με αρχική τιμή τη $P_0(\mu, \nu; y) = 1$. Από τις Εξ. (3.107) και (3.113), έπεται

$$R_n(\beta) \propto \beta^{-\mu_n} f^{-\frac{\nu_n - a\mu_n}{a} - \frac{1}{2}} P_n(\mu, \nu; y) \propto \beta^{-\mu_n} f^{\frac{1}{2}(\mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n} - 1)} P_n(\mu, \nu; y). \quad (3.118)$$

Για $\beta \rightarrow 0$, η συνάρτηση $|R_n(\beta)|^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\mu_n - 2n} = \beta^{-2\mu}$, που πηγαίνει στο μηδέν όπως θα έπρεπε. Για $\beta \rightarrow \infty$, η $|R_n(\beta)|^2\beta$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-\mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n}}$. Άρα η συνθήκη (3.68) υποθέτει ότι

$$\mu_n^2 < \tilde{K}, \quad (3.119)$$

που ισοδυναμεί με

$$n^2 + (2n+1)|\mu| = n^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)(1 + \Delta) < -\frac{k-1}{a}. \quad (3.120)$$

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός δέσμιων κυματοσυναρτήσεων ανταποκρινόμενες στα $n = 0, 1, \dots, n_{\max}$, όπου n_{\max} τέτοιο ώστε

$$n_{\max}^2 + \left(n_{\max} + \frac{1}{2}\right)(1 + \Delta) < -\frac{k-1}{a} \leq (n_{\max} + 1)^2 + \left(n_{\max} + \frac{3}{2}\right)(1 + \Delta). \quad (3.121)$$

Μένει τώρα η επίλυση της Εξ. (3.117). Γί αυτό το σκοπό κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$t = \frac{2y+a}{a}, \quad P_n\left(\mu, \frac{a}{2}\left(\mu - \frac{\tilde{K}}{\mu}\right); y\right) = C_n^{(\mu)} Q_n(\mu; t), \quad (3.122)$$

όπου $C_n^{(\mu)}$ είναι κάποια σταθερά. Εξ' ορισμού της (3.122), έπεται ότι το $Q_n(\mu; t)$ είναι n -οστού βαθμού πολυώνυμο στα t . Διαδοχικά λαμβάνουμε

$$y = \frac{a}{2}(t-1), \quad y+a = \frac{a}{2}(t+1), \quad \frac{d}{dy} = \frac{2}{a} \frac{d}{dt}. \quad (3.123)$$

Με την Εξ. (3.107), ευθέως δείχνεται ότι η Εξ. (3.117) γίνεται

$$\frac{2C_{n+1}^{(\mu)}}{aC_n^{(\mu-1)}} Q_{n+1}(\mu; t) = \left\{ -(1-t^2) \frac{d}{dt} + (2\mu_{n+1} + n + 1) \left(t - \frac{\tilde{K}}{\mu_{n+1}(\mu_{n+1} + n + 1)} \right) \right\} \times Q_n(\mu - 1; t). \quad (3.124)$$

Από την άλλη τα πολυώνυμα Jacobi ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(z) = \left\{ -(1-z^2) \frac{d}{dz} + (n+\alpha+\beta+1) \times \left(z + \frac{\alpha-\beta}{2n+\alpha+\beta+2} \right) \right\} P_n^{(\alpha, \beta)}(z), \quad (3.125)$$

που αποκομίζεται από τις Εξ. (22.7.1) και (22.8.1) της [84]. Άρα τα $Q_n(\mu-1; t)$ είναι βασικά κάποια πολυώνυμα Jacobi

$$Q_n(\mu-1; t) = P_n^{(\mu_{n+1}-\frac{\tilde{K}}{\mu_{n+1}}, \mu_{n+1}+\frac{\tilde{K}}{\mu_{n+1}})}(t), \quad (3.126)$$

βάσει της επιλογής

$$\frac{C_{n+1}^{(\mu)}}{C_n^{(\mu-1)}} = \frac{a(n+1)(2\mu_{n+1}+n+1)}{2(\mu_{n+1}+n+1)}, \quad C_0^{(\mu-n-1)} = 1, \quad (3.127)$$

ή με άλλα λόγια

$$C_n^{(\mu)} = \left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{n! \Gamma(2\mu - n + 1) \Gamma(\mu - n + 1)}{\Gamma(2\mu - 2n + 1) \Gamma(\mu + 1)}. \quad (3.128)$$

Τελικά οι κυματοσυναρτήσεις δίνονται από

$$R_n(\beta) = N_n \beta^{-\mu_n} f^{\frac{1}{2}(\mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n} - 1)} P_n^{(\mu_n - \frac{\tilde{K}}{\mu_n}, \mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n})}(t), \quad t = \frac{2+a\beta}{a\beta}, \quad (3.129)$$

με N_n τους συντελεστές κανονικοποίησης.

3.6.3 Συντελεστής Κανονικοποίησης

Για τον υπολογισμό του N_n , ας εκφράσουμε αρχικά όλη τη κυματοσυνάρτηση R_n μέσω του t :

$$R_n = N_n \left(\frac{a}{2}\right)^{\mu_n} (t-1)^{\frac{1}{2}(\mu_n - \frac{\tilde{K}}{\mu_n} + 1)} (t+1)^{\frac{1}{2}(\mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n} - 1)} P_n^{(\mu_n - \frac{\tilde{K}}{\mu_n}, \mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n})}(t). \quad (3.130)$$

Άρα

$$\int_0^\infty |R_n(\beta)|^2 d\beta = |N_n|^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{2\mu_n-1} \int_1^\infty (t-1)^{\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}-1} \times (t+1)^{\mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n}-1} \left[P_n^{(\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}, \mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n})}(t) \right]^2. \quad (3.131)$$

Για $n = 0$, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα από την Εξ. (3.196.2) της [94]. Αυτό οδηγεί στο

$$N_0 = a^{-\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(-\mu-\frac{\tilde{K}}{\mu}+1\right)}{\Gamma(-2\mu+1)\Gamma\left(\mu-\frac{\tilde{K}}{\mu}\right)} \right)^{1/2}. \quad (3.132)$$

Για $n \neq 0$, παρόμοιο ολοκλήρωμα συμβαίνει από το ανάπτυγμα των πολυωνύμων Jacobi σύμφωνα με την Εξ. (22.3.1) της [84] και ολοκληρώνοντας κάθε όρο. Το αποτέλεσμα για το N_n είναι

$$N_n = a^{-\mu_n+\frac{1}{2}} \times \left[\Gamma\left(\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+n+1\right) \Gamma\left(\mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+n+1\right) \right]^{-1} \\ \times \left(\Gamma(-2\mu+1) \sum_{m,p=0}^n \frac{A_n^{(m,p)}}{B_n^{(m,p)}} \right)^{-1/2}, \quad (3.133)$$

όπου

$$A_n^{(m,p)} = \Gamma\left(\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+2n-m-p\right), \quad (3.134)$$

$$B_n^{(m,p)} = m!(n-m)!p!(n-p)! \Gamma\left(\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+n-m+1\right) \Gamma\left(\mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+m+1\right) \\ \times \Gamma\left(\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+n-p+1\right) \Gamma\left(\mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n}+p+1\right) \Gamma\left(-\mu_n-\frac{\tilde{K}}{\mu_n}-m-p+1\right). \quad (3.135)$$

3.7 Ανασκόπηση

Η εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση αλλάζει τα αποτελέσματα του Davidson και Kratzer μέσω των ποσοτήτων k_i . Για το δυναμικό Davidson οι ποσότητες

$$k_1 = 2 + a^2[5(1-\delta-\lambda) + (1-2\delta)(1-2\lambda) + 6 + \Lambda], \\ k_0 = a[5(1-\delta-\lambda) + 8 + 2\Lambda], \\ k_{-1} = 2 + \Lambda + 2\beta_0^4, \quad (3.136)$$

είναι οι συντελεστές των όρων β^2 , των β^0 , και των β^{-2} αντίστοιχα. Παράγουν φάσμα

$$\epsilon_n \equiv E_{n,L} = \frac{1}{2}[k_0 + \frac{1}{2}a(3 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2) + 2a(2 + \Delta_1 + \Delta_2)n + 4an^2], \quad (3.137)$$

με $\Delta_1 \equiv \sqrt{1 + 4k_{-1}}$, $\Delta_2 \equiv \sqrt{1 + 4\frac{k_1}{a^2}}$. Στην (3.137) ο n είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός. Ο κβαντικός αριθμός Λ , ενσωματώνει τις υπόλοιπες ζώνες και διαχωρίζει τους περιγραφόμενους πυρήνες όπως συζητήθηκε. Για $n = 0$ παίρνουμε τη βασική ζώνη, για $n = 1$ τη πρώτη διεγερμένη ζώνη ως προς β (β_1 band), $n = 2$ τη δεύτερη διεγερμένη ως προς β (β_2 band) κ.ο.κ. Για την ακρίβεια

$$E_{0,L} = \frac{19}{4}a + \frac{5}{2}(1 - \delta - \lambda)a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4k_1} + \frac{a}{2}\sqrt{1 + 4k_{-1}} + \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + 4k_1)(1 + 4k_{-1})} + a\Lambda, \quad (3.138)$$

$$E_{1,L} = E_{0,L} + 4a + \sqrt{a^2 + 4k_1} + a\sqrt{1 + 4k_{-1}}, \quad (3.139)$$

$$E_{2,L} = E_{0,L} + 12a + 2\sqrt{a^2 + 4k_1} + 2a\sqrt{1 + 4k_{-1}}, \quad (3.140)$$

Η βασική ζώνη λαβάνεται από την (3.138), η ζώνη β_1 από την (3.139), ενώ η β_2 από την (3.140). Για $a = 0$ τα αποτελέσματα είναι

$$E_{1,L} = E_{0,L} + 2\sqrt{2}, \quad E_{2,L} = \epsilon_0 + 4\sqrt{2}, \quad (3.141)$$

δηλαδή οι κατώτατες καταστάσεις των ζωνών β (β -bandheads) γίνονται ισαπέχουσες. Η (3.137) διαφέρει από τη (2.66)

$$E_{n,L} = 2n + p + \frac{5}{2} = 2n + 1 + \sqrt{\Lambda + \beta_0^4 + \frac{9}{4}},$$

για το Davidson με σταθερή μάζα. Αφ' ενός η (3.137) περιέχει αρκετά περισσότερους όρους από ότι η (2.66), αφ' ετέρου η παρουσία του κύριου κβαντικού αριθμού n σε μηδενική, πρώτη και δεύτερη τάξη στην (3.137) είναι μια χαρακτηριστική έκφραση φάσματος σε πρόβλημα όπου η μάζα εξαρτάται από τη θέση όπως μπορεί να ιδωθεί σε αντίστοιχες εκφράσεις στις [64, 2, 3]. Επίσης οι ποσότητες k_i καθορίζουν και τις κυματοσυναρτήσεις Davidson στη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση

$$R_n^\Lambda(\beta) = N_n \beta^{(1+\Delta_1)/2} f^{-1-(\Delta_1+\Delta_2)/4} P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t), \quad t = \frac{-1 + a\beta^2}{1 + a\beta^2}, \quad (3.142)$$

με τα $P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t)$ να είναι πολυώνυμα Jacobi, σε διαφοροποίηση από τις κυματοσυναρτήσεις του Davidson σταθερής μάζας που είναι πολυώνυμα Laguerre.

Για το δυναμικό Kratzer οι ποσότητες

$$\begin{aligned} k_0 &= a^2[2(3 - \delta - \lambda) + \frac{1}{4}(1 - 2\delta)(1 - 2\lambda) + \Lambda], \\ k_{-1} &= -2 + 2a[(4 - \delta - \lambda) + \Lambda], \\ k_{-2} &= 2 + \Lambda + 2\tilde{B}, \end{aligned} \quad (3.143)$$

είναι οι συντελεστές των όρων β^0 , β^{-1} και β^{-2} αντίστοιχα. Παράγουν φάσμα

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \left[k_0 - \left(\frac{k_{-1} + a \left[n^2 + \frac{1}{2}(1 + \Delta)(2n + 1) \right]}{2n + 1 + \Delta} \right)^2 \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.144)$$

με $\Delta \equiv \sqrt{1 + 4k_{-2}}$. Για $n = 0$ παίρνουμε τη βασική ζώνη, για $n = 1$ τη πρώτη διεγερμένη ζώνη ως προς β (β_1 band), $n = 2$ τη δεύτερη διεγερμένη ως προς β (β_2 band) κ.ο.κ. Ξανά, οι διάφορες περιπτώσεις του Λ καθορίζουν πλήρως όλους τους τύπους κίνησης. Επίσης διαπιστώνεται η παρουσία του κύριου κβαντικού αριθμού n σε μηδενική, πρώτη και δεύτερη τάξη, σε σύγκριση με το φάσμα του Kratzer σταθερής μάζας της (2.71)

$$\varepsilon = -\epsilon, \quad x = 2\beta\sqrt{\epsilon}, \quad p = \sqrt{\Lambda + \frac{9}{4} + \tilde{B}}, \quad \sqrt{\epsilon} = \frac{A/2}{p + n + \frac{1}{2}}.$$

Ειδικότερα, όπως και στη περίπτωση της μελέτης του δυναμικού Coulomb με μάζα εξαρτημένη από τη θέση [2], η εξίσωση (3.121) ορίζει πεπερασμένο αριθμό δέσμιων καταστάσεων σε αντίθεση με το Kratzer σταθερής μάζας όπου οι δέσμιες καταστάσεις είναι άπειρες. Οι ακτινικές κυματοσυναρτήσεις Kratzer στη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση είναι

$$R_n^\Lambda(\beta) = N_n \beta^{-\mu_n} f^{\frac{1}{2}}\left(\mu_n + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu_n} - 1\right) P_n^{\left(\mu_n - \frac{\tilde{\kappa}}{\mu_n}, \mu_n + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu_n}\right)}(t), \quad t = \frac{2 + a\beta}{a\beta}, \quad (3.145)$$

με τα $P_n^{\left(\mu_n - \frac{\tilde{\kappa}}{\mu_n}, \mu_n + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu_n}\right)}(t)$ σε διαφοροποίηση από τις κυματοσυναρτήσεις του Kratzer σταθερής μάζας που είναι πολυώνυμα Laguerre. Στο Παράρτημα Β' παρουσιάζεται η συμπεριφορά των κυματοσυναρτήσεων στο όριο $a = 0$.

Κεφάλαιο 4

Η φαινομενολογία

Στο πρότυπο Bohr κάθε πυρήνας χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη τιμή στο σύνολο των παραμέτρων της Χαμιλτονιανής Bohr. Διαχρονικά έχει επικρατήσει η χρήση της ως ένα σημείο αναφοράς (benchmark) για την ανάλυση πειραματικών δεδομένων που σηματοδοτούν πυρηνικές συλλογικές κινήσεις. Σε αυτό το πνεύμα, η επιλογή της παραμετροποίησής της εξαρτάται από τα κοινά πειραματικά χαρακτηριστικά των προς ανάλυση αλυσίδων ισοτόπων. Αυτά δεν είναι άλλα από κανονικότητες στο φάσμα τους, οι οποίες φιλοξενούνται στο πρότυπο Bohr ως εκδηλώσεις δονητικής και περιστροφικής συμπεριφοράς.

Απλά μέτρα για τις κανονικότητες αυτές είναι [105]:

1. Ο ενεργειακός λόγος της δεύτερης διεγερμένης στάθμης ως προς τη πρώτη

$$R_{4/2} = \frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)}. \quad (4.1)$$

Συνήθως η περιοχή $2 \leq R_{4/2} \leq 2.4$ καλείται δονητική ή περίπου δονητική, η $3 \leq R_{4/2} \leq 3.333$ περιστροφική ή περίπου περιστροφική, ενώ η $2.4 \leq R_{4/2} \leq 3$ είναι η μεταβατική περιοχή.

2. Ο ρυθμός μετάβασης $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ οποίος κατά τη μετάβαση από τη δονητική στη περιστροφική περιοχή παρουσιάζει αύξηση.

Η ταξινόμηση των κανονικοτήτων αυτών γίνεται πιο συστηματικά με την εισαγωγή της έννοιας της δυναμικής συμμετρίας, όπως συνέβη με τη συστηματική χρήση του προτύπου των αλληλεπιδρώντων μποζονίων (IBM) [5, 105] στην ανάλυση των πυρηνικών φασμάτων. Στη Χαμιλτονιανή του Bohr η κύρια δυναμική συμμετρία εκφράζεται από την αλυσίδα ομάδων $U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$ [102]. Μια άλλη, πρόσφατα διατυπωμένη, είναι η $SU(1, 1) \times SO(5) \supset U(1) \times SO(3) \supset SO(2)$ [44]. Οι δύο αυτές δυναμικές συμμετρίες διαφέρουν ως προς τη παραμετροποίηση της Χαμιλτονιανής Bohr. Η δεύτερη εισάγει ένα παράγοντα κλίμακας για τις δονήσεις ως προς β και έχει τη παράμετρο μάζας ελεύθερη. Εισάγει το φαινόμενο της φυγόκεντρης συμπίεσης (centrifugal stretching) [44, 103, 104] σύμφωνα με το οποίο ο κανόνας $L(L+1)$ δεν ακολουθείται πιστά στα μέλη της βασικής ζώνης τα οποία σε υψηλές στροφορές πυκνώνουν με παράλληλη αύξηση των ενδοζωνικών ρυθμών μετάβασης. Η φυγόκεντρη συμπίεση είναι αποτέλεσμα των αναπαραστάσεων της $SO(5)$, όπως όμως αυτές προκύπτουν από την $SU(1, 1) \times SO(5)$ [44]. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιοκαταστάσεις του Davidson δομούν τις αναπαραστάσεις της $SU(1, 1)$ [44], ωστόσο αυτό δε θα πρέπει να επεκταθεί μηχανιστικά στις αντίστοιχες του Davidson με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση.

Γενικά η ταυτοποίηση δυναμικών συμμετριών υψηλότερων της $U(5)$ ή της $SU(1, 1) \times SO(5)$ με τις περιπτώσεις ακριβούς επιλυσιμότητας της Χαμιλτονιανής του Bohr είναι προβληματική. Το Interacting Boson Model [5] προσφέρει νέες δυναμικές συμμετρίες για την ανάλυση των πυρηνικών φασμάτων όπως η $O(6)$ και η $SU(3)$. Η προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων ασταθών ως προς γ και αξονικά συμμετρικών πυρήνων στις αναπαραστάσεις των δυναμικών συμμετριών $O(6)$ και $SU(3)$ αντίστοιχα είναι εξαιρετικά επιτυχής [88]. Ωστόσο, ταυτοποίηση της $O(6)$ και της $SU(3)$ με τις περιπτώσεις ακριβούς επιλυσιμότητας της Χαμιλτονιανής του Bohr δεν υπάρχει μολονότι το γεωμετρικό όριο του IBM [26] παράγει ενεργειακές επιφάνειες που χαρακτηρίζουν ασταθή ως προς γ και αξονικά συμμετρικά πυρηνικά σχήματα. Αυτό ήταν και άλλο ένα επιχείρημα για τη τροποποίηση της Χαμιλτονιανής του Bohr, ο περιορισμός της στη δυναμική συμμετρία $U(5)$ ή η απουσία της $O(6)$ και της $SU(3)$ από το πρότυπο Bohr. Εν γένει η σχέση του γεωμετρικού ορίου του IBM [26] με τη Χαμιλτονιανή του Bohr είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα στο οποίο η παρούσα διδακτορική διατριβή επικεντρώνεται. Όπως θα φανεί στο τελευταίο κεφάλαιο η επιλογή της παραμετροποίησης της Χαμιλτονιανής Bohr με τη παράμετρο a στο κινητικό όρο δημιουργεί ένα νέο κοινό γεωμετρικό πλαίσιο για το πρότυπο Bohr και το γεωμετρικό όριο του IBM. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξεταστεί λεπτομερώς η φαινομενολογική επάρκεια της Χαμιλτονιανής Bohr με τη παράμετρο a στο κινητικό όρο.

4.1 Προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα

Στην ακριβώς επιλύσιμη μορφή της Χαμιλτονιανής Bohr [51, 45], η παραμετροποίηση εξαρτάται από το δυναμικό και το τύπο κίνησης. Για το δυναμικό Davidson με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση το σύνολο των παραμέτρων είναι το (a, β_0) για τους ασταθείς ως προς γ πυρήνες, και το (a, β_0, c) για τους αξονικά παραμορφωμένους επιμήκεις πυρήνες. Για το δυναμικό Kratzer με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση τα αντίστοιχα σύνολα είναι τα (a, \tilde{B}) και (a, \tilde{B}, c) .

Προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι ελεύθερες παράμετροι, η προσαρμογή των παραμέτρων στα πειραματικά δεδομένα γίνεται από την αντίστοιχη των θεωρητικών στους πειραματικούς ενεργειακούς λόγους. Κατασκευάζονται ως

$$E_i(exp, th) = \frac{E_{i(exp, th)} - E_{0_1^+}(exp, th)}{E_{2_1^+}(exp, th) - E_{0_1^+}(exp, th)}, \quad (4.2)$$

όπου $E_i(exp, th)$ οι πειραματικές ή θεωρητικές τιμές που θα χρησιμοποιηθούν στη προσαρμογή, ενώ $E_{i(exp, th)}$ οι ακριβείς πειραματικές (τις λαμβάνουμε από τη [97]) και θεωρητικές (τις λαμβάνουμε από τη (3.137) ή τη (3.144)) τιμές αντίστοιχα.

Ούτως ή άλλως, η δομή του φάσματος εξαρτάται κυρίως από τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ των ενεργειακών καταστάσεων, και τούτες οι προβλέψεις (εκτίμηση δομής του φάσματος, ρυθμών μετάβασης) αποτελούν τους αντικειμενικούς στόχους της συλλογικής φαινομενολογικής προσέγγισης. Οι παραπάνω λόγοι θέτουν τη βασική κατάσταση $E_{0_1^+}(exp, th) = 0$, και τη πρώτη διεγερμένη να είναι $E_1(exp, th) = 1$. Οι λόγοι (4.2) θα χρησιμοποιηθούν και για τις

θεωρητικές και για τις πειραματικές τιμές στο (rms) μέτρο ποιότητας της προσαρμογής

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (E_i(exp) - E_i(th))^2}{(n-1)E(2_1^+)^2}}. \quad (4.3)$$

Οι τιμές που λαμβάνουν τα σύνολα των παραμέτρων (a, β_0) και (a, β_0, c) είναι εκείνες που ελαχιστοποιούν τη παραπάνω ποσότητα. Η προσαρμογή εκτελέστηκε για μια πληθώρα ασταθών ως προς γ και αξονικά συμμετρικών πυρήνων. Η συμφωνία είναι εξαιρετική για τους λόγους $R_{4/2}$ και τις σχετικές ποσότητες.

4.2 Δυναμικό Davidson

4.2.1 Ασταθείς ως προς γ πυρήνες

Οι θεωρητικές προβλέψεις για τα μέλη της βασικής ζώνης αποκομίζονται από την (3.138), εκείνες των μελών της ημί- β_1 από την (3.139). Τα μέλη της ημί- γ_1 ζώνης λαμβάνονται μέσω των εκφυλισμών τους με τα μέλη της βασικής όπως αναφέρεται στο εδάφιο (2.2.1). Τα αποτελέσματα της προσαρμογής των θεωρητικών στους πειραματικούς ενεργειακούς λόγους παρουσιάζονται στο πίνακα 4.1, για $\delta = \lambda = 0$. Διαφορετικές επιλογές για τα δ και λ οδηγούν σε μια επανακανονικοποίηση των τιμών των παραμέτρων a , β_0 , και c , διατηρώντας αναλλοίωτες τις ενέργειες των καταστάσεων. Η συμφωνία είναι εξαιρετική, όπως δηλώνεται από το μέτρο ποιότητας της προσαρμογής το οποίο σε όλες τις περιπτώσεις είναι μικρότερο της μονάδας.

Η εξέταση της συμπεριφοράς της παραμέτρου a , μπορεί να ιδωθεί στο πίνακα 4.1 και είναι ενδιαφέρουσα για τα ισότοπα των Xe, που [88] ανήκουν στη περιοχή των ασταθών ως προς γ πυρήνων. Εκτείνονται από τα όρια του φλοιού νετρονίων (το $^{134}\text{Xe}_{80}$ ακριβώς κάτω από $N=82$) μέχρι τα μέσα του φλοιού ($^{120}\text{Xe}_{66}$) και ακόμη πιο πέρα, εκδηλώνοντας αυξανουσα συλλογικότητα (αυξανόμενοι λόγοι $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$) από τα σύνορα μέχρι τα μέσα του φλοιού. Κατά τη κίνηση από τα σύνορα του φλοιού μέχρι τα μέσα του, σημειώνονται τα εξής:

i) Τα ^{134}Xe και ^{132}Xe δίνουν περίπου καθαρά δονητική συμπεριφορά. Άρα δεν υπάρχει καμία ανάγκη για εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση, η προσαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί σε $a = 0$. Επιπροσθέτως, ο όρος β_0 χρειάζεται στο δυναμικό, η προσαρμογή δίνει $\beta_0 = 0$, που δηλώνει καθαρά δονητική συμπεριφορά.

ii) Στα επόμενα δύο ισότοπα (το ^{130}Xe και το ^{128}Xe) η ανάγκη για την αναχώρηση από τη καθαρά δονητική συμπεριφορά γίνεται ξεκάθαρη, η προσαρμογή οδηγεί σε μη μηδενικές τιμές για τη παράμετρο β_0 . Ωστόσο, και πάλι δεν υπάρχει ανάγκη για εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση, η προσαρμογή εξακολουθεί να οδηγεί σε $a = 0$.

iii) Πέρα από το ^{126}Xe και ο όρος β_0 στο δυναμικό και η εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση γίνονται αναγκαίες και οδηγούν σε μη μηδενικές τιμές για τα β_0 και a .

Οι υπόλοιπες αλυσίδες ισοτόπων δηλώνουν παρόμοια συμπεριφορά. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά της παραμέτρου a στα ισότοπα του Xe αλλά και του Ba θυμίζουν μια κρίσιμη συμπεριφορά. Υπάρχει τρέχουσα συζήτηση για το αν κάποια ισότοπα του Xe ακολουθούν τη συμμετρία κρίσιμου σημείου E(5) [32]. Τα παραπάνω

σχόλια δείχνουν ότι το a παίρνει απότομα τη τιμή μηδέν ταυτόχρονα για τα ισότοπα $^{128-134}\text{Xe}$ όπως επίσης και τα $^{134-136}\text{Ba}$ όπως φαίνεται στο πίνακα 4.1, με τα μέχρι στιγμής πειραματικά δεδομένα να δίνουν μονάχα το ^{134}Ba ως παράδειγμα της $E(5)$ [98] και όχι κάποιο από τα ισότοπα του Xe . Ωστόσο, στο τελευταίο κεφάλαιο δείχνεται ότι για $a = 0$ υλοποιείται η συμμετρία $E(5)$, γεγονός που ίσως οδηγεί σε διαφορετικές εκδηλώσεις της $E(5)$ στους ατομικούς πυρήνες από ότι αρχικά προβλέφθηκε [32].

Στα σχήματα (4.1) και (4.2) παρουσιάζονται γραφικά τα φάσματα και οι ρυθμοί μετάβασης (θα αναλυθούν παρακάτω) για το ^{110}Cd και το ^{118}Xe αντίστοιχα. Το κύριο χαρακτηριστικό είναι η καλή συμφωνία των ενεργειακών επιπέδων για υψηλές στροφορμές, η οποία δεν ήταν συνήθης στην αρχική Χαμιλτονιανή του Bohr. Για τις ζώνες β , όπως ιδίως φαίνεται στο ^{110}Cd του σχήματος (4.1), δε μπορεί να ειπωθεί αυτό όσο κι αν δείχνουν μια καλή συμπεριφορά. Από τη μία το θέμα αυτό έχει να κάνει με την επιλογή του δυναμικού. Το Davidson πάει στο άπειρο για μεγάλα β σπρώχνοντας τις ζώνες β και τα ενδοζωνικά τους χάσματα ψηλότερα σε ενέργεια. Από την άλλη στη δυναμική συμμετρία $SU(1,1) \times SO(5)$ το φαινόμενο της φυγόκεντρης συμπίεσης εισάγεται ώστε οι ζώνες β να πέσουν πιο χαμηλά σε ενέργεια [44]. Απουσία αυτού του φαινομένου σημαίνει ότι για παράδειγμα το bandhead της ζώνης β_1 θα πρέπει να προσαρμόζεται σε υψηλότερη κατάσταση 0^+ από την 0_2^+ . Όπως φαίνεται στα σχήματα (4.1) και (4.2) το φαινόμενο αυτό απουσιάζει, τα θεωρητικά ενεργειακά επίπεδα για υψηλές στροφορμές ακολουθούν τα πειραματικά σε καλή συμφωνία. Εν γένει ο χαρακτηρισμός των ζωνών β είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα και όπως κυρίως έδειξε η μελέτη του Garrett [106]. Σε μερικούς πυρήνες η 0_2^+ είναι μια καλή επιλογή για το β -bandhead. Για άλλους υπάρχει η πιθανότητα το ρόλο αυτό να παίζει η 0_3^+ ή η 0_4^+ ή και υψηλότερης ενέργειας καταστάσεις 0^+ , ωστόσο γενική μέθοδος χαρακτηρισμού των ζωνών β δεν υπάρχει και παραδοσιακά η κατάσταση 0_2^+ λαμβάνεται ως το bandhead της ζώνης β .

4.2.2 Αξονικά συμμετρικοί επιμήκεις πυρήνες

Οι ενέργειες των καταστάσεων της βασικής ζώνης καθώς και της ζώνης β_1 (και οι δύο έχουν $n_\gamma = 0$ και $K = 0$) λαμβάνονται από τις εξισώσεις (3.138) και (3.139) αντίστοιχα, ενώ εκείνες των καταστάσεων της ζώνης γ_1 αποκομίζονται από την εξίσωση (3.138) με $n_\gamma = 1$ και $K = 2$. Επιλέχθηκε ξανά $\delta = \lambda = 0$, και διαφορετικές επιλογές για τα δ και λ οδηγούν σε μια επανακανονικοποίηση των τιμών των παραμέτρων a , β_0 , και c , διατηρώντας αναλλοίωτες τις ενέργειες των καταστάσεων. Οι προσαρμογές των παραμέτρων για τα φάσματα των παραμορφωμένων σπανίων γαιών και ακτινίδων δείχνονται στο Πίνακα 4.2. Η γενική συμφωνία είναι αρκετά ικανοποιητική, συγκρίσιμη με εκείνη του Πίνακα 4.1. Οι πυρήνες στους οποίους το μέτρο ποιότητας αποκλίνει έχουν προταθεί ως υποψήφιοι για τη συμμετρία $X(5)$, στους οποίους το Davidson δείχνει να μην ανταποκρίνεται. Αντίθετα το Kratzer προσεγγίζει πολύ καλύτερα την συμμετρία $X(5)$, όπως θα φανεί παρακάτω στο εδάφιο 4.3.

Η ποιότητα της προσαρμογής φαίνεται επίσης στο Πίνακα 4.3, όπου οι υπολογιζόμενες ενέργειες για τις καταστάσεις των ^{162}Dy , ^{238}U συγκρίνονται με το πείραμα. Το αριθμητικά αποτελέσματα του Πίνακα 4.3 όπως επίσης και οι ρυθμοί μετάβασης των πυρήνων αυτών παρουσιάζονται στα σχήματα 4.5 και 4.6.

Αξίζει να αναφερθούν τα παρακάτω.

1) Υπάρχει μια πολύ καλή αναπαραγωγή των ενεργειακών ζωνών στο σύνολό τους, όπως

πιστοποιείται από τις καταστάσεις με χαμηλότερη ενέργεια σε κάθε ζώνη (bandhead) καθώς και τα ενεργειακά χάσματα μέσα σε κάθε ζώνη. Το τελευταίο ισχύει ειδικότερα για τη βασική και τη ζώνη γ_1 . Η απόκλιση στη βασική ζώνη του ^{162}Dy φτάνει το 0.6% στη κατάσταση με $L = 18$, ενώ για εκείνη του ^{238}U φτάνει το 1.7% στην $L = 30$. Τα πειραματικά δεδομένα για τη ζώνη γ_1 του ^{162}Dy (μέχρι την $L = 14$) εκτείνονται μέχρι 28.4 μονάδες ενέργειας, ενώ οι αντίστοιχοι θεωρητικοί μας υπολογισμοί φτάνουν τις 28.7 μονάδες, με τη διαφορά να κυμαίνεται στη τάξη του 1%. Ομοίως στο ^{238}U το πειραματικό ενεργειακό εύρος της ζώνης γ_1 (μέχρι την $L = 17$) είναι 89.1 μονάδες ενέργειας, ενώ το αντίστοιχο πειραματικό είναι μέχρι 87.3, με τη διαφορά να είναι στη τάξη του 2%.

2) Ωστόσο σημειώνεται, όπως για παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 4.5 για το ^{162}Dy , πως και πάλι οι θεωρητικές προβλέψεις για τα ενεργειακά χάσματα μέσα στις ζώνες β_1 διαφέρουν από τις πειραματικές υπερεκτιμώντας τα. Όπως και πριν, υπεύθυνη είναι η συνάρτηση του δυναμικού Davidson, που φτάνει στο άπειρο για μεγάλα β , σπρώχνοντας τις ζώνες β πιο ψηλά αυξάνοντας επίσης τα ενεργειακά χάσματα μεταξύ των καταστάσεών τους. Ωστόσο αυτό δε φαίνεται να συμβαίνει στο ^{238}U όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6, αλλά αυτό είναι μια εξαίρεση. Παρακάτω θα δείξουμε πως αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη χρήση του δυναμικού Kratzer. Σημειώνεται επίσης πως για το πρόβλημα αυτό έχει χρησιμοποιηθεί το δυναμικό Morse [90] που όπως και το Kratzer αποκτά ασυμπτωτικά μια πεπερασμένη τιμή για μεγάλα β [89].

4.3 Δυναμικό Kratzer

4.3.1 Ασταθείς ως προς γ πυρήνες

Οι θεωρητικές προβλέψεις για τα μέλη της βασικής ζώνης, εκείνες των μελών των ημί- β_1 , ημί- β_2 κ.ο.κ. λαμβάνονται από την εξίσωση (3.144) και τα μέλη της ημί- γ_1 ζώνης λαμβάνονται μέσω των εκφυλισμών τους με τα μέλη της βασικής όπως αναφέρεται στο εδάφιο 2.2.1. Τα αποτελέσματα της προσαρμογής των θεωρητικών στους πειραματικούς ενεργειακούς λόγους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.4 και έχουν αποκομιστεί για $\delta = \lambda = 0$. Ξανά, διαφορετικές επιλογές για τα δ και λ οδηγούν σε μια επανακανονικοποίηση των τιμών των παραμέτρων a και \tilde{B} , με τα προβλεπόμενα ενεργειακά επίπεδα να παραμένουν ακριβώς τα ίδια. Το μέτρο ποιότητας και εδώ είναι πάντα μικρότερο της μονάδας. Η παράμετρος a παρουσιάζει ξανά αξιοσημείωτη συμπεριφορά στα ισότοπα του Xe όπως και στο εδάφιο 4.2.1. Προχωρώντας από το όριο του μαγικού μέχρι και τα μέσα του φλοιού σημειώνονται τα εξής:

i) Η παράμετρος του δυναμικού Kratzer \tilde{B} αυξάνεται ομαλά καθώς κινούμαστε από το σύνορο μέχρι τα μέσα του φλοιού.

ii) Η παράμετρος a , η οποία εκφράζει την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση, είναι μηδέν, ή κοντά στο μηδέν, για τα πρώτα 4 ισότοπα κοντά στο σύνορο, ενώ αποκτά μη-μηδενικές τιμές για τα τελευταία 5 ισότοπα κοντά στα μέσα του φλοιού. Αυτό υποδεικνύει ότι κοντά στους σφαιρικούς πυρήνες δεν υπάρχει εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση, ενώ γίνεται αναγκαία όταν απομακρυνόμαστε από το σφαιρικό σχήμα.

Στα σχήματα 4.3 και 4.4 παρουσιάζονται τα φάσματα και οι ρυθμοί μετάβασης για το ^{110}Cd και το ^{118}Xe . Συγκρίνοντας το σχήμα 4.3 που προκύπτει από το Kratzer με το αντίστοιχο 4.1

που προκύπτει από το Davidson, παρατηρείται η σχετική διόρθωση των χασμάτων της ζώνης β . Παράλληλα παρατηρείται συμπίεση των υψηλότερων ενεργειακών επιπέδων της βασικής ζώνης όπως επίσης και σημαντική αύξηση των ενδοζωνικών ρυθμών μετάβασης στο θεωρητικό μέρος του σχήματος 4.3 σε σχέση με το αντίστοιχο του σχήματος 4.1. Για παράδειγμα στο σχήμα 4.3 ο ρυθμός μετάβασης $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ είναι 11.54 φορές μεγαλύτερος από τον $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ ενώ στο σχήμα 4.1 αντίστοιχος λόγος είναι μόλις 4.87 μονάδες. Η συμπίεση των υψηλότερων ενεργειακά καταστάσεων είναι ορατή και στη περίπτωση του ^{118}Xe στο σχήμα 4.4. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχετική μετατόπιση των ζωνών β με τη παράλληλη συμπίεση των υψηλότερων ενεργειακά καταστάσεων της βασικής ζώνης και αύξηση των ενδοζωνικών ρυθμών μετάβασής της, υπάρχει και στη δυναμική συμμετρία $SU(1,1) \times SO(5)$ [44] όπου αναφέρεται ως φυγόκεντρη συμπίεση [44, 103, 104] και αναφέρθηκε στις αρχές αυτού του κεφαλαίου.

Τα ενεργά δυναμικά των Εξ. (3.49) για ορισμένα ισότοπα του Xe, κατάλληλα διαμορφωμένων όπως περιγράφεται στο Παράρτημα Β', φαίνονται στο σχήμα 4.9. Είναι φανερό ότι τα δυναμικά βαθαινούν καθώς κινούμαστε από το σύνορο του φλοιού των νετρονίων ($^{134}\text{Xe}_{80}$) στα μέσα του φλοιού ($^{120}\text{Xe}_{66}$).

Άλλες αλυσίδες ισotόπων επίσης δείχνουν παρόμοια συμπεριφορά. Για παράδειγμα, τα ενεργά δυναμικά των Εξ. (3.49) για κάποια ισότοπα του Ba, κατάλληλα διαμορφωμένων όπως περιγράφεται στο Παράρτημα Β', δείχνονται στο σχήμα 4.10. Είναι ξανά φανερό ότι τα δυναμικά βαθαινούν καθώς κινούμαστε από τα σύνορα του φλοιού των νετρονίων ($^{136}\text{Ba}_{80}$) προς τα μέσα του φλοιού ($^{122}\text{Ba}_{66}$).

Η εξάρτηση των ενεργών δυναμικών της Εξ. (3.49) από τη παράμετρο a και τη στροφορμή L φαίνονται στο σχήμα 4.10, μετά από τη κατάλληλη διαμόρφωση όπως αναλύεται στο Παράρτημα Β'. Το ενεργό δυναμικό για τη κατάσταση με $L = 4$ της βασικής ζώνης για το ^{130}Xe χρησιμοποιείται ως βάση για τη σύγκριση. Φαίνεται ότι το ενεργό δυναμικό γίνεται λιγότερο βαθύ καθώς η παράμετρος a αυξάνεται. Επίσης γίνεται λιγότερο βαθύ καθώς η τροχιακή στροφορμή αυξάνεται.

4.3.2 Αξονικά συμμετρικοί επιμήκεις πυρήνες

Τα αποτελέσματα της προσαρμογής των θεωρητικών ενεργειακών λόγων με το δυναμικό Kratzer στους αντίστοιχους πειραματικούς για τις παραμορφωμένες ακτινίδες και τις σπάνιες γαίες παρουσιάζονται στο πίνακα 4.5. Ξανά, οι θεωρητικές προβλέψεις για τα θεωρητικά ενεργειακά επίπεδα λαμβάνονται από την εξίσωση (3.144). Η βασική ζώνη λαμβάνεται για $n = 0$ και η ζώνη β_1 για $n = 1$, ενώ και οι δύο έχουν $n_\gamma = 0$ και $K = 0$. Η ζώνη γ_1 λαμβάνεται για $n = 0$, $n_\gamma = 1$ και $K = 2$. Ξανά, έγινε η επιλογή $\delta = \lambda = 0$, και φαίνεται ότι διαφορετικές επιλογές για τα δ και λ οδηγούν στην επανακανονικοποίηση των τιμών των παραμέτρων a , B , και c , τα προβλεπόμενα ενεργειακά επίπεδα παραμένουν ακριβώς τα ίδια. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.5 η προσαρμογή είναι πολύ καλή με το μέτρο ποιότητας είναι σχεδόν παντού κάτω από τη μονάδα, και πολύ καλή συμφωνία των λόγων $R_{4/2}$ και των σχετικών ποσοτήτων.

Η ποιότητα των προσαρμογών μπορεί επίσης να ειπωθεί στον Πίνακα 4.6, όπου τα υπολογιζόμενα ενεργειακά επίπεδα του ^{170}Er και ^{232}Th συγκρίνονται με το πείραμα και εικονίζονται στα σχήματα 4.7 και 4.8 αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι στο ^{170}Er , στο σχήμα 4.7, υπάρχει και πάλι πολύ καλή συμφωνία για υψηλές ενεργειακά καταστάσεις της βασικής ζώνης, ωστόσο η

ζώνη β είναι και πάλι υπερεκτιμημένη, πράγμα το οποίο δεν ισχύει γενικά για τα αποτελέσματα του Kratzer όπως για παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 4.8. Εκεί, το ^{232}Th παρουσιάζει το χαρακτηριστικό που ισχύει και στους πυρήνες του Πίνακα 4.7, δηλαδή πολύ καλή συμφωνία των ζωνών β με παράλληλη συμπίεση των υψηλότερων ενεργειακά καταστάσεων της βασικής ζώνης.

Η κύρια διαφορά μεταξύ της θεωρίας και του πειράματος στη περίπτωση του δυναμικού Davidson [40] ευρέθει στις ζώνες β_1 , στις οποίες τα θεωρητικά ενεργειακά χάσματα ήταν μεγαλύτερα από τα πειραματικά, ωστόσο με εξαιρέσεις όπως π.χ του ^{238}U στο σχήμα 4.6. Το χαρακτηριστικό αυτό αποδόθηκε στο σχήμα του δυναμικού Davidson που φτάνει στο άπειρο για μεγάλα β , "σπρώχνοντας" έτσι τις ζώνες β ψηλότερα αυξάνοντας παράλληλα τα ενδοζωνικά ενεργειακά χάσματα. Όπως αναφέρθηκε, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αποφευχθεί χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό που να πηγαίνει σε κάποια πεπερασμένη τιμή για μεγάλα β [89], όπως το δυναμικό του Morse [90, 91, 92]. Το δυναμικό του Kratzer πηγαίνει στο μηδέν για μεγάλα β , αποφεύγοντας έτσι το πρόβλημα της υπερεκτίμησης των ενεργειακών χασμάτων μέσα στη ζώνη β_1 , όπως φαίνεται στο πίνακα 4.7 και το σχήμα 4.8. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα του Kratzer στους αξονικά συμμετρικούς πυρήνες διορθώνουν τη συμπεριφορά των ζωνών β δίχως το κόστος της φυγόκεντρης συμπίεσης στα μέλη της βασικής ζώνης όπως φαίνεται από τη καλή συμπεριφορά των καταστάσεων με υψηλή στροφορμή για τη βασική ζώνη στα σχήματα 4.7 και 4.8.

Στο Σχήμα 4.11, δείχνονται τα ενεργά δυναμικά της Εξ. (3.49) για κάποια ισότοπα του Gd και του Dy, κατάλληλα προσαρμοσμένα όπως περιγράφεται στο Παράρτημα Β'. Είναι φανερό ότι τα δυναμικά βαθαίνουν καθώς κινείται από τα σύνορα του φλοιού νετρονίων προς τα μέσα του φλοιού.

Άλλη μια διαφορά μεταξύ του δυναμικού Davidson και του δυναμικού Kratzer είναι ότι το πρώτο δε μπορεί να περιγράψει τα ισότοπα με $N = 90$ όπως τα ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd , και ^{156}Dy , τα οποία θεωρούνται ως τα καλύτερα παραδείγματα [82] για τη συμμετρία κρίσιμου σημείου $X(5)$ [33], ενώ στο δεύτερο λαμβάνεται καλή συμφωνία. Πράγματι, στο πίνακα 4.2 παρατηρείται ότι μεγάλες αποκλίσεις του μέτρου ποιότητας σ λαμβάνονται στη περίπτωση του Davidson, ενώ τα φάσματα που λαμβάνονται στη περίπτωση του Kratzer αναφέρονται στο πίνακα 4.7, μαζί με τις προβλέψεις για την $X(5)$ [33, 86, 93]. Στις ζώνες β_1 , συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι στη παρούσα προσέγγιση, χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό παραμέτρων (τρεις για τους αξονικά συμμετρικούς) όπως στο δυναμικό του Davidson, αποφεύγεται η υπερεκτίμηση των ενδοζωνικών ενεργειακών χασμάτων.

Η ικανότητα του δυναμικού Kratzer να περιγράψει τα ισότοπα με $N = 90$, στα οποία το δυναμικό του Davidson αποτυγχάνει, μπορεί να κατανοηθεί βάσει του σχήματος των δύο δυναμικών. Το δυναμικό του Kratzer για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, προσεγγίζει το βαθύ πηγάδι, θυμίζοντας έτσι το άπειρο πηγάδι δυναμικού που χρησιμοποιείται στο μοντέλο $X(5)$ [33], που είναι γνωστό ότι περιγράφει τα $N = 90$ ισότοπα.

Στο Σχήμα 4.12 (διαμορφωμένο σύμφωνα με το Παράρτημα Β') παρουσιάζονται τα ενεργά δυναμικά για τους πυρήνες με $N = 90$ που είναι και καλά παραδείγματα για τη συμμετρία κρίσιμου σημείου $X(5)$, ενισχύοντας τα σχόλια που έγιναν παραπάνω.

Στο Σχήμα 4.13 δείχνεται η εξάρτηση των ενεργών δυναμικών της εξίσωσης (3.49) (διαμορφωμένα σύμφωνα με το Παράρτημα Β') με τη παράμετρο a και με τη τροχιακή στροφορμή

L για τα ισότοπα του Gd και του Dy. Ως βάση για τη σύγκριση χρησιμοποιείται το ενεργό δυναμικό της κατάστασης με $L = 4$ της βασικής ζώνης του ^{154}Gd . Φαίνεται ξανά ότι το ενεργό δυναμικό γίνεται λιγότερο βαθύ καθώς η παράμετρος a αυξάνεται. Επίσης γίνεται λιγότερο βαθύ καθώς αυξάνεται η τροχιακή στροφορμή L .

4.4 Ρυθμοί Μετάβασης B(E2)

Έχοντας από τη προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα τις τιμές των συνόλων (a, β_0) και (a, β_0, c) , οι ρυθμοί μετάβασης $B(E2)$ μέσα στη βασική ζώνη, όπως επίσης και οι διαζωνικοί για τους οποίους υπάρχουν διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα για διάφορους πυρήνες, υπολογίζονται άμεσα. Αποτελέσματα της σύγκρισης για τα φάσματα και τους ρυθμούς μετάβασης $B(E2)$ με τα πειραματικά δεδομένα θα δοθούν, όπου αυτά είναι διαθέσιμα.

Κατ' αρχήν, ο ρυθμός μετάβασης $B(E2)$ δίνεται από τη σχέση [8]

$$B(E2; \varrho L \rightarrow \varrho' L') = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle \varrho' L' || T^{(E2)} || \varrho L \rangle|^2}{2L+1}, \quad (4.4)$$

όπου ϱ οι κβαντικοί αριθμοί εκτός της στροφορμής L . Ο τετραπολικός τελεστής $T^{(E2)}$ είναι [51]

$$T^{(E2)} = t\beta \left[\mathcal{D}_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + \mathcal{D}_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin \gamma \right], \quad (4.5)$$

με t να είναι ένας παράγοντας κλίμακας και το θεώρημα Wigner-Eckart στη μορφή

$$\langle \varrho' L' M' | T_{\mu}^{(E2)} | \varrho L M \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L'+1}} \langle L2L' | M\mu M' \rangle \langle \varrho' L' || T^{(E2)} || \varrho L \rangle. \quad (4.6)$$

Οι σχέσεις αυτές καταλήγουν στην [45]

$$B(E2; nLn_{\gamma}K \rightarrow n'L'n'_{\gamma}K') = \frac{5}{16\pi} t^2 (\langle L2L' | K, K' - K, K' \rangle)^2 B_{n,L,n',L'}^2 C_{n_{\gamma},K,n'_{\gamma},K'}^2, \quad (4.7)$$

με

$$B_{n,L,n',L'}^2 = \int \beta R_{n'}(\beta) R_n(\beta) d\beta, \quad (4.8)$$

ενώ τα $C_{n_{\gamma},K,n'_{\gamma},K'}^2$ είναι τα ολοκληρώματα ως προς γ με έτοιμες τιμές από τη [45]. Ειδικότερα για τους ασταθείς ως προς γ το ακτινικό μέρος γίνεται

$$B_{n',\tau+1;n,\tau} = \int_0^{\infty} \beta \xi_{n',\tau+1}(\beta) \xi_{n,\tau}(\beta) \beta^4 d\beta = \int_0^{\infty} \beta R_{n',\tau+1}(\beta) R_{n,\tau}(\beta) d\beta, \quad (4.9)$$

Η εξάρτηση των κυματοσυναρτήσεων $R_n(\beta)$ από το τ περιλαμβάνεται στο Λ , ενώ η σχέση του με τη στροφορμή από τον αλγόριθμο του εδαφίου 2.2.1. Για τους αξονικά συμμετρικούς πυρήνες το ακτινικό μέρος είναι

$$B_{n,L,n',L'} = \int_0^{\infty} \beta \xi_{n,L}(\beta) \xi_{n',L'}(\beta) \beta^4 d\beta = \int_0^{\infty} \beta R_{n,L}(\beta) R_{n',L'}(\beta) d\beta. \quad (4.10)$$

Όπως και στις [33, 45] υπολογίζονται οι ανηγμένοι ρυθμοί μετάβασης ως προς τη $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$, δηλαδή για τη μετάβαση από κατάσταση με στροφορμή L_i σε L_f υπολογίζεται ο λόγος

$$\frac{B(E2; L_i \rightarrow L_f)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}. \quad (4.11)$$

Με αυτό το τρόπο απαλείφεται ο παράγοντας κλίμακας t . Για τον υπολογισμό των ρυθμών μετάβασης και τη σύγκρισή τους με τα πειραματικά δεδομένα κατασκευάστηκε πρωτότυπος κώδικας στη Mathematica. Ο υπολογισμός εκτελείται και για τα δύο δυναμικά. Τα σύνολα παραμέτρων (a, β_0) και (a, β_0, c) αποθηκεύονται σε δύο ξεχωριστές λίστες. Επιλέγεται ένας συγκεκριμένος ρυθμός μετάβασης και ο υπολογισμός εκτελείται για όλες τις τιμές της λίστας.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα από τη προσαρμογή και τον υπολογισμό των ρυθμών μετάβασης παρουσιάζονται στους πίνακες που παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου. Ακολουθεί ο σχολιασμός τους.

4.4.1 Ρυθμοί μετάβασης στο Davidson

Οι $B(E2)$ μέσα στη βασική ζώνη, όπως επίσης και οι διαζωνικές για τις οποίες υπάρχουν πειραματικά δεδομένα για διάφορους πυρήνες για τους οποίους υπάρχουν πειραματικά δεδομένα, έχουν υπολογιστεί. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο πίνακα 4.8 για τους ασταθείς ως προς γ και στον 4.9 για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες. Υπολογίστηκαν με το κώδικα που φαίνεται στο παράρτημα βασισμένος στο εδάφιο 4.4.

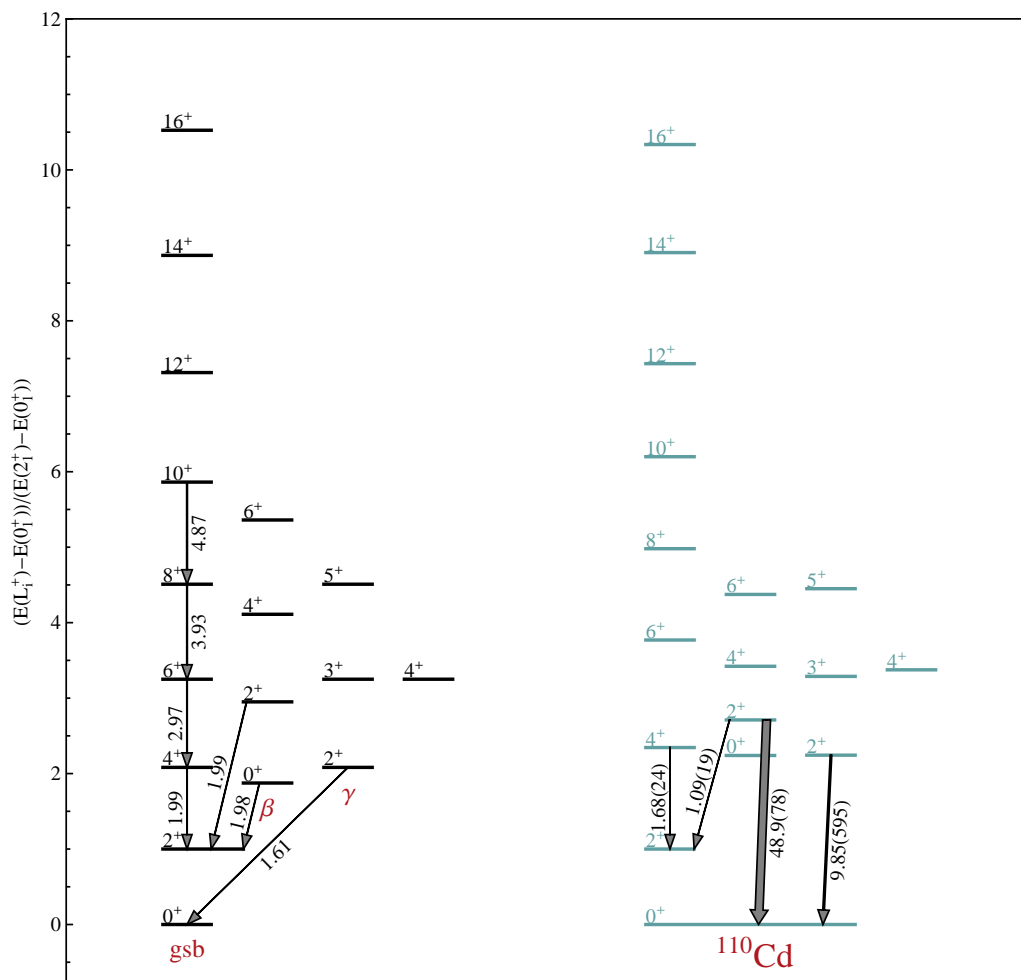
Η επιτυχία του δυναμικού Davidson στην αναπαραγωγή των κανονικοτήτων του ρυθμού μετάβασης $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$, κανονικοποιημένου στην $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$, για τους υπάρχοντες πειραματικά γνωστούς παραμορφωμένους πυρήνες, ασταθείς ως προς γ και αξονικά συμμετρικούς φαίνεται στα αποτελέσματα των πινάκων 4.8 και 4.9. Οι υπόλοιπες ενδοζωνικές (intraband) μεταβάσεις των επόμενων μελών της βασικής ζώνης μέχρι και τη $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ επίσης αναπαράγουν τις πειραματικές μετρήσεις σε πολύ καλό βαθμό.

Οι διαζωνικές (interband) μεταβάσεις, όπως η $B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ ή η $B(E2; 2_3^+ \rightarrow 2_1^+)$ κανονικοποιημένες στη $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ γενικά παρουσιάζουν αποκλίσεις. Αυτό είναι λιγότερο εμφανές στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες. Αντίθετα, στη περίπτωση των αξονικά συμμετρικών πυρήνων διαζωνικές μεταβάσεις όπως οι $B(E2; 2_\beta^+ \rightarrow 2_1^+)$ ή η $B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 2_1^+)$, ξανά κανονικοποιημένες στη $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ είναι αισθητά υπερεκτιμημένες, όπως φαίνεται στο πίνακα 4.9. Η κατανόησή μας σε σχέση με αυτές τις αποκλίσεις θα αναδυθεί στο τελευταίο κεφάλαιο και έχει να κάνει με τη χρήση του τετραπολικού τελεστή. Η εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση είναι το αποτέλεσμα υψηλότερης συμμετρίας από τη $U(5)$ και οι παρατηρήσιμες ποσότητες (observables) του προτύπου Bohr θα πρέπει να επαναθεμελιωθούν (re-formulate). Η Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση είναι μια μορφή επαναθεμελίωσης της παρατηρήσιμης ποσότητας της ενέργειας στη νέα περιοχή συμμετρίας. Ωστόσο η επαναθεμελίωση δε συμβαίνει για τις παρατηρήσιμες τετραπολικές μεταβάσεις μεταξύ των ενεργειακών επιπέδων δηλαδή για το τετραπολικό τελεστή. Για τη μορφή του τετραπολικού τελεστή που θα αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση είναι αναγκαίο το γεωμετρικό όριο του IBM, όπως θα φανεί στο τελευταίο κεφάλαιο.

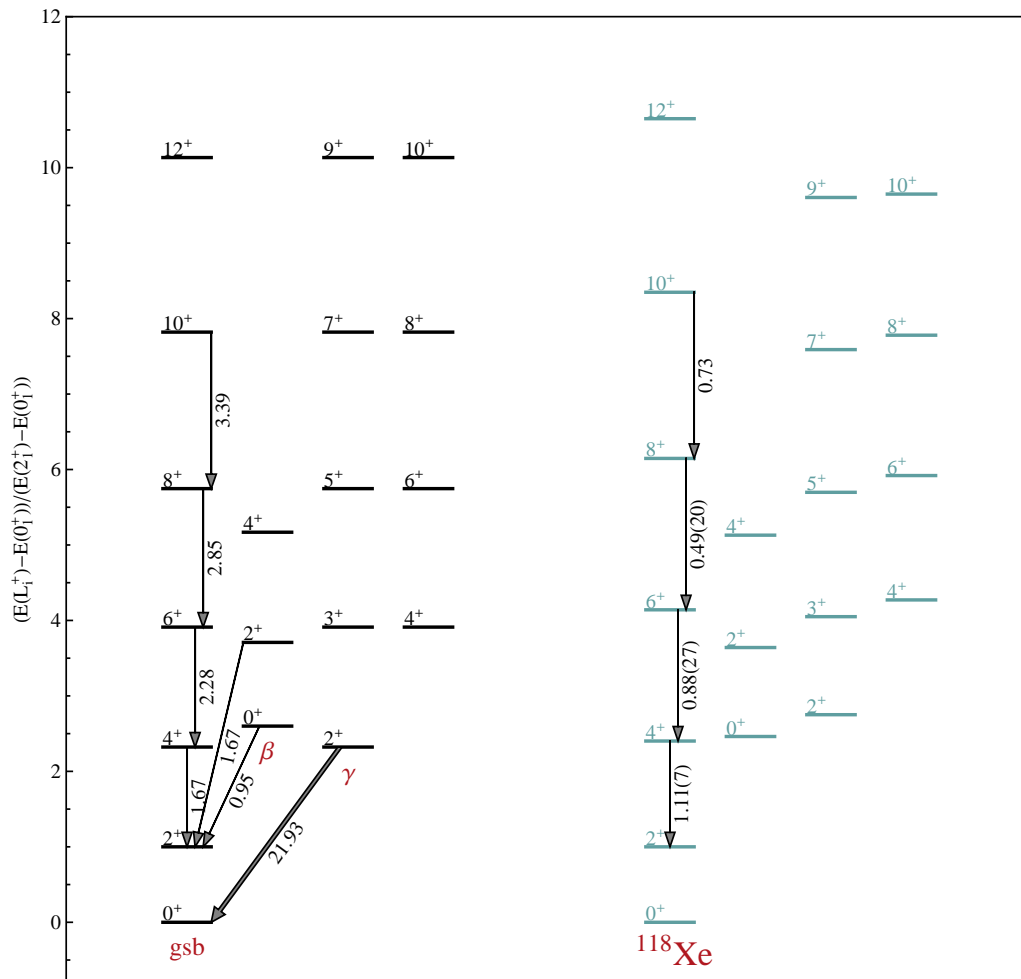
4.4.2 Ρυθμοί μετάβασης στο Kratzer

Οι $B(E2)$ μέσα στη βασική ζώνη, όπως επίσης και οι διαζωνικοί για τους οποίους υπάρχουν διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα για διαφόρους πυρήνες, υπολογίζονται βάσει των παραμέτρων των πινάκων 4.4 και 4.5 για τους ασταθείς ως προς γ και τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.10 για τους ασταθείς ως προς γ και 4.11 για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις. Η όλη συμφωνία είναι καλή για μεταβάσεις μέσα στη βασική ζώνη, όπως επίσης και για εκείνες που συνδέουν τη γ_1 με τη βασική, ενώ οι μεταβάσεις από τη β_1 στη βασική, τείνουν να είναι υπερ-εκτιμημένες. Αυτό φαίνεται καλύτερα και στα σχήματα 4.7 και 4.8, όπου οι θεωρητικές διαζωνικές μεταβάσεις είναι αισθητά μεγαλύτερες (παχύτερες γραφικά) από τις αντίστοιχες πειραματικές. Αιτία και εδώ θα πρέπει να θεωρηθεί η νέα συμμετρία που αναδεικνύεται από την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer και δεν εκφράζεται φανερά με την επιλογή του συνήθους τετραπολικού τελεστή.

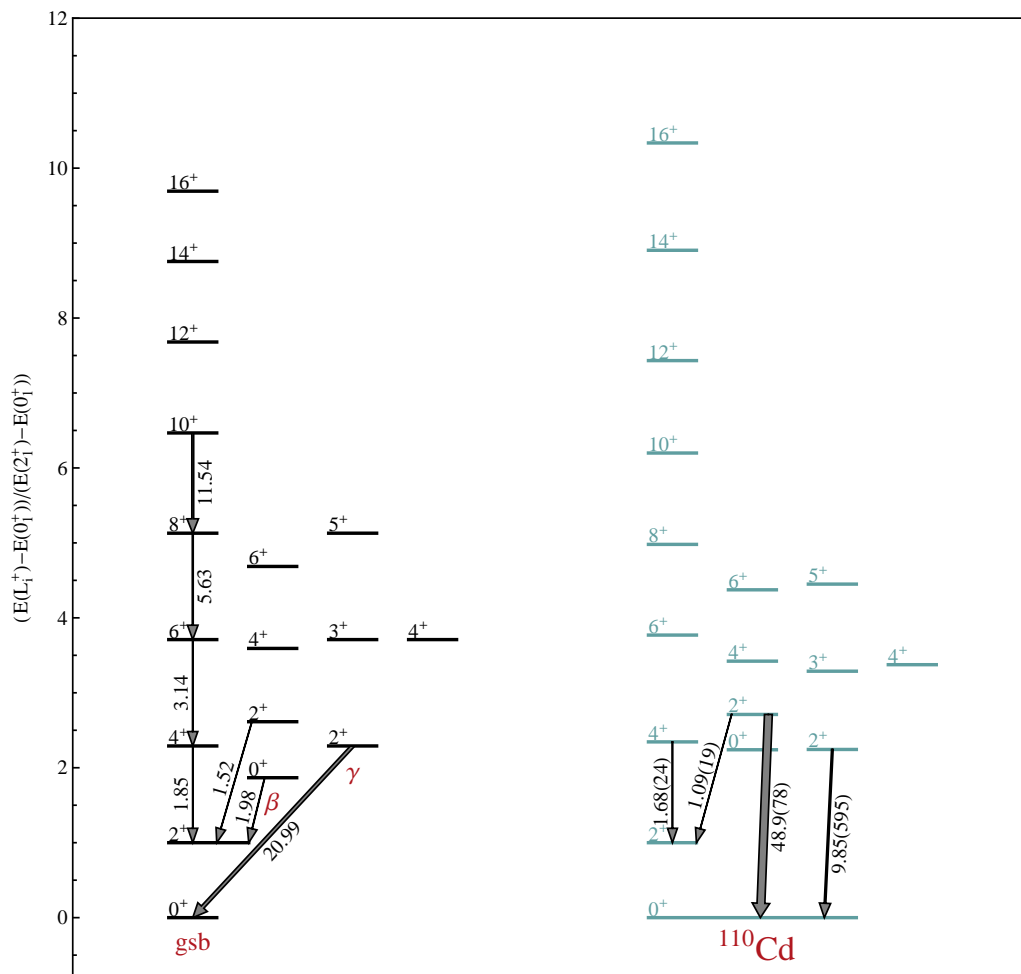
4.5 Σχήματα και Πίνακες αριθμητικών αποτελεσμάτων



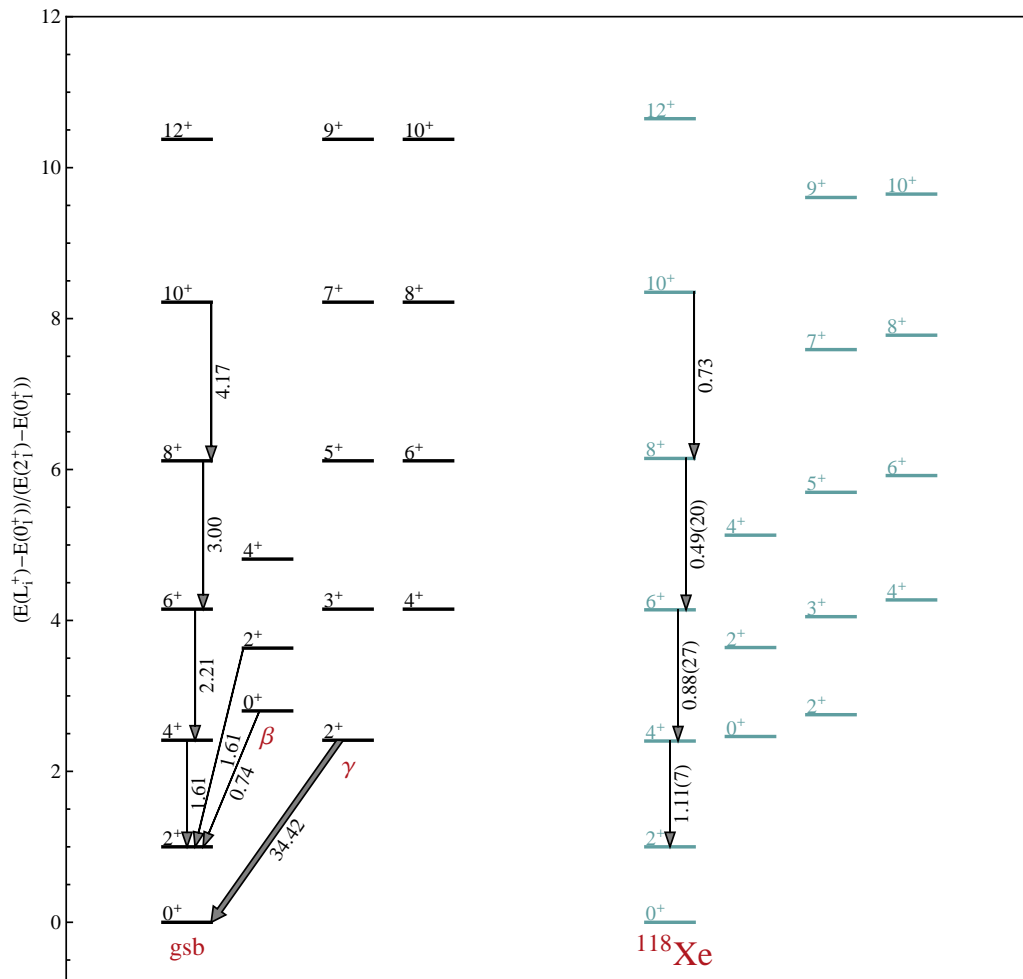
Σχήμα 4.1: Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{110}Cd από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson (αριστερά) στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)], βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.1 για το ^{110}Cd και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.8 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.8 για το ^{110}Cd .



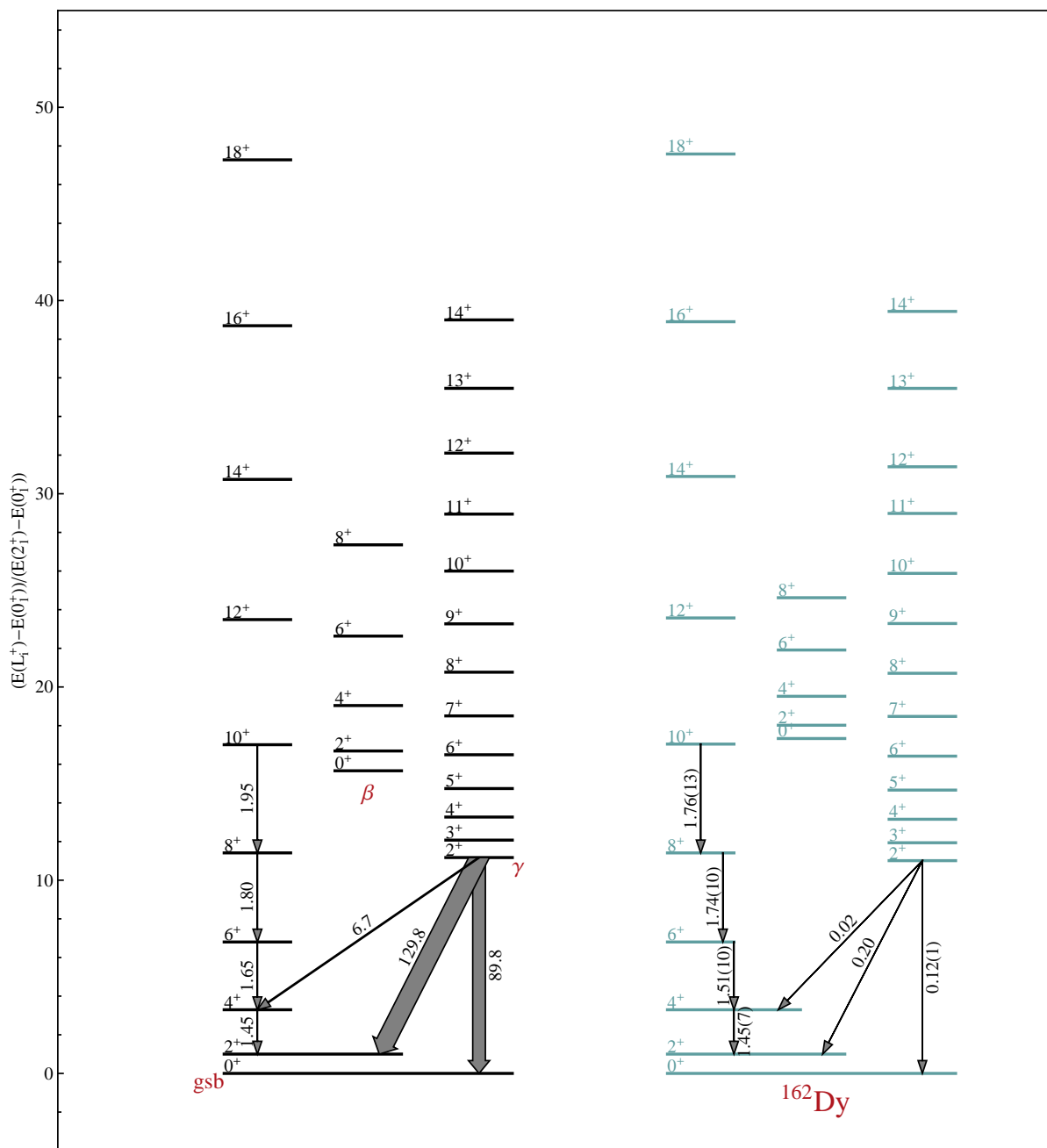
Σχήμα 4.2: Ομοίως με το σχήμα 4.1, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{118}Xe από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson.



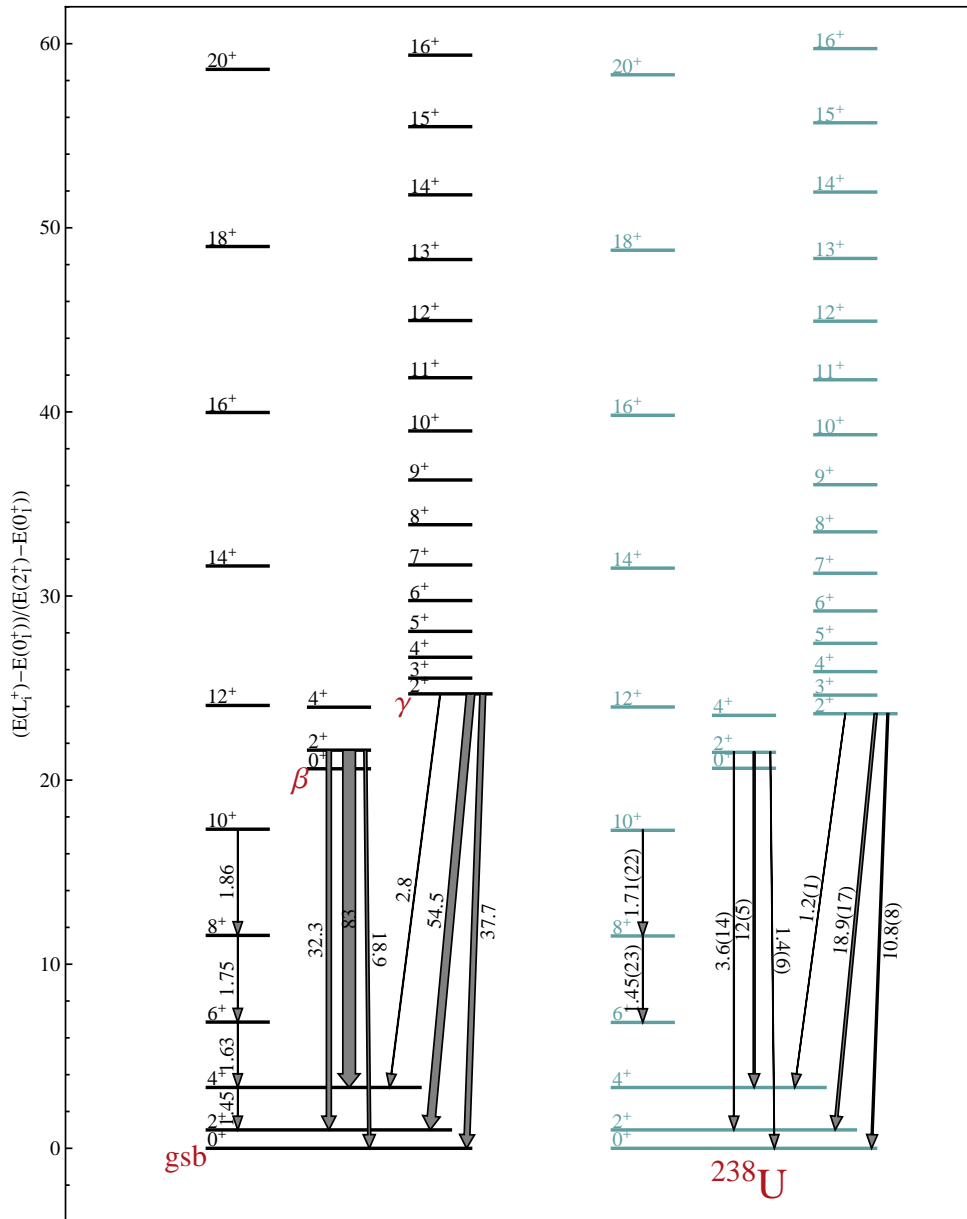
Σχήμα 4.3: Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{110}Cd από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer (αριστερά) στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)], βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.1 για το ^{110}Cd και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.8 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.8 για το ^{110}Cd .



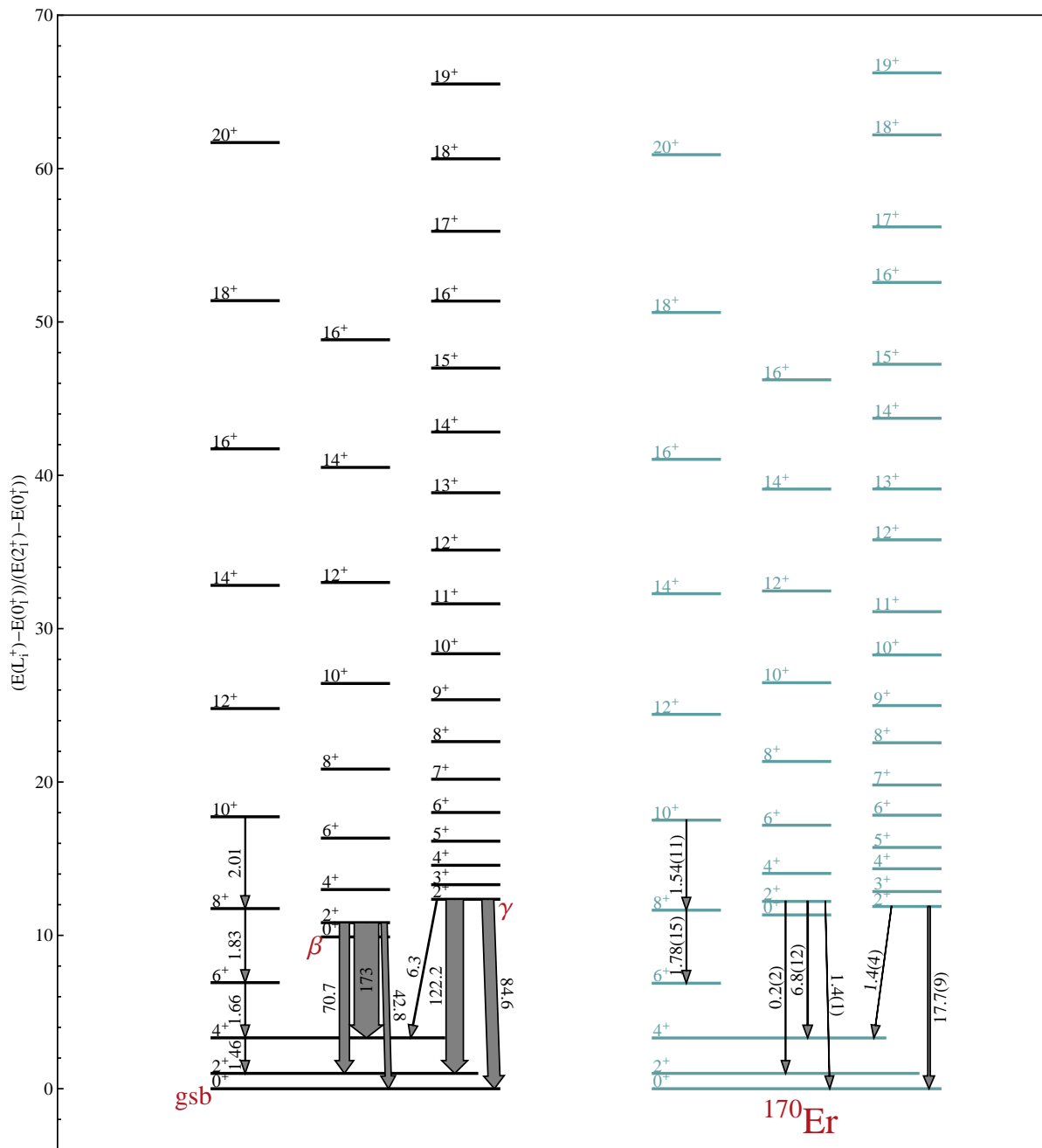
Σχήμα 4.4: Ομοίως με το σχήμα 4.3, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{118}Xe από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer.



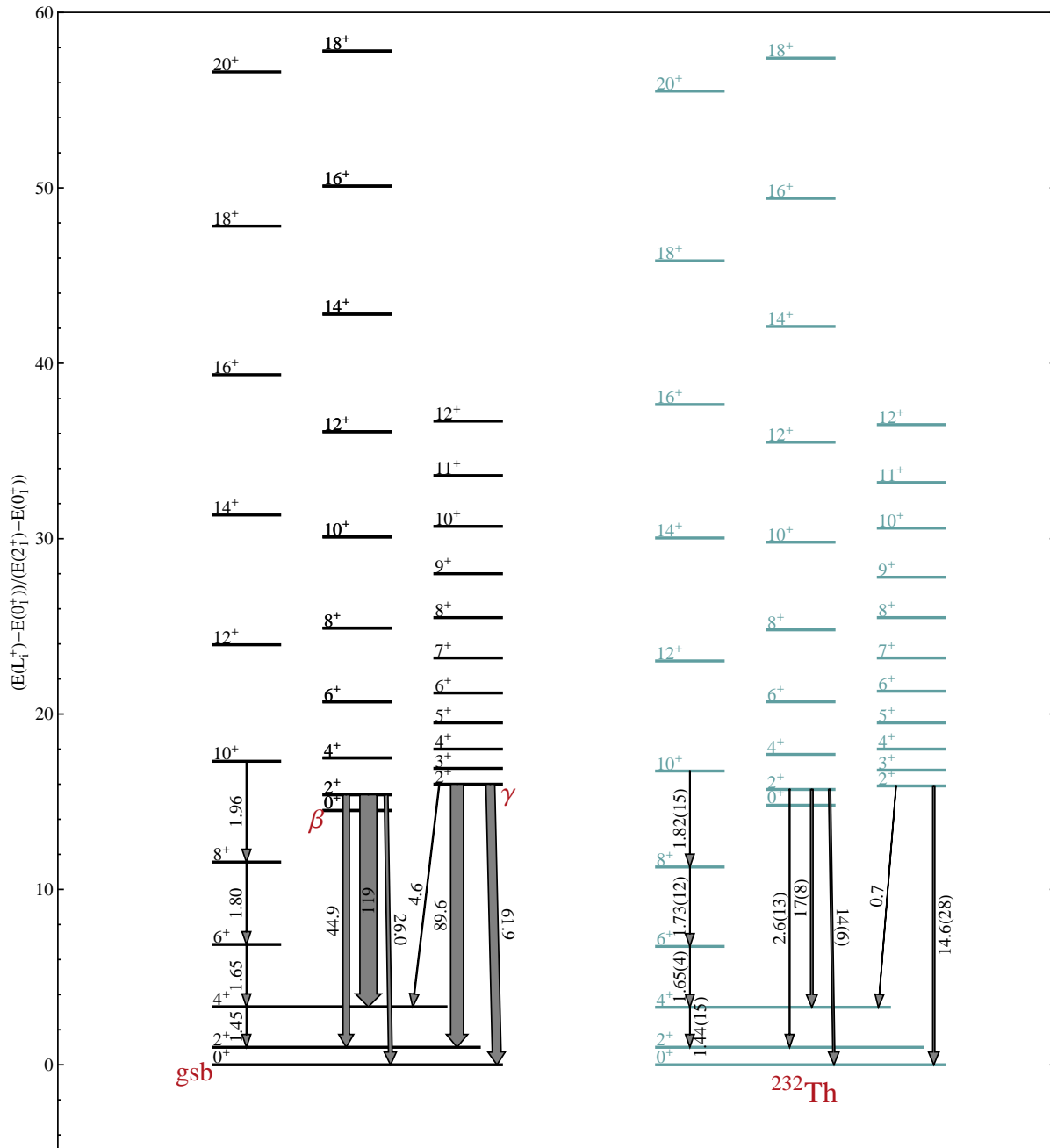
Σχήμα 4.5: Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{162}Dy από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson (αριστερά), για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήχεις πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)] βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.2 για το ^{162}Dy και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.9 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.9 για το ^{162}Dy .



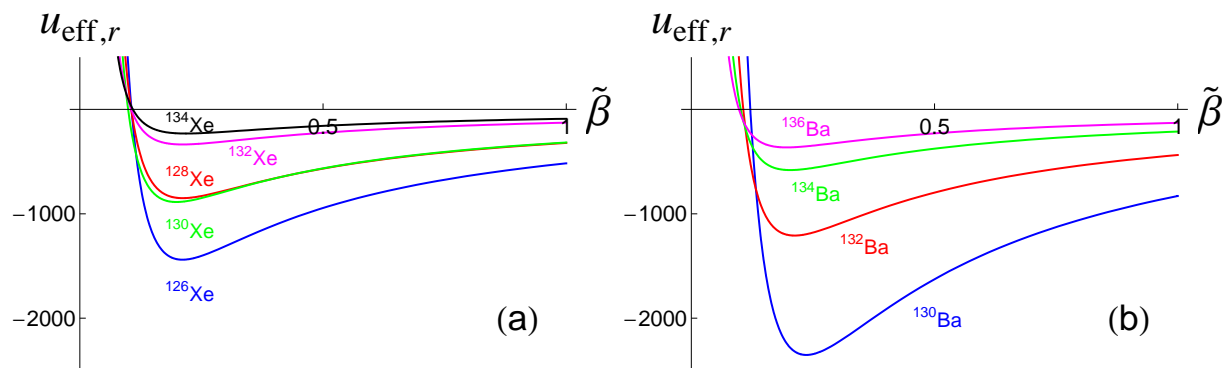
Σχήμα 4.6: Ομοίως με το σχήμα 4.5, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{238}U από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson.



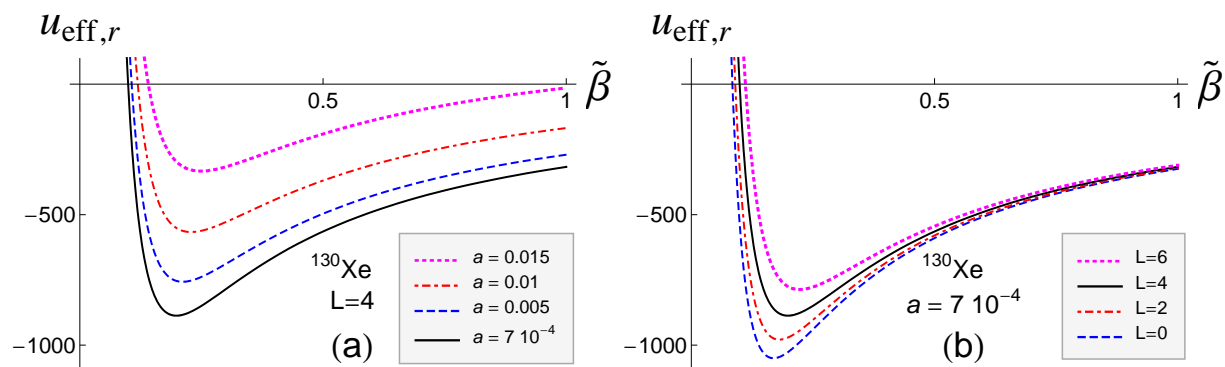
Σχήμα 4.7: Σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{170}Er από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer (αριστερά), για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήχεις πυρήνες [για τις σχετικές εξισώσεις δείτε το εδάφιο (3.7)] βάσει των παραμέτρων του πίνακα 4.5 για το ^{170}Er και των ρυθμών μετάβασης του πίνακα 4.11 επίσης. Δεξιά παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές για το φάσμα [87] και τους ρυθμούς μετάβασης όπου αυτοί είναι διαθέσιμοι βάσει του πίνακα 4.11 για το ^{170}Er .



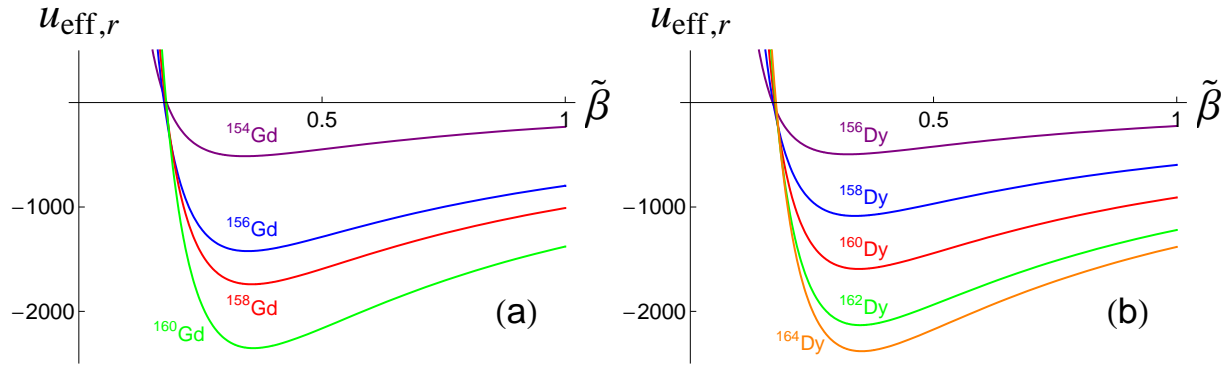
Σχήμα 4.8: Ομοίως με το σχήμα 4.7, σύγκριση ενεργειακών επιπέδων και ρυθμών μετάβασης για το ^{232}Th από τη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Kratzer.



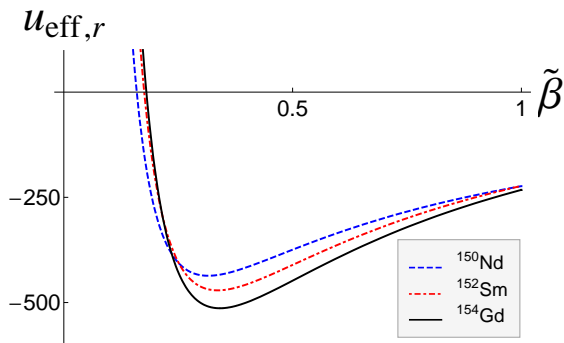
Σχήμα 4.9: Ενεργά δυναμικά Kratzer της (3.93) της Χαμιλτονιανής Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για $L = 4$ για κάποια ισότοπα του Xe (a) και του Ba (b), τα οποία αντιστοιχούν στις παραμέτρους του πίνακα 4.4. Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.1.



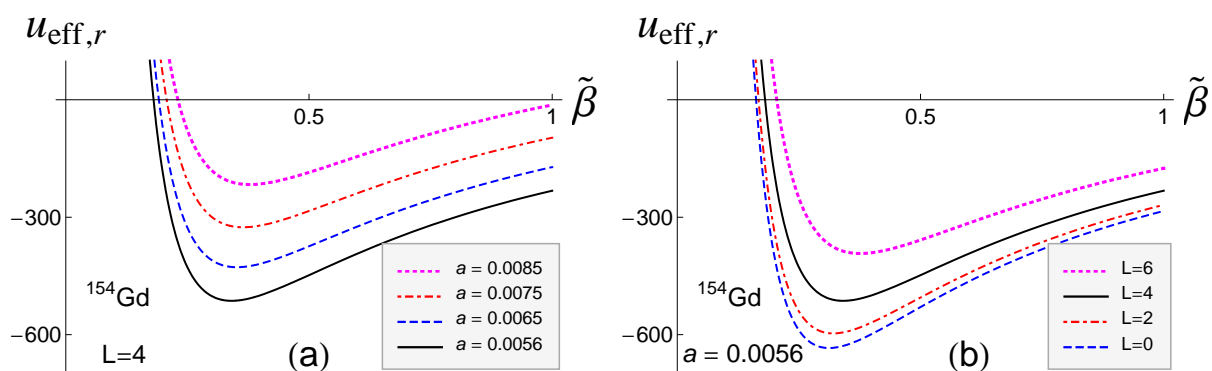
Σχήμα 4.10: Ομοίως, εξάρτηση των ενεργών δυναμικών Kratzer της (3.93) με τη παράμετρο a (a) και τη τροχιακή στροφορμή L (b). Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Τα ενεργά δυναμικά για τη κατάσταση με $L = 4$ της βασικής ζώνης του ^{130}Xe (ανταποκρινόμενο στις παραμέτρους του πίνακα 4.5), που έχει σχεδιαστεί και στα δύο μέρη, χρησιμοποιείται για τη σύγκριση. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.1.



Σχήμα 4.11: Ενεργά δυναμικά Kratzer της (3.93) της $L = 4$ για κάποια ισότοπα του Gd (a) και του Dy (b), τα οποία αντιστοιχούν στις παραμέτρους του πίνακα 4.5. Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Η εξίσωση B'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα B'.2.



Σχήμα 4.12: Ενεργά δυναμικά Kratzer της (3.93) της $L = 4$ για τα ισότοπα της περιοχής $N = 90$, ως καλά παραδείγματα της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$, τα οποία ανταποκρίνονται στις παραμέτρους του πίνακα 4.5. Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Η εξίσωση B'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα B'.2.



Σχήμα 4.13: Εξάρτηση των ενεργών δυναμικών Kratzer της (3.93) με τη παράμετρο a (a) και τη τροχιακή στροφορμή L (b). Οι ποσότητες που δείχνονται είναι αδιάστατες. Τα ενεργά δυναμικά για τη κατάσταση με $L = 4$ της βασικής ζώνης για το ^{154}Gd (ανταποκρινόμενες στις τιμές του πίνακα 4.5), σχεδιαζόμενα και στα δύο μέρη, χρησιμοποιείται ως βάση για τη σύγκριση. Η εξίσωση Β'.1 ορίζει τη τετμημένη και εισάγει τη παράμετρο A της οποίας οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται από το πίνακα Β'.2.

Πίνακας 4.1: Σύγκριση των θεωρητικών προβλέψεων της ασταθούς ως προς γ Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για το δυναμικό Davidson ($\delta = \lambda = 0$) με τα πειραματικά δεδομένα [87] για τις σπάνιες γαίες και τους ακτινίδες με $R_{4/2} \leq 2.6$ και γνωστές τις καταστάσεις 0_2^+ και 2_1^+ . Παρουσιάζονται οι λόγοι $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, όπως επίσης και οι χαμηλότερες ενεργειακά καταστάσεις των ζωνών β και γ (τα bandheads), κανονικοποιημένες στη κατάσταση 2_1^+ και ταξινομούνται από $R_{0/2} = E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ και $R_{2/2} = E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ αντίστοιχα. Οι παράμετροι β_0 και a είναι ελεύθερες, σχετιζόμενες με το δυναμικό του Davidson και με την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση αντίστοιχα. Οι τροχιακές στροφορμές των υψηλότερων επιπέδων της βασικής ζώνης καθώς και των ζωνών β και γ , περιλαμβάνονται στη προσαρμογή (fit) μέσω των τετραγώνων, ταξινομούνται από L_g , L_β , και L_γ αντίστοιχα, ενώ το n δηλώνει το συνολικό αριθμό των ενεργειακών επιπέδων που περιλαμβάνονται στο fit και σ είναι το μέτρο ποιότητας της Εξ. (4.3). Δείτε το εδάφιο 4.2.1 για περισσότερα.

Πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	β_0	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
⁹⁸ Ru	2.14	2.14	2.0	2.4	2.2	2.1	0.99	0.020	24	0	4	15	0.277
¹⁰⁰ Ru	2.27	2.24	2.1	2.7	2.5	2.2	1.19	0.048	28	0	4	17	0.315
¹⁰² Ru	2.33	2.20	2.0	2.4	2.3	2.2	1.05	0.059	16	0	5	12	0.364
¹⁰⁴ Ru	2.48	2.34	2.8	3.0	2.5	2.3	1.40	0.083	8	2	8	12	0.429
¹⁰² Pd	2.29	2.24	2.9	2.3	2.8	2.2	1.08	0.081	26	4	4	18	0.326
¹⁰⁴ Pd	2.38	2.21	2.4	2.6	2.4	2.2	1.15	0.034	18	2	4	13	0.397
¹⁰⁶ Pd	2.40	2.16	2.2	2.2	2.2	2.2	0.91	0.062	16	4	5	14	0.409
¹⁰⁸ Pd	2.42	2.26	2.4	2.3	2.1	2.3	1.09	0.103	14	4	4	12	0.318
¹¹⁰ Pd	2.46	2.31	2.5	2.0	2.2	2.3	0.99	0.195	12	10	4	14	0.354
¹¹² Pd	2.53	2.29	2.6	2.5	2.1	2.3	1.21	0.086	6	0	3	5	0.485
¹¹⁴ Pd	2.56	2.31	2.6	2.8	2.1	2.3	1.30	0.076	16	0	11	18	0.722
¹¹⁶ Pd	2.58	2.36	3.3	3.4	2.2	2.4	1.52	0.062	16	0	9	16	0.609
¹⁰⁶ Cd	2.36	2.25	2.8	2.9	2.7	2.3	1.28	0.028	12	0	2	7	0.268
¹⁰⁸ Cd	2.38	2.14	2.7	2.2	2.5	2.1	0.91	0.041	24	0	5	16	0.528
¹¹⁰ Cd	2.35	2.08	2.2	1.9	2.2	2.1	0.00	0.061	16	6	5	15	0.415
¹¹² Cd	2.29	2.05	2.0	1.9	2.1	2.0	0.00	0.033	12	8	11	20	0.523
¹¹⁴ Cd	2.30	2.06	2.0	1.9	2.2	2.1	0.00	0.041	14	4	3	11	0.418
¹¹⁶ Cd	2.38	2.16	2.5	2.7	2.4	2.2	1.14	0.000	14	2	3	10	0.387
¹¹⁸ Cd	2.39	2.19	2.6	2.9	2.6	2.2	1.21	0.002	14	0	3	9	0.429
¹²⁰ Cd	2.38	2.20	2.7	2.9	2.6	2.2	1.22	0.006	16	0	2	9	0.412
¹¹⁸ Xe	2.40	2.32	2.5	2.6	2.8	2.3	1.27	0.103	16	4	10	19	0.319
¹²⁰ Xe	2.47	2.36	2.8	3.4	2.7	2.4	1.51	0.063	26	4	9	23	0.524
¹²² Xe	2.50	2.40	3.5	3.3	2.5	2.4	1.57	0.096	16	0	9	16	0.638
¹²⁴ Xe	2.48	2.36	3.6	3.5	2.4	2.4	1.55	0.051	20	2	11	21	0.554
¹²⁶ Xe	2.42	2.33	3.4	3.1	2.3	2.3	1.42	0.064	12	4	9	16	0.584
¹²⁸ Xe	2.33	2.27	3.6	3.5	2.2	2.3	1.42	0.000	10	2	7	12	0.431
¹³⁰ Xe	2.25	2.21	3.3	3.1	2.1	2.2	1.27	0.000	14	0	5	11	0.347
¹³² Xe	2.16	2.00	2.8	2.0	1.9	2.0	0.00	0.000	6	0	5	7	0.467
¹³⁴ Xe	2.04	2.00	1.9	2.0	1.9	2.0	0.00	0.000	6	0	5	7	0.685

Πίνακας 4.1: (Συνέχεια)

Πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	β_0	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{130}Ba	2.52	2.42	3.3	3.2	2.5	2.4	1.60	0.118	12	0	6	11	0.352
^{132}Ba	2.43	2.29	3.2	2.8	2.2	2.3	1.29	0.059	14	0	8	14	0.619
^{134}Ba	2.32	2.16	2.9	2.7	1.9	2.2	1.12	0.000	8	0	4	7	0.332
^{136}Ba	2.28	2.00	1.9	2.0	1.9	2.0	0.00	0.000	6	0	2	4	0.250
^{142}Ba	2.32	2.38	4.3	4.3	4.0	2.4	1.72	0.028	14	0	2	8	0.609
^{134}Ce	2.56	2.34	3.7	3.9	2.4	2.3	1.59	0.019	34	2	8	25	0.527
^{136}Ce	2.38	2.11	1.9	2.1	2.0	2.1	0.82	0.034	16	0	3	10	0.457
^{138}Ce	2.32	2.00	1.9	2.0	1.9	2.0	0.00	0.000	14	0	2	8	0.314
^{140}Nd	2.33	2.05	1.8	1.9	1.9	2.1	0.00	0.037	6	0	2	4	0.192
^{148}Nd	2.49	2.36	3.0	2.8	4.1	2.4	1.38	0.110	12	8	4	13	0.764
^{140}Sm	2.35	2.29	1.9	1.9	2.7	2.3	0.92	0.196	8	0	2	5	0.207
^{142}Sm	2.33	2.06	1.9	1.9	2.2	2.1	0.33	0.044	8	0	2	5	0.147
^{142}Gd	2.35	2.21	2.7	2.8	1.9	2.2	1.20	0.020	16	0	2	9	0.231
^{144}Gd	2.35	2.33	2.5	2.5	2.5	2.3	1.26	0.112	6	0	2	4	0.124
^{152}Gd	2.19	2.13	1.8	1.8	3.2	2.1	0.00	0.104	16	10	7	19	0.635
^{154}Dy	2.23	2.15	2.0	2.0	3.1	2.1	0.75	0.083	26	10	7	24	0.530
^{156}Er	2.32	2.25	2.7	2.8	2.7	2.3	1.24	0.043	20	4	5	16	0.450
^{186}Pt	2.56	2.42	2.5	3.7	3.2	2.4	1.71	0.085	26	6	10	25	0.813
^{188}Pt	2.53	2.37	3.0	3.3	2.3	2.4	1.52	0.076	16	2	4	12	0.637
^{190}Pt	2.49	2.28	3.1	3.4	2.0	2.3	1.42	0.015	18	2	6	15	0.637
^{192}Pt	2.48	2.34	3.8	3.7	1.9	2.3	1.56	0.032	10	0	8	12	0.681
^{194}Pt	2.47	2.36	3.9	3.6	1.9	2.4	1.55	0.049	10	4	5	11	0.667
^{196}Pt	2.47	2.33	3.2	2.9	1.9	2.3	1.37	0.079	10	2	6	11	0.639
^{198}Pt	2.42	2.21	2.2	2.2	1.9	2.2	0.96	0.089	6	2	4	7	0.370
^{200}Pt	2.35	2.00	2.4	2.0	1.8	2.0	0.00	0.000	4	0	4	5	0.392

Πίνακας 4.2: Όπως και στον Πίνακα 4.1, αλλά για αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις παραμορφωμένους πυρήνες με το δυναμικό Davidson, στη περιοχή των σπάνιων γαιών και των ακτινιδών με $R_{4/2} > 2.9$. Οι παράμετροι β_0 , a , και c είναι ελεύθερες και σχετίζονται με το δυναμικό Davidson, με την εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση και με το δυναμικό ως προς γ [Εξίσωση (2.47)]. Οι θεωρητικές προβλέψεις αποκομίζονται από τις εξισώσεις που αναφέρονται στο εδάφιο 4.2.2, με επιπλέον εκτενή συζήτηση επί του θέματος.

Πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	β_0	c	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{150}Nd	2.93	3.13	5.2	7.9	8.2	5.8	0.0	2.1	0.003	14	6	4	13	2.012
^{152}Sm	3.01	3.14	5.6	8.4	8.9	6.5	0.0	2.4	0.000	16	14	9	23	3.327
^{154}Sm	3.25	3.27	13.4	13.0	17.6	18.6	1.30	6.9	0.021	16	6	7	17	0.515
^{154}Gd	3.02	3.09	5.5	6.5	8.1	4.1	0.0	1.4	0.024	26	26	7	32	3.546
^{156}Gd	3.24	3.25	11.8	10.8	13.0	14.3	0.0	5.3	0.026	26	12	16	34	0.933
^{158}Gd	3.29	3.29	15.0	14.5	14.9	15.1	1.99	5.3	0.025	12	6	6	14	0.323
^{160}Gd	3.30	3.30	17.6	17.3	13.1	13.2	2.38	4.5	0.020	16	4	8	17	0.125
^{162}Gd	3.29	3.30	19.8	19.8	12.0	12.1	2.52	4.1	0.008	14	0	4	10	0.078
^{156}Dy	2.93	3.13	4.9	7.4	6.5	5.3	0.0	1.9	0.014	28	10	13	31	1.789
^{158}Dy	3.21	3.22	10.0	9.6	9.6	10.3	0.26	3.8	0.023	28	8	8	25	0.496
^{160}Dy	3.27	3.27	14.7	14.7	11.1	12.1	1.92	4.3	0.005	28	4	23	38	0.510
^{162}Dy	3.29	3.30	17.3	15.7	11.0	11.2	2.23	3.8	0.020	18	8	14	26	0.742
^{164}Dy	3.30	3.30	22.6	22.5	10.4	10.2	2.68	3.4	0.000	20	0	10	19	0.100
^{166}Dy	3.31	3.31	15.0	14.9	11.2	11.2	2.39	3.7	0.047	6	2	5	8	0.077
^{160}Er	3.10	3.16	7.1	8.1	6.8	6.6	0.00	2.4	0.013	26	2	5	18	0.699
^{162}Er	3.23	3.23	10.7	10.7	8.8	10.1	1.29	3.7	0.013	20	4	12	23	0.770
^{164}Er	3.28	3.27	13.6	12.2	9.4	9.6	1.83	3.3	0.026	22	10	18	33	0.918
^{166}Er	3.29	3.28	18.1	16.8	9.8	9.9	2.22	3.4	0.002	16	10	14	26	0.698
^{168}Er	3.31	3.31	15.3	14.4	10.3	10.2	2.29	3.4	0.041	18	6	8	19	0.404
^{170}Er	3.31	3.30	11.3	10.1	11.9	12.9	1.64	4.4	0.083	24	10	19	35	0.837
^{162}Yb	2.92	3.07	3.6	6.8	4.8	4.0	0.00	1.4	0.003	24	0	4	15	1.036
^{164}Yb	3.13	3.18	7.9	8.3	7.0	7.4	0.00	2.7	0.023	18	0	5	13	0.357
^{166}Yb	3.23	3.23	10.2	8.9	9.1	9.7	0.66	3.5	0.038	24	10	13	29	0.973
^{168}Yb	3.27	3.26	13.2	11.2	11.2	11.5	1.52	4.1	0.028	34	4	7	25	1.070
^{170}Yb	3.29	3.27	12.7	11.2	13.6	14.1	1.36	5.1	0.035	20	10	17	31	0.963
^{172}Yb	3.31	3.30	13.2	12.2	18.6	18.9	1.66	6.6	0.055	16	10	5	17	0.742
^{174}Yb	3.31	3.31	19.4	19.3	21.4	21.5	2.44	7.5	0.019	20	4	5	16	0.104
^{176}Yb	3.31	3.30	13.9	13.7	15.4	15.5	1.97	5.4	0.036	20	2	5	15	0.287
^{178}Yb	3.31	3.27	15.7	15.5	14.5	14.6	1.88	5.3	0.000	6	4	2	6	0.127
^{166}Hf	2.97	3.08	4.4	6.9	5.1	4.3	0.00	1.5	0.006	22	0	3	13	0.873
^{168}Hf	3.11	3.17	7.6	8.1	7.1	6.9	0.00	2.5	0.023	22	4	4	16	0.494
^{170}Hf	3.19	3.21	8.7	8.7	9.5	8.8	0.00	3.2	0.033	34	4	4	22	0.970
^{172}Hf	3.25	3.24	9.2	9.8	11.3	11.7	0.00	4.3	0.031	38	4	6	26	0.549
^{174}Hf	3.27	3.25	9.1	10.4	13.5	13.6	0.00	5.0	0.033	26	4	5	19	0.832
^{176}Hf	3.28	3.28	13.0	11.5	15.2	16.1	1.31	5.8	0.038	18	10	8	21	0.950
^{178}Hf	3.29	3.28	12.9	12.3	12.6	13.0	1.70	4.6	0.028	18	6	6	17	0.356

Πίνακας 4.2: (Συνέχεια)

Πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	β_0	c	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{180}Hf	3.31	3.30	11.8	11.5	12.9	13.0	1.92	4.4	0.068	12	4	5	12	0.157
^{176}W	3.22	3.21	7.8	9.1	9.6	9.5	0.00	3.5	0.027	22	4	5	17	0.881
^{178}W	3.24	3.22	9.4	8.6	10.5	8.9	0.00	3.2	0.039	18	10	2	15	0.987
^{180}W	3.26	3.25	14.6	13.1	10.8	11.5	1.64	4.2	0.000	24	0	7	18	0.603
^{182}W	3.29	3.29	11.3	11.5	12.2	12.5	1.77	4.3	0.050	18	4	6	16	0.195
^{184}W	3.27	3.28	9.0	8.9	8.1	8.0	1.57	2.7	0.080	10	4	6	12	0.093
^{186}W	3.23	3.25	7.2	7.2	6.0	6.3	1.20	2.1	0.099	14	4	6	14	0.130
^{176}Os	2.93	3.10	4.5	6.9	6.4	4.6	0.00	1.6	0.016	24	6	5	19	1.747
^{178}Os	3.02	3.12	4.9	7.2	6.6	5.1	0.00	1.8	0.017	16	6	5	15	1.836
^{180}Os	3.09	3.22	5.6	7.1	6.6	6.9	0.00	2.4	0.078	10	6	7	14	1.021
^{184}Os	3.20	3.21	8.7	9.9	7.9	8.5	1.21	3.1	0.011	22	0	6	16	0.886
^{186}Os	3.17	3.19	7.7	7.0	5.6	6.0	0.00	2.1	0.063	14	10	13	24	0.702
^{188}Os	3.08	3.15	7.0	7.2	4.1	4.4	1.07	1.5	0.033	12	2	7	13	0.170
^{190}Os	2.93	3.07	4.9	5.6	3.0	3.1	0.00	1.0	0.051	10	2	6	11	0.419
^{228}Ra	3.21	3.24	11.3	11.0	13.3	13.3	0.57	5.0	0.016	22	4	3	15	0.177
^{228}Th	3.24	3.26	14.4	14.3	16.8	17.0	1.50	6.4	0.002	18	2	5	14	0.214
^{230}Th	3.27	3.27	11.9	11.6	14.7	14.7	1.44	5.3	0.034	24	4	4	17	0.243
^{232}Th	3.28	3.28	14.8	14.0	15.9	16.5	1.80	5.9	0.022	30	10	12	31	0.426
^{232}U	3.29	3.29	14.5	13.8	18.2	18.4	1.74	6.6	0.028	20	10	4	18	0.394
^{234}U	3.30	3.30	18.6	18.3	21.3	21.8	2.19	7.8	0.011	28	8	7	24	0.244
^{236}U	3.30	3.30	20.3	20.0	21.2	21.2	2.38	7.5	0.009	30	4	5	21	0.143
^{238}U	3.30	3.31	20.6	20.6	23.6	24.7	2.38	8.8	0.009	30	4	27	43	0.665
^{238}Pu	3.31	3.31	21.4	21.4	23.3	23.3	2.61	8.1	0.016	26	2	4	17	0.067
^{240}Pu	3.31	3.31	20.1	19.9	26.6	26.6	2.40	9.4	0.018	26	4	4	18	0.117
^{242}Pu	3.31	3.31	21.5	21.4	24.7	24.7	2.52	8.7	0.012	26	2	2	15	0.107
^{248}Cm	3.31	3.31	25.0	24.8	24.2	24.3	2.72	8.5	0.004	28	4	2	17	0.159
^{250}Cf	3.32	3.31	27.0	26.9	24.2	24.2	2.88	8.4	0.003	8	2	4	8	0.053

Πίνακας 4.3: Τα ενεργειακά επίπεδα της βασικής της ζώνης β_1 και της γ_1 των ^{162}Dy και ^{238}U , κανονικοποιημένα στην ενέργεια της $E(2_1^+)$ που λαμβάνονται από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με παράμετρο μάζας εξαρτημένη από β για αξονικά συμμετρικούς πυρήνες στο δυναμικό Davidson. Οι παράμετροι (a, β_0, c) λαμβάνονται από το πίνακα 4.2.

^{162}Dy		^{162}Dy		^{238}U		^{238}U		^{162}Dy		^{162}Dy		^{238}U		^{238}U	
L	exp	th	exp	th	L	exp	th	exp	th	exp	th	exp	th	exp	th
	gsb	gsb	gsb	gsb		γ_1	γ_1	γ_1	γ_1						
0	0.00	0.00	0.00	0.00	2	11.0	11.2	23.6	24.7						
2	1.00	1.00	1.00	1.00	3	11.9	12.1	24.6	25.5						
4	3.29	3.30	3.30	3.31	4	13.2	13.3	25.9	26.7						
6	6.80	6.80	6.84	6.86	5	14.7	14.7	27.4	28.1						
8	11.41	11.41	11.54	11.57	6	16.4	16.5	29.2	29.8						
10	17.04	17.01	17.27	17.33	7	18.5	18.5	31.2	31.7						
12	23.57	23.49	23.97	24.06	8	20.7	20.8	33.5	33.9						
14	30.90	30.74	31.51	31.63	9	23.3	23.3	36.0	36.3						
16	38.90	38.70	39.82	39.97	10	25.9	26.0	38.8	39.0						
18	47.58	47.28	48.78	48.98	11	29.0	28.9	41.7	41.9						
20			58.31	58.61	12	31.4	32.1	44.9	45.0						
22			68.31	68.77	13	35.5	35.5	48.3	48.3						
24			78.71	79.44	14	39.4	39.9	51.9	51.8						
26			89.46	90.55	15			55.7	55.5						
28			100.57	102.08	16			59.7	59.4						
30			112.10	113.99	17			63.9	63.4						
					18			68.2	67.7						
	β_1	β_1	β_1	β_1	19			72.7	72.0						
0	17.3	15.7	20.6	20.6	20			77.3	76.6						
2	18.0	16.7	21.5	21.6	21			82.1	81.3						
4	19.5	19.0	23.5	24.0	22			87.0	86.1						
6	21.9	22.6			23			91.9	91.0						
8	24.6	27.4			24			97.0	96.1						
					25			102.1	101.3						
					26			107.4	106.6						
					27			112.7	112.0						

Πίνακας 4.4: Σύγκριση θεωρητικών προβλέψεων της ασταθούς ως προς γ Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό Kratzer με τα πειραματικά δεδομένα [87] για τις ασπάνιες γαιές και τις ακτινίδες με $R_{4/2} \leq 2.6$ και γνωστές τις καταστάσεις 0_2^+ και 2_1^+ . Ο λόγος $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, όπως επίσης και οι κατώτατες καταστάσεις των ζωνών β και γ , κανονικοποιημένες στη κατάσταση 2_1^+ όπως αναφέρονται ως $R_{0/2} = E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ και $R_{2/2} = E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ αντίστοιχα. Οι τροχιακές στροφορμές των υψηλότερων επιπέδων της βασικής ζώνης, της ζώνης β και της ζώνης γ που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή rms αναφέρονται ως L_g , L_β και L_γ αντίστοιχα. Το n υποδεικνύει το συνολικό αριθμό των ενεργειακών επιπέδων που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή και σ είναι το μέτρο ποιότητας της Εξ. (4.3). Δείτε το εδάφιο 4.3.1 για λεπτομερέστερη ανάλυση.

Πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	\tilde{B}	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{98}Ru	2.14	2.34	2.0	2.0	2.2	2.3	38	0.0101	24	0	4	15	0.811
^{100}Ru	2.27	2.40	2.1	2.1	2.5	2.4	64	0.0094	24	0	4	15	0.824
^{102}Ru	2.33	2.35	2.0	2.0	2.3	2.3	41	0.0105	16	0	5	12	0.384
^{104}Ru	2.48	2.39	2.8	3.1	2.5	2.4	60	0.0046	8	2	8	12	0.437
^{102}Pd	2.29	2.42	2.9	2.4	2.8	2.4	81	0.0072	24	4	4	17	0.996
^{104}Pd	2.38	2.35	2.4	2.4	2.4	2.3	41	0.0072	18	2	4	13	0.328
^{106}Pd	2.40	2.33	2.2	2.3	2.2	2.3	36	0.0082	16	4	5	14	0.398
^{108}Pd	2.42	2.38	2.4	2.5	2.1	2.4	55	0.0069	14	4	4	12	0.317
^{110}Pd	2.46	2.43	2.5	2.7	2.2	2.4	100	0.0061	12	10	4	14	0.377
^{112}Pd	2.53	2.32	2.6	2.6	2.1	2.3	33	0.0058	6	0	3	5	0.485
^{114}Pd	2.56	2.40	2.6	2.6	2.1	2.4	65	0.0065	16	0	11	18	0.772
^{116}Pd	2.58	2.42	3.3	3.3	2.2	2.4	83	0.0044	16	0	9	16	0.630
^{106}Cd	2.36	2.33	2.8	2.8	2.7	2.3	36	0.0044	12	0	2	7	0.174
^{108}Cd	2.38	2.34	2.7	2.7	2.5	2.3	39	0.0054	22	0	5	15	0.908
^{110}Cd	2.35	2.29	2.2	1.9	2.2	2.3	28	0.0115	16	6	5	15	0.341
^{112}Cd	2.29	2.23	2.0	1.7	2.1	2.2	20	0.0126	12	8	11	20	0.282
^{114}Cd	2.30	2.25	2.0	1.7	2.2	2.2	22	0.0127	14	4	3	11	0.249
^{116}Cd	2.38	2.27	2.5	2.8	2.4	2.3	25	0.0028	14	2	3	10	0.306
^{118}Cd	2.39	2.29	2.6	2.6	2.6	2.3	28	0.0045	14	0	3	9	0.312
^{120}Cd	2.38	2.31	2.7	2.7	2.6	2.3	32	0.0045	16	0	2	9	0.426
^{118}Xe	2.40	2.41	2.5	2.8	2.8	2.4	77	0.0058	16	4	10	19	0.408
^{120}Xe	2.47	2.45	2.8	3.0	2.7	2.4	133	0.0049	26	4	9	23	0.701
^{122}Xe	2.50	2.45	3.5	3.5	2.5	2.4	131	0.0040	16	0	9	16	0.731
^{124}Xe	2.48	2.43	3.6	3.7	2.4	2.4	93	0.0035	20	2	11	21	0.722
^{126}Xe	2.42	2.39	3.4	3.4	2.3	2.4	60	0.0035	12	4	9	16	0.601
^{128}Xe	2.33	2.31	3.6	3.7	2.2	2.3	32	0.0000	10	2	7	12	0.451
^{130}Xe	2.25	2.30	3.3	3.3	2.1	2.3	29	0.0007	14	0	5	11	0.477
^{132}Xe	2.16	2.03	2.8	2.0	1.9	2.0	9	0.0000	6	0	5	7	0.374
^{134}Xe	2.04	1.87	1.9	1.6	1.9	1.9	5	0.0000	6	0	5	7	0.216
^{130}Ba	2.52	2.45	3.3	3.3	2.5	2.4	140	0.0043	12	0	6	11	0.392
^{132}Ba	2.43	2.37	3.2	3.2	2.2	2.4	50	0.0037	14	0	8	14	0.763

Πίνακας 4.4: (συνέχεια)

πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	\tilde{B}	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{134}Ba	2.32	2.20	2.9	2.8	1.9	2.2	18	0.0000	8	0	4	7	0.344
^{136}Ba	2.28	2.00	1.9	1.9	1.9	2.0	8	0.0002	6	0	2	4	0.192
^{142}Ba	2.32	2.41	4.3	4.3	4.0	2.4	79	0.0021	14	0	2	8	0.591
^{134}Ce	2.56	2.42	3.7	3.9	2.4	2.4	88	0.0030	28	2	8	22	0.882
^{136}Ce	2.38	2.28	1.9	1.9	2.0	2.3	27	0.0105	16	0	3	10	0.546
^{138}Ce	2.32	2.13	1.9	1.9	1.9	2.1	13	0.0083	14	0	2	8	0.350
^{140}Nd	2.33	2.09	1.8	1.8	1.9	2.1	11	0.0073	6	0	2	4	0.168
^{148}Nd	2.49	2.42	3.0	3.3	4.1	2.4	90	0.0042	12	8	4	13	0.719
^{140}Sm	2.35	2.36	1.9	1.9	2.7	2.4	44	0.0115	8	0	2	5	0.161
^{142}Sm	2.33	2.16	1.9	1.9	2.2	2.2	15	0.0089	8	0	2	5	0.114
^{142}Gd	2.35	2.33	2.7	2.6	1.9	2.3	35	0.0054	16	0	2	9	0.290
^{144}Gd	2.35	2.35	2.5	2.5	2.5	2.3	41	0.0065	6	0	2	4	0.108
^{152}Gd	2.19	2.34	1.8	1.9	3.2	2.3	40	0.0116	16	10	7	19	0.382
^{154}Dy	2.23	2.40	2.0	1.7	3.1	2.4	67	0.0124	26	10	7	24	0.948
^{156}Er	2.32	2.38	2.7	2.7	2.7	2.4	56	0.0062	20	4	5	16	0.357
^{186}Pt	2.56	2.47	2.5	3.6	3.2	2.5	249	0.0035	26	6	10	25	0.791
^{188}Pt	2.53	2.43	3.0	3.2	2.3	2.4	100	0.0047	16	2	4	12	0.455
^{190}Pt	2.49	2.37	3.1	3.2	2.0	2.4	49	0.0038	18	2	6	15	0.538
^{192}Pt	2.48	2.38	3.8	3.8	1.9	2.4	53	0.0021	10	0	8	12	0.698
^{194}Pt	2.47	2.39	3.9	3.9	1.9	2.4	60	0.0023	10	4	5	11	0.688
^{196}Pt	2.47	2.38	3.2	3.1	1.9	2.4	54	0.0043	10	2	6	11	0.676
^{198}Pt	2.42	2.25	2.2	2.3	1.9	2.3	23	0.0059	6	2	4	7	0.372
^{200}Pt	2.35	2.00	2.4	1.9	1.8	2.0	8	0.0000	4	0	4	5	0.342

Πίνακας 4.5: Σύγκριση των θεωρητικών προβλέψεων της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό του Kratzer για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες με τα πειραματικά δεδομένα [87] των σπάνιων γαιών και των ακτινίδων με $R_{4/2} > 2.9$ και γνωστές τις καταστάσεις 0_2^+ και 2_1^+ . Οι λόγοι $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, όπως επίσης και οι κατώτατες καταστάσεις των ζωνών β και γ , κανονικοποιημένες στη κατάσταση 2_1^+ αναφερόμενες ως $R_{0/2} = E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ και $R_{2/2} = E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ αντίστοιχα. Οι τροχιακές στροφορμές των υψηλότερων επιπέδων της βασικής ζώνης, της ζώνης β και της γ που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή rms αναφέρονται ως L_g , L_β , και L_γ αντίστοιχα. Το n υποδεικνύει το συνολικό αριθμό των επιπέδων που περιλαμβάνονται στη προσαρμογή και σ είναι το μέτρο ποιότητας της Εξ. (4.3). Δείτε το εδάφιο 4.3.2 για περαιτέρω συζήτηση.

πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	\tilde{B}	c	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{150}Nd	2.93	3.17	5.2	6.1	8.2	8.5	31	3.3	0.0033	14	6	4	13	0.655
^{152}Sm	3.01	3.22	5.6	5.5	8.9	10.0	48	3.8	0.0050	16	14	9	23	0.622
^{154}Sm	3.25	3.29	13.4	13.6	17.6	18.6	144	6.8	0.0007	16	6	7	17	0.503
^{154}Gd	3.02	3.23	5.5	5.3	8.1	8.4	62	3.0	0.0056	20	20	7	26	0.926
^{156}Gd	3.24	3.29	11.8	11.3	13.0	13.7	159	4.8	0.0014	26	12	16	34	0.973
^{158}Gd	3.29	3.30	15.0	14.8	14.9	15.2	202	5.3	0.0007	12	6	6	14	0.149
^{160}Gd	3.30	3.31	17.6	17.6	13.1	13.0	287	4.4	0.0005	16	4	8	17	0.141
^{162}Gd	3.29	3.31	19.8	19.9	12.0	11.9	261	4.0	0.0002	14	0	4	10	0.097
^{156}Dy	2.93	3.21	4.9	5.1	6.5	6.6	51	2.3	0.0060	20	10	13	27	0.832
^{158}Dy	3.21	3.27	10.0	9.9	9.6	10.1	113	3.5	0.0017	24	8	8	23	0.830
^{160}Dy	3.27	3.29	14.7	14.7	11.1	11.4	176	3.9	0.0006	28	4	23	38	0.927
^{162}Dy	3.29	3.30	17.3	15.5	11.0	11.0	247	3.7	0.0007	18	10	14	27	0.830
^{164}Dy	3.30	3.31	22.6	22.9	10.4	10.2	281	3.4	0.0000	20	0	10	19	0.199
^{166}Dy	3.31	3.30	15.0	15.0	11.2	11.2	214	3.8	0.0007	6	2	5	8	0.060
^{160}Er	3.10	3.24	7.1	7.2	6.8	6.9	65	2.4	0.0031	22	2	5	16	0.874
^{162}Er	3.23	3.27	10.7	10.6	8.8	9.7	100	3.4	0.0012	20	4	12	23	0.518
^{164}Er	3.28	3.29	13.6	12.9	9.4	9.2	179	3.1	0.0010	22	10	19	34	0.915
^{166}Er	3.29	3.29	18.1	17.6	9.8	10.0	167	3.4	0.0000	16	10	14	26	0.340
^{168}Er	3.31	3.31	15.3	14.5	10.3	10.3	384	3.4	0.0010	18	6	8	19	0.274
^{170}Er	3.31	3.32	11.3	9.9	11.9	12.4	491	4.1	0.0018	26	16	19	39	0.807
^{162}Yb	2.92	3.18	3.6	3.6	4.8	5.0	40	1.7	0.0103	20	0	4	13	0.944
^{164}Yb	3.13	3.24	7.9	7.9	7.0	7.2	72	2.5	0.0025	18	0	5	13	0.771
^{166}Yb	3.23	3.28	10.2	9.6	9.1	8.9	138	3.0	0.0020	24	10	13	29	0.974
^{168}Yb	3.27	3.29	13.2	13.0	11.2	11.3	160	3.9	0.0009	24	4	7	20	0.710
^{170}Yb	3.29	3.29	12.7	11.1	13.6	14.0	172	4.9	0.0015	20	18	17	35	0.822
^{172}Yb	3.31	3.31	13.2	12.7	18.6	18.8	246	6.6	0.0012	16	14	5	19	0.787
^{174}Yb	3.31	3.32	19.4	19.1	21.4	21.5	398	7.4	0.0005	20	4	5	16	0.208
^{176}Yb	3.31	3.31	13.9	13.5	15.4	15.5	296	5.3	0.0011	20	2	5	15	0.129
^{178}Yb	3.31	3.31	15.7	15.6	14.5	14.6	254	5.0	0.0007	6	4	2	6	0.025
^{166}Hf	2.97	3.19	4.4	4.4	5.1	5.3	44	1.8	0.0079	20	0	3	12	0.983
^{168}Hf	3.11	3.25	7.6	7.6	7.1	7.6	80	2.6	0.0029	22	4	4	16	1.043

Πίνακας 4.5: (συνέχεια)

πυρήνας	$R_{4/2}$ exp	$R_{4/2}$ th	$R_{0/2}$ exp	$R_{0/2}$ th	$R_{2/2}$ exp	$R_{2/2}$ th	\tilde{B}	c	a	L_g	L_β	L_γ	n	σ
^{170}Hf	3.19	3.27	8.7	8.8	9.5	10.0	99	3.5	0.0022	22	4	4	16	0.928
^{172}Hf	3.25	3.29	9.2	9.0	11.3	11.6	150	4.0	0.0023	26	4	6	20	0.996
^{174}Hf	3.27	3.29	9.1	7.7	13.5	13.9	154	4.9	0.0030	24	20	5	26	1.005
^{176}Hf	3.28	3.30	13.0	12.3	15.2	15.9	190	5.6	0.0012	18	10	8	21	0.569
^{178}Hf	3.29	3.29	12.9	12.9	12.6	13.0	172	4.5	0.0010	18	6	6	17	0.141
^{180}Hf	3.31	3.31	11.8	11.6	12.9	12.8	350	4.3	0.0015	12	4	5	12	0.121
^{176}W	3.22	3.27	7.8	7.3	9.6	10.3	104	3.6	0.0033	22	12	5	21	0.811
^{178}W	3.24	3.27	9.4	8.9	10.5	10.5	97	3.7	0.0021	18	14	2	17	0.356
^{180}W	3.26	3.28	14.6	14.6	10.8	11.4	118	4.0	0.0001	24	0	7	18	0.832
^{182}W	3.29	3.31	11.3	11.5	12.2	12.4	256	4.2	0.0015	18	4	6	16	0.189
^{184}W	3.27	3.29	9.0	9.1	8.1	8.1	164	2.7	0.0023	10	4	6	12	0.091
^{186}W	3.23	3.29	7.2	7.5	6.0	6.1	148	2.0	0.0033	14	4	6	14	0.156
^{176}Os	2.93	3.19	4.5	4.9	6.4	7.0	42	2.5	0.0063	18	6	5	16	0.984
^{178}Os	3.02	3.20	4.9	5.2	6.6	7.2	42	2.6	0.0056	16	6	5	15	0.636
^{180}Os	3.09	3.20	5.6	6.7	6.6	7.4	43	2.7	0.0030	14	4	7	15	0.911
^{184}Os	3.20	3.26	8.7	8.7	7.9	8.4	91	2.9	0.0022	22	0	6	16	0.452
^{186}Os	3.17	3.25	7.7	7.7	5.6	6.0	84	2.0	0.0029	14	10	13	24	0.249
^{188}Os	3.08	3.21	7.0	7.3	4.1	4.3	50	1.4	0.0023	12	2	7	13	0.214
^{190}Os	2.93	3.13	4.9	5.0	3.0	3.1	30	1.0	0.0054	10	2	6	11	0.230
^{228}Ra	3.21	3.28	11.3	11.1	13.3	13.4	116	4.8	0.0012	22	4	3	15	0.706
^{228}Th	3.24	3.28	14.4	14.2	16.8	17.1	120	6.3	0.0003	18	2	5	14	0.396
^{230}Th	3.27	3.30	11.9	11.7	14.7	14.7	213	5.1	0.0014	24	4	4	17	0.625
^{232}Th	3.28	3.31	14.8	14.5	15.9	16.0	268	5.5	0.0009	30	20	12	36	0.964
^{232}U	3.29	3.30	14.5	14.8	18.2	18.2	234	6.4	0.0008	20	10	4	18	0.244
^{234}U	3.30	3.31	18.6	19.1	21.3	21.4	307	7.5	0.0004	28	8	7	24	0.785
^{236}U	3.30	3.31	20.3	19.8	21.2	21.3	354	7.4	0.0004	30	4	5	21	0.700
^{238}U	3.30	3.31	20.6	20.2	23.6	24.4	378	8.5	0.0004	30	4	27	43	0.911
^{238}Pu	3.31	3.32	21.4	21.5	23.3	23.3	498	8.0	0.0004	26	2	4	17	0.368
^{240}Pu	3.31	3.32	20.1	19.6	26.6	26.7	452	9.3	0.0005	26	4	4	18	0.516
^{242}Pu	3.31	3.32	21.5	20.8	24.7	24.8	422	8.6	0.0004	26	2	2	15	0.402
^{248}Cm	3.31	3.32	25.0	24.3	24.2	24.2	429	8.4	0.0002	28	4	2	17	0.458
^{250}Cf	3.32	3.31	27.0	27.0	24.2	24.1	375	8.4	0.0000	8	2	4	8	0.078

Πίνακας 4.6: Κανονικοποιημένα [στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης, $E(2_1^+)$] ενεργειακά επίπεδα της βασικής ζώνης, των ζωνών β_1 και γ_1 του ^{170}Er και ^{232}Th , αποκομιζόμενα από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β για το δυναμικό Kratzer στους αξονικά παραμορφωμένους πυρήνες χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που δίνονται στο πίνακα 4.5, συγκρινόμενο με τα πειραματικά δεδομένα [87]. Δείτε το 4.3.2 για περαιτέρω συζήτηση.

	^{170}Er	^{170}Er	^{232}Th	^{232}Th	^{170}Er	^{170}Er	^{232}Th	^{232}Th		^{170}Er	^{170}Er	^{232}Th	^{232}Th
L	exp	th	exp	th	exp	th	exp	th	L	exp	th	exp	th
	gsb	gsb	gsb	gsb	β_1	β_1	β_1	β_1		γ_1	γ_1	γ_1	γ_1
0	0.00	0.00	0.00	0.00	11.3	9.9	14.8	14.5	2	11.9	12.4	15.9	16.0
2	1.00	1.00	1.00	1.00	12.2	10.8	15.7	15.4	3	12.9	13.3	16.8	16.9
4	3.31	3.32	3.28	3.31	14.0	13.0	17.7	17.5	4	14.3	14.6	18.0	18.0
6	6.88	6.92	6.75	6.86	17.2	16.3	20.7	20.7	5	15.7	16.1	19.5	19.5
8	11.64	11.75	11.28	11.56	21.3	20.8	24.8	24.9	6	17.8	18.0	21.3	21.2
10	17.51	17.73	16.75	17.31	26.5	26.4	29.8	30.1	7	19.8	20.2	23.2	23.2
12	24.41	24.79	23.03	23.95	32.5	33.0	35.5	36.1	8	22.6	22.6	25.5	25.5
14	32.28	32.82	30.04	31.35	39.1	40.5	42.1	42.8	9	25.0	25.4	27.8	28.0
16	41.04	41.73	37.65	39.35	46.2	48.8	49.4	50.1	10	28.3	28.4	30.6	30.7
18	50.62	51.39	45.84	47.82			57.4	57.8	11	31.1	31.6	33.2	33.6
20	60.91	61.70	55.52	56.61			65.8	65.8	12	35.8	35.1	36.5	36.7
22	72.20	72.55	63.69	65.60					13	39.1	38.9		
24	83.80	83.82	73.32	74.67					14	43.7	42.8		
26	95.82	95.42	83.38	83.73					15	47.2	47.0		
28			93.82	92.69					16	52.6	51.4		
30			104.56	101.49					17	56.2	55.9		
									18	62.2	60.6		
									19	66.2	65.5		

Πίνακας 4.7: Κανονικοποιημένα [στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης $E(2_1^+)$] ενεργειακά επίπεδα της βασικής ζώνης gsb, της ζώνης β_1 και της γ_1 των ισοτόπων με $N = 90$, ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd , και ^{156}Dy , αποκομιζόμενα από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με εξαρτημένη μάζα από το β για το δυναμικό του Kratzer για αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες, χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που δίνονται στο πίνακα 4.5, συγκρινόμενα με τα πειραματικά δεδομένα [87] και με τις προβλέψεις της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$ [33, 86, 93]. Το κατώτατο επίπεδο της ζώνης γ_1 στην $X(5)$, η οποία είναι μια ελεύθερη παράμετρος, έχει τεθεί ίση με τη μέση τιμή των πειραματικών τιμών. Δείτε το 4.3.2 για περαιτέρω συζήτηση.

	^{150}Nd	^{150}Nd	^{152}Sm	^{152}Sm	^{154}Gd	^{154}Gd	^{156}Dy	^{156}Dy	$X(5)$
L	exp	th	exp	th	exp	th	exp	th	
gsb									
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
4	2.93	3.17	3.01	3.22	3.02	3.23	2.93	3.21	2.90
6	5.53	6.18	5.80	6.40	5.83	6.49	5.59	6.39	5.43
8	8.68	9.64	9.24	10.24	9.30	10.48	8.82	10.20	8.48
10	12.28	13.24	13.21	14.43	13.30	14.92	12.52	14.35	12.03
12	16.27	16.72	17.64	18.70	17.75	19.56	16.59	18.58	16.04
14	20.60	19.95	22.47	22.87	22.57	24.18	20.96	22.68	20.51
16			27.61	26.81	27.66	28.63	25.57	26.55	25.44
18					33.21	32.83	30.33	30.11	30.80
20					38.86	36.71	35.27	33.34	36.61
β_1									
0	5.2	6.1	5.6	5.5	5.5	5.3	4.9	5.1	5.6
2	6.5	6.9	6.7	6.3	6.6	6.1	6.0	5.9	7.5
4	8.7	8.5	8.4	8.1	8.5	8.0	7.9	7.7	10.7
6	11.8	10.9	10.8	10.7	11.1	10.7	10.4	10.3	14.8
8			13.7	13.9	14.3	14.0	13.5	13.5	19.4
10			17.1	17.4	17.8	17.8	16.8	16.9	24.7
12			20.7	21.0	21.3	21.7			30.5
14			24.4	24.5	24.6	25.7			36.7
16					28.4	29.6			43.5
18					32.6	33.3			50.7
20					37.8	36.7			58.4
γ_1									
2	8.2	8.5	8.9	10.0	8.1	8.4	6.5	6.6	7.9
3	9.2	9.2	10.1	10.8	9.2	9.2	7.4	7.4	8.9
4	10.4	10.0	11.3	11.7	10.3	10.2	8.5	8.4	9.9
5			12.8	12.8	11.6	11.5	9.7	9.7	11.2
6			14.2	14.1	13.1	12.9	11.1	11.1	12.5

Πίνακας 4.7: (συνέχεια)

L	^{150}Nd exp	^{150}Nd th	^{152}Sm exp	^{152}Sm th	^{154}Gd exp	^{154}Gd th	^{156}Dy exp	^{156}Dy th	$X(5)$
γ_1									
7			16.0	15.5	14.7	14.5	12.5	12.6	14.0
8			17.6	17.0			14.2	14.3	15.6
9			19.5	18.6			15.9	16.0	17.4
10							17.8	17.8	19.2
11							19.7	19.7	21.2
12							21.8	21.5	23.3
13							23.8	23.3	25.4

Πίνακας 4.8: Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διαφόρους λόγους $B(E2)$ των ασταθών ως προς γ πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β (με $\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό Davidson, για τις τιμές των παραμέτρων που δείχνονται στο πίνακα 4.4.

Πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{0_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_3 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$
^{98}Ru	1.44(25)				1.62(61)	36.0(152)		
	1.82	2.62	3.42	4.22	1.82	0.0	1.36	3.60
^{100}Ru	1.45(13)				0.64(12)	41.1(52)	0.98(15)	
	1.72	2.40	3.07	3.73	1.72	0.0	1.05	10.89
^{102}Ru	1.50(24)				0.62(7)	24.8(7)	0.80(14)	
	1.78	2.54	3.28	4.01	1.78	0.0	1.27	8.70
^{104}Ru	1.18(28)				0.63(15)	35.0(84)	0.42(7)	
	1.63	2.18	2.71	3.21	1.63	0.0	0.79	22.41
^{102}Pd	1.56(19)				0.46(9)	128.8(735)		
	1.76	2.49	3.19	3.87	1.76	0.0	1.22	12.34
^{104}Pd	1.36(27)				0.61(8)	33.3(74)		
	1.74	2.45	3.15	3.85	1.74	0.0	1.11	8.13
^{106}Pd	1.63(28)				0.98(12)	26.2(31)	0.67(18)	
	1.85	2.67	3.49	4.28	1.85	0.0	1.49	5.98
^{108}Pd	1.47(20)	2.16(28)	2.99(48)		1.43(14)	16.6(18)	1.05(13)	1.90(29)
	1.75	2.45	3.12	3.75	1.75	0.0	1.20	15.82
^{110}Pd	1.71(34)				0.98(24)	14.1(22)	0.64(10)	
	1.76	2.43	3.01	3.51	1.76	0.0	1.31	26.24
^{106}Cd	1.78(25)				0.43(12)	93.0(127)		
	1.68	2.32	2.95	3.58	1.68	0.0	0.92	10.44
^{108}Cd	1.54(24)				0.64(20)	67.7(120)		
	1.85	2.69	3.52	4.35	1.85	0.0	1.49	4.06
^{110}Cd	1.68(24)				1.09(19)	48.9(78)		9.85(595)
	1.99	2.97	3.93	4.87	1.99	0.0	1.98	1.61
^{112}Cd	2.02(22)				0.50(10)	19.9(35)	1.69(48)	11.26(210)
	2.00	2.99	3.98	4.96	2.00	0.0	1.99	0.48
^{114}Cd	1.99(25)	3.83(72)	2.73(97)		0.71(24)	15.4(29)	0.88(11)	10.61(193)
	2.00	2.99	3.97	4.94	2.00	0.0	1.99	0.74
^{116}Cd	1.70(52)				0.63(46)	32.8(86)	0.02	
	1.74	2.46	3.17	3.90	1.74	0.0	1.11	4.42
^{118}Cd	>1.85						0.16(4)	
	1.71	2.39	3.06	3.74	1.71	0.0	1.00	5.88
^{118}Xe	1.11(7)	0.88(27)	0.49(20)	>0.73				
	1.67	2.28	2.85	3.39	1.67	0.0	0.95	21.93
^{120}Xe	1.16(14)	1.17(24)	0.96(22)	0.91(19)				
	1.60	2.11	2.60	3.08	1.60	0.0	0.67	21.51
^{122}Xe	1.47(38)	0.89(26)	>0.44					
	1.58	2.05	2.48	2.89	1.58	0.0	0.63	29.29

Πίνακας 4.8: (Συνέχεια)

Πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³	$\frac{0_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_3 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³
¹²⁴ Xe	1.34(24)	1.59(71)	0.63(29)	0.29(8)	0.70(19)	15.9(46)		
	1.59	2.09	2.57	3.04	1.59	0.0	0.63	20.14
¹²⁸ Xe	1.47(20)	1.94(26)	2.39(40)	2.74(114)	1.19(19)	15.9(23)		
	1.63	2.20	2.75	3.31	1.63	0.0	0.73	9.64
¹³² Xe	1.24(18)				1.77(29)	3.4(7)		
	2.00	3.00	4.00	5.00	2.00	0.0	2.00	0.00
¹³⁰ Ba	1.36(6)	1.62(15)	1.55(56)	0.93(15)				
	1.56	2.01	2.41	2.77	1.56	0.0	0.61	34.54
¹³² Ba					3.35(64)	90.7(177)		
	1.68	2.30	2.90	3.50	1.68	0.0	0.92	15.21
¹³⁴ Ba	1.55(21)				2.17(69)	12.5(41)		
	1.75	2.48	3.21	3.94	1.75	0.0	1.14	4.08
¹⁴² Ba	1.40(17)	0.56(14)						
	1.55	2.00	2.41	2.82	1.55	0.0	0.49	18.60
¹⁴⁸ Nd	1.61(13)	1.76(19)			0.25(4)	9.3(17)	0.54(6)	32.82(816)
	1.63	2.17	2.68	3.15	1.63	0.0	0.81	26.86
¹⁵² Gd	1.84(29)	2.74(81)			0.23(4)	4.2(8)	2.47(78)	
	1.98	2.92	3.81	4.65	1.98	0.0	1.95	4.51
¹⁵⁴ Dy	1.62(35)	2.05(42)	2.27(62)	1.86(69)				
	1.91	2.79	3.64	4.46	1.91	0.0	1.70	5.41
¹⁵⁶ Er	1.78(16)	1.89(36)	0.76(20)	0.88(22)				
	1.70	2.35	3.00	3.64	1.70	0.0	0.98	11.50
¹⁹² Pt	1.56(12)	1.23(55)			1.91(16)	9.5(9)		
	1.59	2.09	2.57	3.05	1.59	0.0	0.61	16.98
¹⁹⁴ Pt	1.73(13)	1.36(45)	1.02(30)	0.69(19)	1.81(25)	5.9(9)	0.01	
	1.59	2.09	2.57	3.04	1.59	0.0	0.63	19.78
¹⁹⁶ Pt	1.48(3)	1.80(23)	1.92(23)			0.4	0.07(4)	0.06(6)
	1.64	2.21	2.75	3.28	1.64	0.0	0.82	20.83
¹⁹⁸ Pt	1.19(13)	>1.78			1.16(23)	1.2(4)	0.81(22)	1.56(126)
	1.82	2.60	3.36	4.08	1.82	0.0	1.41	10.09

Πίνακας 4.9: Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διάφορους λόγους $B(E2)$ αξονικά συμμετρικών επιμηκών πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β (με $\delta = \lambda = 0$) στο δυναμικό Davidson, για τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στο πίνακα 4.2.

πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_\beta \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\beta \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\beta \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$
^{154}Sm	1.40(5)	1.67(7)	1.83(11)	1.81(11)	5.4(13)		25(6)	18.4(34)	
	1.47	1.69	1.87	2.06	26.7	50.0	150	47.5	69.6
^{156}Gd	1.41(5)	1.58(6)	1.71(10)	1.68(9)	3.4(3)	18(2)	22(2)	25.0(15)	38.7(24)
	1.48	1.73	1.95	2.18	29.7	59.1	191	62.5	92.4
^{158}Gd	1.46(5)		1.67(16)	1.72(16)	1.6(2)	0.4(1)	7.0(8)	17.2(20)	30.3(45)
	1.46	1.66	1.82	1.98	25.7	45.9	127	64.0	93.0
^{158}Dy	1.45(10)	1.86(12)	1.86(38)	1.75(28)	12(3)	19(4)	66(16)	32.2(78)	103.8(258)
	1.50	1.78	2.04	2.31	30.5	65.4	232	88.5	131.7
^{160}Dy	1.46(7)	1.23(7)	1.70(16)	1.69(9)	3.4(4)		8.5(10)	23.2(21)	43.8(42)
	1.46	1.68	1.85	2.03	22.9	43.5	133	78.6	114.5
^{162}Dy	1.45(7)	1.51(10)	1.74(10)	1.76(13)				0.12(1)	0.20
	1.45	1.65	1.80	1.95	23.9	42.4	116	89.8	129.8
^{164}Dy	1.30(7)	1.56(7)	1.48(9)	1.69(9)				19.1(22)	38.3(39)
	1.44	1.62	1.75	1.86	16.9	29.1	77	99.7	143.4
^{162}Er					8(7)		170(90)	32.5(28)	77.0(56)
	1.49	1.75	1.99	2.24	27.8	58.3	202	91.1	134.8
^{164}Er	1.18(13)		1.57(9)	1.64(11)				23.9(35)	52.3(72)
	1.47	1.70	1.89	2.09	28.3	53.5	162	103.8	151.2
^{166}Er	1.45(12)	1.62(22)	1.71(25)	1.73(23)				25.7(31)	45.3(54)
	1.46	1.66	1.81	1.96	20.7	38.2	111	100.0	144.8
^{168}Er	1.54(7)	2.13(16)	1.69(11)	1.46(11)				23.2(15)	41.1(31)
	1.45	1.65	1.79	1.93	27.7	47.2	120	100.6	145.1
^{170}Er			1.78(15)	1.54(11)	1.4(1)	0.2(2)	6.8(12)	17.7(9)	
	1.47	1.69	1.86	2.03	39.2	67.9	177	78.6	114.2
^{166}Yb	1.43(9)	1.53(10)	1.70(18)	1.61(80)					
	1.50	1.78	2.05	2.33	33.7	71.0	245	97.2	144.5
^{168}Yb					8.6(9)			22.0(55)	45.9(73)
	1.48	1.72	1.93	2.14	29.6	57.5	180	82.9	121.6
^{170}Yb			1.79(16)	1.77(14)	5.4(10)			13.4(34)	23.9(57)
	1.47	1.71	1.91	2.12	30.6	58.2	176	66.2	97.1
^{172}Yb	1.42(10)	1.51(14)	1.89(19)	1.77(11)	1.1(1)	3.7(6)	12(1)	6.3(6)	
	1.46	1.67	1.83	1.99	32.2	55.9	147	51.6	75.0
^{174}Yb	1.39(7)	1.84(26)	1.93(12)	1.67(12)					12.4(29)
	1.45	1.63	1.75	1.86	20.9	35.1	88	45.0	64.9

Πίνακας 4.9: (Συνέχεια)

Πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_\beta \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1^3}$ x 10 ³	$\frac{2_\beta \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1^3}$ x 10 ³	$\frac{2_\beta \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1^3}$ x 10 ³	$\frac{2_\gamma \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1^3}$ x 10 ³	$\frac{2_\gamma \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1^3}$ x 10 ³
¹⁷⁶ Yb	1.49(15)	1.63(14)	1.65(28)	1.76(18)				9.8	
	1.46	1.66	1.82	1.97	27.9	49.0	132	63.1	91.6
¹⁷⁴ Hf					14(4)		9(3)	31.6(161)	48.7(124)
	1.48	1.74	1.96	2.20	31.4	62.2	200	66.9	98.8
¹⁷⁶ Hf					5.4(11)		31(6)	21.3(26)	
	1.47	1.70	1.89	2.09	30.8	57.3	169	57.9	84.9
¹⁷⁸ Hf		1.38(9)	1.49(6)	1.62(7)	0.4(2)		2.4(9)	24.5(39)	27.7(28)
	1.47	1.69	1.88	2.07	28.4	53.1	158	73.8	107.8
¹⁸⁰ Hf	1.48(20)	1.41(15)	1.61(26)	1.55(10)				24.5(47)	32.9(56)
	1.46	1.66	1.82	1.98	34.9	59.5	151	78.4	113.4
¹⁸² W	1.43(8)	1.46(16)	1.53(14)	1.48(14)	6.6(6)	4.6(6)	13(1)	24.8(12)	49.2(24)
	1.47	1.69	1.87	2.04	32.5	58.3	162	79.9	116.2
¹⁸⁴ W	1.35(12)	1.54(9)	2.00(18)	2.45(51)	1.8(3)		24(3)	37.1(28)	70.6(51)
	1.48	1.73	1.95	2.16	40.7	75.2	216	128.3	187.3
¹⁸⁶ W	1.30(9)	1.69(12)	1.60(12)	1.36(36)				41.7(92)	91.0(201)
	1.51	1.80	2.07	2.34	46.2	91.9	289	165.7	244.5
¹⁸⁶ Os	1.45(7)	1.99(7)	1.89(11)	2.06(44)				109.4(71)	254.6(150)
	1.53	1.87	2.20	2.55	39.7	90.2	335	164.9	247.4
¹⁸⁸ Os	1.68(11)	1.75(11)	2.04(15)	2.38(32)				63.3(92)	202.5(304)
	1.54	1.89	2.25	2.63	33.9	83.9	344	229.8	345.2
²³⁰ Th	1.36(8)				5.7(26)		20(11)	15.6(59)	28.1(100)
	1.47	1.70	1.90	2.09	30.0	56.4	168	63.6	93.2
²³² Th	1.44(15)	1.65(14)	1.73(12)	1.82(15)	14(6)	2.6(13)	17(8)	14.6(28)	36.4(56)
	1.46	1.67	1.84	2.01	25.8	47.1	135	57.0	83.0
²³⁴ U								12.5(27)	21.1(44)
	1.45	1.64	1.78	1.90	20.7	36.1	97	42.7	61.8
²³⁶ U	1.42(11)	1.55(11)	1.59(17)	1.46(17)					
	1.45	1.63	1.76	1.87	19.3	33.2	87	44.7	64.5
²³⁸ U			1.45(23)	1.71(22)	1.4(6)	3.6(14)	12(5)	10.8(8)	18.9(17)
	1.45	1.63	1.75	1.86	18.9	32.3	83	37.7	54.5
²³⁸ Pu					14(4)		11(4)		
	1.44	1.62	1.73	1.84	19.1	31.7	78	41.6	59.9
²⁵⁰ Cf								6.8(17)	10.9(25)
	1.44	1.61	1.72	1.81	15.0	24.9	61	40.0	57.5

Πίνακας 4.10: Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διάφορους λόγους $B(E2)$ των ασταθών ως προς γ πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) από τη Χαμιλτονιανή του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό Kratzer, με τιμές παραμέτρων που φαίνονται στο Πίνακα 4.4.

πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{0_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_3 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$
⁹⁸ Ru	1.44(25)				1.62(61)	36.0(152)		
	1.77	2.81	4.63	8.42	1.77	0.0	1.27	27.84
¹⁰⁰ Ru	1.45(13)				0.64(12)	41.1(52)	0.98(15)	
	1.70	2.56	3.93	6.59	1.70	0.0	1.11	43.07
¹⁰² Ru	1.50(24)				0.62(7)	24.8(7)	0.80(14)	
	1.77	2.82	4.68	8.67	1.77	0.0	1.29	31.06
¹⁰⁴ Ru	1.18(28)				0.63(15)	35.0(84)	0.42(7)	
	1.60	2.20	2.95	4.00	1.60	0.0	0.68	25.59
¹⁰² Pd	1.56(19)				0.46(9)	128.8(735)		
	1.63	2.31	3.25	4.77	1.63	0.0	0.87	41.64
¹⁰⁴ Pd	1.36(27)				0.61(8)	33.3(74)		
	1.70	2.52	3.74	5.83	1.70	0.0	0.99	24.16
¹⁰⁶ Pd	1.63(28)				0.98(12)	26.2(31)	0.67(18)	
	1.74	2.66	4.13	6.83	1.74	0.0	1.12	22.91
¹⁰⁸ Pd	1.47(20)	2.16(28)	2.99(48)		1.43(14)	16.6(18)	1.05(13)	1.90(29)
	1.66	2.38	3.42	5.11	1.66	0.0	0.89	30.31
¹¹⁰ Pd	1.71(34)				0.98(24)	14.1(22)	0.64(10)	
	1.60	2.18	2.94	4.06	1.60	0.0	0.75	42.18
¹⁰⁶ Cd	1.78(25)				0.43(12)	93.0(127)		
	1.66	2.37	3.34	4.76	1.66	0.0	0.83	16.97
¹⁰⁸ Cd	1.54(24)				0.64(20)	67.7(120)		
	1.67	2.40	3.43	5.01	1.67	0.0	0.87	19.88
¹¹⁰ Cd	1.68(24)				1.09(19)	48.9(78)		9.85(595)
	1.85	3.14	5.63	11.54	1.85	0.0	1.52	20.99
¹¹² Cd	2.02(22)				0.50(10)	19.9(35)	1.69(48)	11.26(210)
	1.95	3.53	6.92	15.92	1.95	0.0	1.82	12.87
¹¹⁴ Cd	1.99(25)	3.83(72)	2.73(97)		0.71(24)	15.4(29)	0.88(11)	10.61(193)
	1.93	3.46	6.72	15.44	1.93	0.0	1.77	15.44
¹¹⁶ Cd	1.70(52)				0.63(46)	32.8(86)	0.02	
	1.69	2.47	3.52	5.05	1.69	0.0	0.90	10.02
¹¹⁸ Cd	>1.85						0.16(4)	
	1.70	2.51	3.65	5.41	1.70	0.0	0.95	13.14
¹¹⁸ Xe	1.11(7)	0.88(27)	0.49(20)	>0.73				
	1.61	2.21	3.00	4.17	1.61	0.0	0.74	34.42
¹²⁰ Xe	1.16(14)	1.17(24)	0.96(22)	0.91(19)				
	1.56	2.06	2.64	3.43	1.56	0.0	0.62	42.25
¹²² Xe	1.47(38)	0.89(26)	>0.44					
	1.54	2.00	2.52	3.17	1.54	0.0	0.54	36.27

Πίνακας 4.10: (συνέχεια)

πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_2 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{0_2 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_3 \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$
^{124}Xe	1.34(24)	1.59(71)	0.63(29)	0.29(8)	0.70(19)	15.9(46)		
	1.55	2.03	2.57	3.25	1.55	0.0	0.53	28.40
^{128}Xe	1.47(20)	1.94(26)	2.39(40)	2.74(114)	1.19(19)	15.9(23)		
	1.83	2.95	4.73	7.64	1.83	0.0	0.75	12.57
^{132}Xe	1.24(18)				1.77(29)	3.4(7)		
	2.78	7.13	17.89	43.35	2.78	0.0	2.49	0.07
^{130}Ba	1.36(6)	1.62(15)	1.55(56)	0.93(15)				
	1.54	2.01	2.54	3.22	1.54	0.0	0.56	39.43
^{132}Ba					3.35(64)	90.7(177)		
	1.61	2.20	2.94	3.95	1.61	0.0	0.66	20.59
^{134}Ba	1.55(21)				2.17(69)	12.5(41)		
	2.13	4.10	7.88	15.19	2.13	0.0	1.26	6.22
^{142}Ba	1.40(17)	0.56(14)						
	1.54	1.99	2.46	3.04	1.54	0.0	0.45	21.34
^{148}Nd	1.61(13)	1.76(19)			0.25(4)	9.3(17)	0.54(6)	32.82(816)
	1.57	2.08	2.67	3.47	1.57	0.0	0.59	30.88
^{152}Gd	1.84(29)	2.74(81)			0.23(4)	4.2(8)	2.47(78)	
	1.80	2.96	5.14	10.30	1.80	0.0	1.41	32.70
^{154}Dy	1.62(35)	2.05(42)	2.27(62)	1.86(69)				
	1.78	2.89	5.06	10.73	1.78	0.0	1.46	58.09
^{156}Er	1.78(16)	1.89(36)	0.76(20)	0.88(22)				
	1.64	2.33	3.27	4.73	1.64	0.0	0.83	28.76
^{192}Pt	1.56(12)	1.23(55)			1.91(16)	9.5(9)		
	1.57	2.09	2.68	3.44	1.57	0.0	0.54	17.79
^{194}Pt	1.73(13)	1.36(45)	1.02(30)	0.69(19)	1.81(25)	5.9(9)	0.01	
	1.56	2.07	2.63	3.34	1.56	0.0	0.52	19.45
^{196}Pt	1.48(3)	1.80(23)	1.92(23)			0.4	0.07(4)	0.06(6)
	1.61	2.21	2.97	4.04	1.61	0.0	0.69	23.11
^{198}Pt	1.19(13)	>1.78			1.16(23)	1.2(4)	0.81(22)	1.56(126)
	1.76	2.73	4.24	6.76	1.76	0.0	1.16	11.09

Πίνακας 4.11: Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων [87] (πάνω γραμμή) για διάφορους λόγους $B(E2)$ των αξονικά συμμετρικών επιμήκων πυρήνων με τις προβλέψεις (κάτω γραμμή) της Χαμιλτονιανής του Bohr με μάζα εξαρτημένη από το β ($\delta = \lambda = 0$) για το δυναμικό του Kratzer, για τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στο πίνακα 4.5. Προκειμένου να διευκολυνθούν οι συγκρίσεις για τα ισότοπα της περιοχής $N = 90$, ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd , και ^{156}Dy , με τις προβλέψεις της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$ [33, 86, 93], οι σχετικές προβλέψεις αναφέρονται στη πρώτη γραμμή του πίνακα, με τις μεταβάσεις $\gamma_1 \rightarrow gsb$ να είναι κανονικοποιημένες ως προς τη μετάβαση $2_\gamma \rightarrow 0_1$, την οποία εξισώνουμε με 100, κοντά στη μέση τιμή για τα πρώτα τρία ισότοπα της $N = 90$. Δείτε το 4.4.2 για περαιτέρω συζήτηση.

πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_\beta \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\beta \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\beta \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$
$X(5)$	1.60	1.98	2.28	2.51	21.2	82.2	366	100.0	150.0
^{150}Nd	1.52(4)	1.84(14)	2.05(13)		4.4(8)	61.7(98)	174(55)	26.1(22)	49.6(26)
	1.55	1.98	2.55	3.40	36.4	93.5	443	95.9	150.0
^{152}Sm	1.45(5)	1.70(7)	1.98(14)	2.22(25)	6.4(7)	38.2(43)	132(15)	25.1(17)	64.6(48)
	1.55	1.98	2.58	3.53	49.1	113.4	475	84.0	130.9
^{154}Sm	1.40(5)	1.67(7)	1.83(11)	1.81(11)	5.4(13)		25(6)	18.4(34)	
	1.46	1.67	1.86	2.05	24.7	45.7	136	47.8	69.9
^{154}Gd	1.56(7)	1.82(11)	1.99(12)	2.29(27)	5.5(5)	42.7(41)	125(11)	36.3(34)	78.3(69)
	1.55	1.98	2.57	3.54	55.4	122.5	486	114.7	175.6
^{156}Gd	1.41(5)	1.58(6)	1.71(10)	1.68(9)	3.4(3)	18(2)	22(2)	25.0(15)	38.7(24)
	1.47	1.69	1.90	2.13	30.8	56.5	166	70.7	103.3
^{158}Gd	1.46(5)		1.67(16)	1.72(16)	1.6(2)	0.4(1)	7.0(8)	17.2(20)	30.3(45)
	1.45	1.66	1.82	1.98	24.1	42.8	119	63.9	92.6
^{156}Dy	1.75(14)	1.34(12)	1.94(13)	2.45(21)				48.2(35)	63.0(78)
	1.56	2.03	2.70	3.83	53.2	124.3	531	151.8	232.6
^{158}Dy	1.45(10)	1.86(12)	1.86(38)	1.75(28)	12(3)	19(4)	66(16)	32.2(78)	103.8(258)
	1.48	1.73	1.98	2.28	32.5	63.0	202	97.9	143.6
^{160}Dy	1.46(7)	1.23(7)	1.70(16)	1.69(9)	3.4(4)		8.5(10)	23.2(21)	43.8(42)
	1.46	1.66	1.83	2.00	23.5	42.5	122	87.4	126.6
^{162}Dy	1.45(7)	1.51(10)	1.74(10)	1.76(13)				0.12(1)	0.20
	1.45	1.65	1.80	1.95	23.7	41.4	112	92.3	133.2
^{164}Dy	1.30(7)	1.56(7)	1.48(9)	1.69(9)				19.1(22)	38.3(39)
	1.45	1.64	1.79	1.93	23.6	40.6	107	100.4	144.7
^{162}Er					8(7)		170(90)	32.5(28)	77.0(56)
	1.48	1.73	1.97	2.25	28.9	57.1	189	100.4	147.1
^{164}Er	1.18(13)		1.57(9)	1.64(11)				23.9(35)	52.3(72)
	1.46	1.67	1.86	2.05	27.0	49.0	141	110.5	160.2
^{166}Er	1.45(12)	1.62(22)	1.71(25)	1.73(23)				25.7(31)	45.3(54)
	1.48	1.74	2.00	2.31	21.2	39.2	117		
^{168}Er	1.54(7)	2.13(16)	1.69(11)	1.46(11)				23.2(15)	41.1(31)
	1.45	1.64	1.78	1.92	27.6	46.2	116	100.6	144.9
^{170}Er			1.78(15)	1.54(11)	1.4(1)	0.2(2)	6.8(12)	17.7(9)	
	1.46	1.66	1.83	2.01	42.8	70.7	173	84.6	122.2

Πίνακας 4.11: (συνέχεια)

πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_\beta \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³	$\frac{2_\beta \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³	$\frac{2_\beta \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³	$\frac{2_\gamma \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³	$\frac{2_\gamma \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ x 10 ³
¹⁶⁶ Yb	1.43(9)	1.53(10)	1.70(18)	1.61(80)					
	1.48	1.73	1.97	2.27	35.4	66.7	206	115.2	168.2
¹⁶⁸ Yb					8.6(9)			22.0(55)	45.9(73)
	1.46	1.68	1.86	2.06	26.3	48.2	142	87.6	127.2
¹⁷⁰ Yb			1.79(16)	1.77(14)	5.4(10)			13.4(34)	23.9(57)
	1.47	1.69	1.90	2.13	31.9	58.0	168	69.4	101.3
¹⁷² Yb	1.42(10)	1.51(14)	1.89(19)	1.77(11)	1.1(1)	3.7(6)	12(1)	6.3(6)	
	1.46	1.66	1.83	2.01	29.6	51.6	139	51.0	74.2
¹⁷⁴ Yb	1.39(7)	1.84(26)	1.93(12)	1.67(12)					12.4(29)
	1.44	1.62	1.74	1.86	20.6	34.3	85	45.7	65.8
¹⁷⁶ Yb	1.49(15)	1.63(14)	1.65(28)	1.76(18)				9.8	
	1.45	1.65	1.81	1.97	28.6	49.0	128	64.5	93.4
¹⁷⁴ Hf					14(4)		9(3)	31.6(161)	48.7(124)
	1.49	1.76	2.05	2.42	47.1	87.5	264	69.7	102.9
¹⁷⁶ Hf					5.4(11)		31(6)	21.3(26)	
	1.46	1.68	1.86	2.06	29.1	52.2	148	60.3	87.8
¹⁷⁸ Hf		1.38(9)	1.49(6)	1.62(7)	0.4(2)		2.4(9)	24.5(39)	27.7(28)
	1.46	1.68	1.86	2.06	27.1	49.2	142	75.7	110.0
¹⁸⁰ Hf	1.48(20)	1.41(15)	1.61(26)	1.55(10)				24.5(47)	32.9(56)
	1.46	1.66	1.83	2.00	34.6	58.6	150	80.3	116.0
¹⁸² W	1.43(8)	1.46(16)	1.53(14)	1.48(14)	6.6(6)	4.6(6)	13(1)	24.8(12)	49.2(24)
	1.46	1.67	1.85	2.05	33.0	57.5	155	82.0	118.9
¹⁸⁴ W	1.35(12)	1.54(9)	2.00(18)	2.45(51)	1.8(3)		24(3)	37.1(28)	70.6(51)
	1.48	1.73	1.97	2.27	38.9	71.8	214	128.4	187.1
¹⁸⁶ W	1.30(9)	1.69(12)	1.60(12)	1.36(36)				41.7(92)	91.0(201)
	1.49	1.77	2.08	2.48	47.3	89.1	275	174.0	254.4
¹⁸⁶ Os	1.45(7)	1.99(7)	1.89(11)	2.06(44)				109.4(71)	254.6(150)
	1.50	1.81	2.16	2.63	39.2	81.0	288	173.5	255.9
¹⁸⁸ Os	1.68(11)	1.75(11)	2.04(15)	2.38(32)				63.3(92)	202.5(304)
	1.52	1.87	2.29	2.87	33.6	78.5	330	246.6	366.2
²³⁰ Th	1.36(8)				5.7(26)		20(11)	15.6(59)	28.1(100)
	1.46	1.68	1.86	2.07	31.4	55.6	155	66.9	97.3
²³² Th	1.44(15)	1.65(14)	1.73(12)	1.82(15)	14(6)	2.6(13)	17(8)	14.6(28)	36.4(56)
	1.45	1.65	1.80	1.96	26.0	44.9	119	61.9	89.6
²³⁴ U								12.5(27)	21.1(44)
	1.45	1.63	1.76	1.88	19.9	33.8	87	44.7	64.5
²³⁶ U	1.42(11)	1.55(11)	1.59(17)	1.46(17)					
	1.44	1.62	1.75	1.86	19.5	32.7	82	45.5	65.6
²³⁸ U			1.45(23)	1.71(22)	1.4(6)	3.6(14)	12(5)	10.8(8)	18.9(17)
	1.44	1.62	1.74	1.85	19.3	32.3	80	39.4	56.8

Πίνακας 4.11: (συνέχεια)

πυρήνας	$\frac{4_1 \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{6_1 \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{8_1 \rightarrow 6_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{10_1 \rightarrow 8_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$	$\frac{2_\beta \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\beta \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\beta \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 0_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 2_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$	$\frac{2_\gamma \rightarrow 4_1}{2_1 \rightarrow 0_1}$ $\times 10^3$
²³⁸ Pu					14(4)		11(4)			
	1.44	1.61	1.73	1.82	18.8	30.8	74	42.2	60.7	3.1
²⁵⁰ Cf								6.8(17)	10.9(25)	0.6(1)
	1.45	1.65	1.80	1.96	15.5	26.1	66			

Κεφάλαιο 5

Ροπές αδρανείας και η σχέση με το IBM

Από τα πρώτα χρόνια της Χαμιλτονιανής Bohr ήταν γνωστή η φαινομενολογικά προβληματική συμπεριφορά των ροπών αδρανείας σε σχέση με τη παραμόρφωση [7]. Η συστηματική μελέτη της Scharff-Goldhaber [20] επιβεβαίωσε την ασυμφωνία με το πείραμα για τη σχέση μεταξύ των ροπών αδρανείας \mathcal{J} και της εσωτερικής τετραπολικής ροπής (intrinsic quadrupole moment) Q_0 , $\mathcal{J} \propto Q_0^2$, όπως προβλέπεται στο πρότυπο Bohr μέσω της εξάρτησής τους με την αξονική παραμόρφωση β . Η υδροδυναμική έκφραση για την εξάρτηση κατά β^2 των ροπών αδρανείας είναι σίγουρα ασύμβατη με το πείραμα. Οι ροπές αδρανείας εκδηλώνουν μια πιο μέτρια αύξηση ως προς β και είναι αξιοσημείωτα μεγαλύτερες από ότι στη πρόβλεψη της μη περιστρεφόμενης ροής [19].

Από την Εξ. (3.22) είναι ξεκάθαρο ότι στη Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση οι ροπές αδρανείας δεν είναι ανάλογες του $\beta^2 \sin^2(\gamma - 2\pi k/3)$ αλλά του $(\beta^2/f^2(\beta)) \sin^2(\gamma - 2\pi k/3)$. Με $f(\beta) = 1 + a\beta^2$, η συνάρτηση $\beta^2/f^2(\beta)$ εικονίζεται στο σχήμα 5.1 για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου a . Παρόμοια συμπεριφορά δίνει και η $f(\beta) = 1 + a\beta$. Είναι ξεκάθαρο ότι η αύξηση των ροπών αδρανείας καθυστερείται από τη συνάρτηση $f(\beta)$, όπως αναμένεται από τα πειραματικά δεδομένα [19].

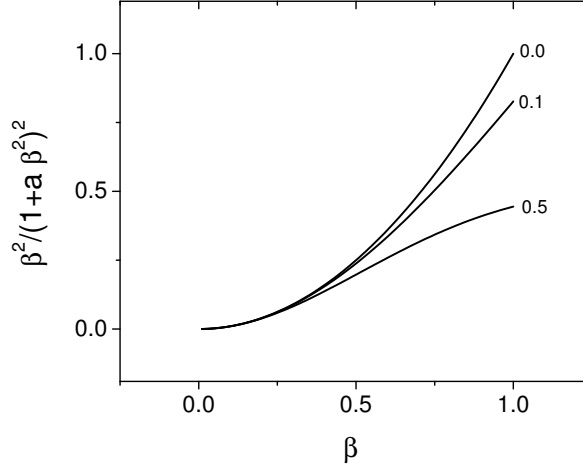
Η επίδραση της εξάρτησης της μάζας από τη παραμόρφωση μπορεί να ιδωθεί και στο σχήμα 5.2, όπου παρουσιάζονται οι ροπές αδρανείας για τις καταστάσεις της βασικής ζώνης [19]

$$\Theta(L) = \frac{2L - 1}{E(L) - E(L - 2)}, \quad (5.1)$$

κανονικοποιημένες στη $\Theta(2)$, για αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες, για τις συγκεκριμένες τιμές των $\beta_0 = 2$ και $c = 5$, και διάφορες τιμές της a . Είναι πλέον προφανές ότι η απότομη αύξηση των ροπών αδρανείας με τη στροφορμή L , καθυστερείται βαθμιαία από αυξανόμενες τιμές της a .

5.1 Τα διδάγματα από τους Quesne-Tkachuk

Από τη [2] ήταν ήδη γνωστό ότι η εξίσωση Schrodinger με γενικευμένους τελεστές της ορμής, όπως η (3.10), αναπαραγόταν πάλι για πρόβλημα σε καμπύλο χώρο. Αυτό οδήγησε



Σχήμα 5.1: Η συνάρτηση $\frac{\beta^2}{f^2(\beta)} = \frac{\beta^2}{(1+a\beta^2)^2}$, στην οποία είναι ανάλογες οι ροπές αδρανείας, ως προς τη β , για διάφορες τιμές της a

τους Quesne και Tkachuk να προτείνουν την ισοδυναμία

$$f^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{M(\mathbf{x})} = \frac{1}{g(\mathbf{x})}, \quad (5.2)$$

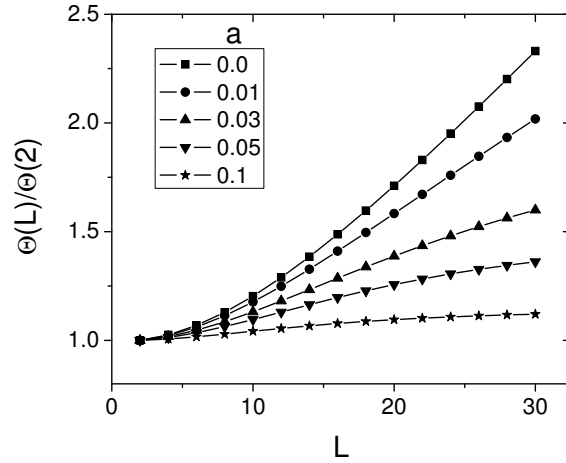
με $g(\mathbf{x})$ να είναι μια διαγώνια μήτρα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Για την ακρίβεια, έδειξαν ότι αλλάζοντας τα στοιχεία g της μετρικής του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου ως g/f^2 και κρατώντας σταθερή τη παράμετρο μάζας, η εξίσωση (3.10) αναπαράγεται ξανά για κυματοσυναρτήσεις $f^{3/2}\Psi$. Η πληρότητα του χώρου Hilbert επιβάλλει την αλλαγή του στοιχείου μήκους κατά dV/f^3 [2].

Ωστόσο αν η έκφραση g/f^2 γενικευόταν και για τα μη διαγώνια στοιχεία μιας όχι αναγκαστικά διαγώνιας μετρικής θα γραφόταν

$$\frac{g_{ij}}{f^2}, \quad (5.3)$$

δίνοντας τη σημασία του παράγοντα συμμορφοποίησης (conformal factor) στη ποσότητα $1/f^2$. Στο Παράρτημα Α.2 αποδεικνύεται ότι η γενίκευση αυτή είναι συμβατή με το φορμαλισμό της μάζας εξαρτημένης από τη θέση. Η συμβατότητα εξασφαλίζεται μέσα από τις παραμέτρους Von Roos. Με άλλα λόγια, η αντικατάσταση $\delta = \frac{n}{2}$, $\kappa = 2 - n$, $\lambda = \frac{n}{2}$, όπου n η διάσταση του χώρου, ισοδυναμεί με εξίσωση Schrodinger σε γεωμετρία n διαστάσεων με παράγοντα συμμορφοποίησης $1/f^2$ και κυματοσυναρτήσεις πολλαπλασιασμένες με $f^{n/2}$. Η αναγκαιότητα του πολλαπλασιασμού των κυματοσυναρτήσεων με το παράγοντα $f^{n/2}$ είναι καθαρά αλγεβρική προκειμένου να αναπαραχθεί εξίσωση Schrodinger με μάζα εξαρτημένη από τη θέση στο φορμαλισμό των Quesne και Tkachuk, ο οποίος εξασφαλίζει την ακριβή επιλυσιμότητά της με την υπερσυμμετρική κβαντομηχανική.

Ειδικότερα για τις 5 διαστάσεις της Χαμιλτονιανής Bohr, ο σύμμορφος μετασχηματισμός



Σχήμα 5.2: Οι ροπές αδρανείας $\Theta(L)$ για τη βασική ζώνη, κανονικοποιημένη ως προς τη $\Theta(2)$ για $\beta_0 = 2, c = 5$ και διάφορες τιμές της a .

της μετρικής ισοδυναμεί με την ακόλουθη αντικατάσταση των παραμέτρων του Von Roos

$$\delta = \frac{5}{2}, \quad \kappa = 2 - 5, \quad \lambda = \frac{5}{2}. \quad (5.4)$$

5.2 Ενσωμάτωση σε έξι διαστάσεις

Από τη δουλειά του Rowe [44], ήταν ήδη γνωστό ότι η μετρική του Bohr ορίζει ένα χώρο πέντε διαστάσεων με γεωμετρία Riemann. Ο χώρος Bohr γεννάται από το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j, \quad (5.5)$$

με $q^1 = \beta$, $q^2 = \gamma$, $q^3 = \Theta$, $q^4 = \Phi$, $q^5 = \psi$. Αυτές οι συντεταγμένες τρέχουν τον πενταδιάστατο χώρο R^5 . Ορίζεται [44] από το τανυστικό γινόμενο της ακτινικής γραμμής R_+ , η οποία αναπαριστά την ολότητα των τιμών του β , και της μοναδιαίας ακτίνας σφαίρας τεσσάρων γωνιών S_4 , η οποία αναπαριστά την ολότητα των τιμών της γωνίας γ και των τριών γωνιών Euler Θ, Φ, ψ . Δηλαδή $R^5 \sim R_+ \times S_4$. Σε ό,τι ακολουθεί, θα χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός (β, Ω_4) για τις συντεταγμένες Bohr q^i , με Ω_4 να αναπαριστά τις τέσσερις γωνίες.

Αν το $d\Omega_4$ είναι το στοιχείο μήκους της S_4 , τότε μια συμβατή μορφή του στοιχείου μήκους του R^5 με τον ορισμό του $R^5 \sim R_+ \times S_4$ είναι

$$ds^2 = d\beta^2 + \beta^2 d\Omega_4^2. \quad (5.6)$$

Το $d\Omega_4$ όντας το στοιχείο μήκους της S_4 , μπορεί να πάρει διάφορες μορφές ως προς την επιλογή του γωνιακού μέρους των \mathcal{J}_k (2.21), αντανακλώντας εν μέρει τους επιλεγόμενους δεσμούς στις γωνίες Ω_4 που γεννούν τα σχήματα των παραμορφωμένων ατομικών πυρήνων. Από την άλλη, η υπέρμετρη αύξηση των ροπών αδρανείας προκαλείται από το β^2 , το οποίο

είναι το ακτινικό μέρος όλων των \mathcal{J}_k (2.21). Η πληροφορία αυτή συρρικνώνεται στο στοιχείο μήκους (5.6), ο δεύτερος όρος του δείχνει ότι στη γεωμετρία του Bohr το β^2 πολλαπλασιάζει όλα τα στοιχεία της μήτρας του Bohr που αναφέρονται στις γωνίες. Η λαπλασιανή (2.16) του στοιχείου (5.6) παράγει τη Χαμιλτονιανή του Bohr με τη προβληματική συμπεριφορά των ροπών αδρανείας. Η μορφή (5.6) υπονοεί ότι το αίτιο της ακτινικής εξάρτησης των ροπών αδρανείας μέσω του β^2 , είναι η γεωμετρία του Bohr.

Κατά τα προηγούμενα, η μετρική Bohr δέχεται σύμμορφο μετασχηματισμό με παράγοντα συμμορφοποίησης τη συνάρτηση $f(\beta) = 1 + a\beta^2$,

$$g_{ij} \rightarrow \tilde{g}_{ij} = \frac{1}{(1 + a\beta^2)^2} g_{ij}, \quad (5.7)$$

που εξαρτάται από τη μεταβλητή β και τη παράμετρο a . Το στοιχείο μήκους ds επηρεάζεται από το παράγοντα συμμορφοποίησης (conformal factor) και δίνει ένα dl με

$$dl^2 = \frac{1}{(1 + a\beta^2)^2} (d\beta^2 + \beta^2 d\Omega_4^2). \quad (5.8)$$

Τέτοιες μορφές στοιχείων μήκους υπάρχουν σε κοσμολογικά μοντέλα όπως εκείνο των Robertson-Walker, για τη περιγραφή συμμορφοποιημένα επίπεδων (conformally flat) χώρων. Παράγονται από τη προβολή μιας υπέρ-σφαίρας στο επίπεδο, όπως μπορεί να βρεθεί σε ένα τυπικό σύγγραμμα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας [42]. Σαν μια φορμαλιστική αντιστοιχία με τη γεωμετρία των Robertson-Walker επιλέξτε ένα σύστημα συντεταγμένων πέντε γωνιών (χ, Ω_4) , με $\chi = \chi(\beta)$, το Ω_4 να είναι το ίδιο όπως και στο χώρο Bohr. Η ολότητα των τιμών των πέντε γωνιών (χ, Ω_4) σε μια κοινή ακτίνα R , ορίζει τη σφαίρα πέντε γωνιών S_5 με στοιχείο μήκους

$$dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_4^2). \quad (5.9)$$

Ένας κατάλληλος μετασχηματισμός μεταξύ της γωνίας χ και της ακτινικής μεταβλητής β ώστε να παραχθεί το στοιχείο μήκους της εξίσωσης (5.8) βρίσκεται κατά τα πρότυπα των γνωστών υπολογισμών σε γεωμετρίες Robertson-Walker [42]. Επιλέγοντας

$$R = \frac{1}{\sqrt{4a}}, \quad \sin \chi = \tilde{\beta} \sqrt{4a}, \quad (5.10)$$

τότε

$$dl^2 = \frac{d\tilde{\beta}^2}{1 - 4a\tilde{\beta}^2} + \tilde{\beta}^2 d\Omega_4^2. \quad (5.11)$$

Ο ορισμός της ακτινικής μεταβλητής β από τη σχέση

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{1 + a\beta^2}, \quad (5.12)$$

δίνει το στοιχείο μήκους (5.8). Η διερεύνηση των τιμών της $\tilde{\beta}$ στην εξίσωση (5.12) για οριακές τιμές της β , διαφωτίζει τη γεωμετρία. Για $\beta = 0$, η $\tilde{\beta}$ είναι μηδέν και για $\beta \rightarrow \infty$, η $\tilde{\beta}$ πάει στο μηδέν. Η αρχή και το τέλος της $\tilde{\beta}$ για την ολότητα των τιμών του β είναι το ίδιο σημείο.

Η γωνία χ γεωμετροποιεί αυτό το κυκλικό χαρακτηριστικό της $\tilde{\beta}$, με το διάστημα των τιμών της να είναι $0 \leq \chi \leq \pi$.

Η S_5 ζει σε έναν $5 + 1$ -διάστατο Ευκλείδιο χώρο. Σε συντεταγμένες q^u , ($u=0, \dots, 5$), η S_5 ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{4a}}$ ορίζει ένα σύνορο σε έξι διαστάσεις, το οποίο αναπαρίσταται από την εξίσωση

$$(q^0)^2 + \sum_{u=1}^5 q^u q^u = \frac{1}{4a}. \quad (5.13)$$

Τώρα, η στερεογραφική προβολή από το βόρειο πόλο της σφαίρας S_5 στο εφαπτόμενο επίπεδο είναι ισοδύναμη με το σύμμορφο μετασχηματισμό του στοιχείου μήκους του Bohr. Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το R^5 , το οποίο τρέχει ο τετραπολικός βαθμός ελευθερίας q^m , ($m = 2, 1, 0, -1, -2$). Στάνταρ σχέσεις της στερεογραφικής προβολής [43] δίνουν

$$q^u = \frac{q^m}{1 + a(\hat{q} \cdot \hat{q})}, \quad q^0 = \frac{1 - a(\hat{q} \cdot \hat{q})}{\sqrt{4a}(1 + a(\hat{q} \cdot \hat{q}))}, \quad (5.14)$$

με το εφαπτόμενο επίπεδο να τοποθετείται στο $q^0 = -\frac{1}{\sqrt{4a}}$. Τώρα, η $\tilde{\beta}$ αποκαλύπτεται ως η προβαλλόμενη ακτινική μεταβλητή από την S_5 στο εφαπτόμενο επίπεδο

$$\tilde{\beta}^2 = \sum_{u=1}^5 q^u q^u = \frac{1}{(1 + a(\hat{q} \cdot \hat{q}))^2} \sum_m q_m^2. \quad (5.15)$$

Ένα μέρος του εφαπτομένου επιπέδου χαρακτηρίζεται από τη μεταβλητή $\tilde{\beta}$. Αυτό είναι το προβαλλόμενο επίπεδο, οριζόμενο από το στοιχείο μήκους (5.11), το οποίο συγκρίνεται με το χώρο Bohr μέσω του παράγοντα συμμορφοποίησης. Για $a = 0$, το σύνορο της S_5 εκτείνεται στο άπειρο, όπου αποκομίζεται το στοιχείο μήκους του Bohr ds .

Κάθε καλά ορισμένο σύνορο σε έξι διαστάσεις μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια υπερεπιφάνεια Bohr. Αυτό αντανακλά τη πιθανότητα ύπαρξης Χαμιλτονιανών τύπου Bohr σε αυτές τις υπερεπιφάνειες. Η αρχική Χαμιλτονιανή του Bohr ανήκει στο σύνορο στο άπειρο. Από την άλλη, η ομάδα συμμετρίας της ολότητας των μετασχηματισμών της S_5 στον εαυτό της είναι η $O(6)$.

5.3 Η $O(6)$ και το IBM

Ας κατασκευάσουμε τους γεννήτορες της $O(6)$ μέσω των q^u και των συζυγών γεννητόρων της ορμής ∂_u . Αποκομίζεται ως η ειδική περίπτωση για $n = 5$ της ομάδας $O(n + 1)$ [109]. Με $u, k \neq 0$, οι γεννήτορες της $O(6)$ είναι

$$Q_{uk} = q^u \partial_k - q^k \partial_u, \quad Q_{u0} = q^u \partial_0 - q^0 \partial_u. \quad (5.16)$$

Στη [108] το IBM εξετάζεται ως ένας εξαδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής, με τα μποζόνια s και \mathbf{d} να εκφράζονται μέσω των έξι μεταβλητών και των κανονικών συζυγών τους, τις

οποίες γράφουμε ως (q^0, q^m) . Το όριο της $O(6)$ αποκαλύπτει μια δομή όπως της (5.16) σε μια γεωμετρία μιας ακτινικής μεταβλητής b , και πέντε γωνιών (δ, Ω_4) , με

$$q^0 = b \cos \delta, \quad \beta = b \sin \delta. \quad (5.17)$$

Η ενσωμάτωση του χώρου Bohr σε έξι διαστάσεις χαρακτηρίζεται από τις μεταβλητές

$$q^0 = \frac{1}{\sqrt{4a}} \cos \chi, \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{\sqrt{4a}} \sin \chi. \quad (5.18)$$

Για $b = \frac{1}{\sqrt{4a}}$, και $\tilde{\beta}$ αντί της β , $\delta = \chi$. Άρα, η S_5 είναι εκείνη του ορίου της $O(6)$ του IBM, αν στη [108] η $\tilde{\beta}$ αντικαταστήσει τη β η οποία κατά τη (5.15) επάγει τη στερεογραφική προβολή στο εφαπτόμενο επίπεδο. Ο τελεστής του αριθμού των μποζονίων [108] είναι

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{b^5} \frac{\partial}{\partial b} b^5 \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{b^2} \Lambda^2 + b^2 \right) - 3, \quad (5.19)$$

με Λ^2 τον δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της $O(6)$. Αντικαθιστώντας την β με την $\tilde{\beta}$ στη [108]

$$\Lambda^2 = - \left(\frac{1}{\sin^4 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^4 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{1}{\sin^2 \chi} \Lambda^2 \right). \quad (5.20)$$

Η επιλογή $b = \frac{1}{\sqrt{4a}}$ είναι ένας δεσμός για το τελεστή αριθμού (5.19), το ακτινικό του μέρος ακυρώνεται. Για $a = 0$, το N πάει στο άπειρο.

5.4 Χαμιλτονιανή Bohr στην S_5 και από τη προβολή της

Η Χαμιλτονιανή τύπου Bohr που ζει πάνω στην S_5 μπορεί να αποκομιστεί από τη λαπλασιανή του στοιχείου μήκους (5.9), υποθέτοντας παράμετρο μάζας B ίδια με εκείνη της αρχικής Χαμιλτονιανής [1]. Το αποτέλεσμα είναι

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{4a}{\sin^4 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^4 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{4a}{\sin^2 \chi} \Lambda^2 \right). \quad (5.21)$$

Ο Λ^2 είναι ο δεύτερης τάξης τελεστής Casimir της $SO(5)$. Η προβολή από την S_5 γεννά μια διακριτή Χαμιλτονιανή, με τη παρουσία του παράγοντα συμμορφοποίησης. Αποκομίζεται από τη λαπλασιανή του στοιχείου μήκους (5.8), το οποίο δίνει

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{(1+a\beta^2)^5}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\beta^4}{(1+a\beta^2)^3} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{(1+a\beta^2)^2}{\beta^2} \Lambda^2 \right]. \quad (5.22)$$

Εκτός της B , η πρώτη Χαμιλτονιανή είναι ο δεύτερος όρος του τελεστή αριθμού (5.19), ο οποίος περιέχει τον δεύτερης τάξης Casimir της $O(6)$ του IBM. Ξανά, οι δύο εκφράσεις συμπίπτουν αν στη [108] η $\tilde{\beta}$ αντικαταστήσει τη β .

Η τελευταία Χαμιλτονιανή (5.22), ζει στο προβαλλόμενο επίπεδο από την S_5 . Η εξάρτηση των ροπών αδρανείας ως προς τη παραμόρφωση β είναι $\frac{\beta^2}{(1+a\beta^2)^2}$. Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται και από τον υπολογισμό του Bohr [1]

$$\mathcal{J}_k = B \sum_{uu'} q_u q_{u'} (M_k^2)_{uu'} = 4B \frac{\beta^2}{(1+a\beta^2)^2} \sin^2 \left(\gamma - k \frac{2\pi}{3} \right), \quad (5.23)$$

χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες $q^u, (u \neq 0)$, της εξίσωσης (5.14). M είναι η τροχιακή στροφορμή. Οι γωνίες Ω_4 δεν επηρεάστηκαν από την ενσωμάτωση και οι μήτρες Wigner δεν αλλάζουν από την προβολή, λόγω του αναλλοίωτου της $O(5) \supset O(3)$.

Τα αποτελέσματα της προβολής από την S_5 , ή της συμμετρίας $O(6)$, μπορούν να εμφανιστούν στην εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση στον αρχικό χώρο Bohr χωρίς την έξτρα διάσταση. Αυτό υποδεικνύεται από τη τελευταία έκφραση (5.23) όπου η παράμετρος μάζας $B(\beta) = \frac{B}{(1+a\beta^2)^2}$ και οι συντεταγμένες Bohr q^m , παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Η μετριοποίηση των ροπών αδρανείας στη παρούσα περίπτωση υπονοεί ότι η σχέση τους με την εσωτερική τετραπολική ροπή Q_0 εξαρτάται από τη συμμετρία. Η αρχική Χαμιλτονιανή Bohr στον R^5 δίνει ροπές αδρανείας $\mathcal{J}_k \sim \beta^2$, ενώ εκείνη της (5.22) δίνει $\mathcal{J}_k \sim \beta^2/(1+a\beta^2)^2$. Η προβολή από την S_5 είναι ένα αποτύπωμα από την $O(6)$, και σηματοδοτεί μια νέα περιοχή συμμετρίας από ότι εκείνη της αρχικής Χαμιλτονιανής Bohr στον R^5 . Με το συνήθη τετραπολικό τελεστή του μοντέλου Bohr [57] $Q_0 \sim \beta$. Ο νέος κανόνας για τη σχέση των ροπών αδρανείας με την εσωτερική τετραπολική ροπή είναι $\mathcal{J}_k \propto Q_0^2/(1+aQ_0^2)^2$. Ωστόσο ο ακριβής κανόνας χρειάζεται την εξέταση του β -μέρους του τετραπολικού τελεστή στη νέα περιοχή συμμετρίας. Αυτό είναι πέρα από τους σκοπούς της παρούσας διατριβής, θα πρέπει να γίνει σε συμφωνία με το γεωμετρικό όριο του IBM.

5.5 E(5)

Σε ποια περιοχή του IBM τοποθετείται η Χαμιλτονιανή (5.22); Δε θα πρέπει να είναι το ακριβές όριο της $O(6)$, καθώς δεν ζει πάνω στη σφαίρα των πέντε γωνιών αλλά στο προβαλλόμενο επίπεδο. Από την άλλη, οι συμμετρίες που αποκαλύπτονται από τη προβολή της S_5 στον R^5 , η οποία περιλαμβάνει μια διαστατική αναγωγή από έξι σε πέντε διαστάσεις, μπορεί να μελετηθεί με χρήση των συστολών ομάδων (group contractions).

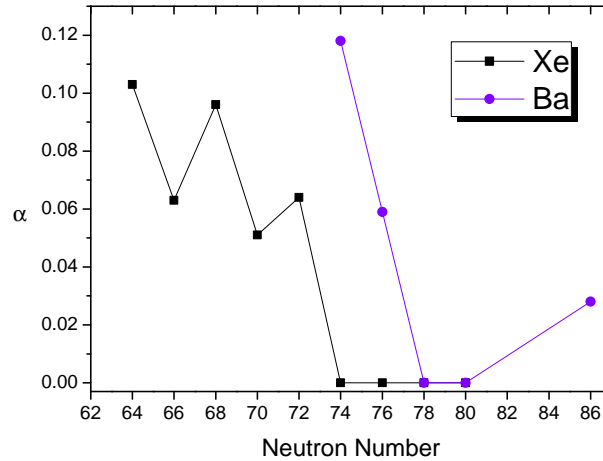
Στο σύνορο της S_5 στο άπειρο, η $O(6)$ συστέλεται [109] στην Ευκλείδεια ομάδα σε πέντε διαστάσεις, την $E(5)$. Η διαδικασία της συστολής [109] εξετάζει τον γεννήτορα Q_{u0} (5.16) στο βόρειο πόλο της S_5 , όπου $q^0 = \frac{1}{\sqrt{4a}}$ και οι υπόλοιπες $q^u = 0$,

$$Q_{u0} = -\frac{1}{\sqrt{4a}} \partial_u. \quad (5.24)$$

Αυτή η έκφραση αποκλίνει για $a = 0$. Ορίστε το τελεστή

$$\tilde{Q}_{u0} = \sqrt{4a}(q^u \partial_0 - q^0 \partial_u). \quad (5.25)$$

Τώρα, πάνω στο βόρειο πόλο και για $a = 0$, $\tilde{Q}_{u0} = -\partial_u$. Το σύνολο των γεννητόρων $\{Q_{uk}, \tilde{Q}_{u0}\}$ συστέλεται στο σύνολο $\{Q_{mn}, \partial_m\}$ για $a = 0$. Το τελευταίο σύνολο γεννά



Σχήμα 5.3: Τιμές της a για τα ισότοπα του Xe και του Ba, τα δεδομένα ελήφθησαν από το Πίνακα 4.1.

την ομάδα συμμετρίας $E(5)$ [57], η οποία είχε προταθεί στην [32] να χαρακτηρίζει το κρίσιμο σημείο για μια δεύτερης τάξης μεταβολή σχήματος/φάσης από σφαιρικούς σε ασταθείς ως προς γ πυρήνες. Αντιστοιχεί στο άπειρο πηγάδι δυναμικού για τη μεταβλητή β , στην αρχική Χαμιλτονιανή Bohr. Η Χαμιλτονιανή (5.22) για $a = 0$ συμπίπτει με εκείνη της $E(5)$ [32]. Τώρα, το κλασσικό όριο του IBM [5] στη μεταβατική περιοχή του $U(5) - O(6)$ φιλοξενεί ένα σημείο για μια δεύτερης τάξης μεταβολή φάσης. Η παρουσία της $E(5)$ για $a = 0$, το αναλλοίωτο της $O(5)$ κατά της διάρκεια της προβολής, όπως επίσης και το επιχείρημα ότι η Χαμιλτονιανή (5.22) δε πρέπει να ανταποκρίνεται στο ακριβές όριο της $O(6)$, υπονοεί τη προσαρμογή της στην μεταβατική περιοχή $U(5) - O(6)$ του IBM.

Προβλέψεις για εκδηλώσεις της $E(5)$ στους ατομικούς πυρήνες οι οποίες στηρίζονται στο φάσμα της αρχικής Χαμιλτονιανής Bohr, θα πρέπει να επανεξεταστούν. Η απουσία του παράγοντα συμμορφοποίησης στην αρχική Χαμιλτονιανή Bohr, αντανακλά την απουσία αποτυπωμάτων της $O(6)$. Η παράμετρος a καθορίζει τη παρουσία του παράγοντα συμμορφοποίησης. Το σχήμα 5.3 δείχνει τις τιμές του a για τα Xe και τα Ba. Η παράμετρος a δεν είναι μηδέν για ένα μοναδικό πυρήνα στα Xe ή τα Ba. Η $a = 0$ αντιστοιχεί ταυτόχρονα στα ^{128}Xe , ^{130}Xe , ^{132}Xe , ^{134}Xe όπως επίσης και στα ^{134}Ba και ^{136}Ba . Αυτό το σχόλιο δε θα πρέπει να ληφθεί ως μια πρόταση για υποψήφιους πυρήνες της $E(5)$. Όπως φαίνεται από την εξίσωση 3.136, το $a = 0$ δε δίνει τη Χαμιλτονιανή της $E(5)$ [32], καθώς επιβιώνει ο όρος Davidson $2\beta^2$ στο k_1 .

Η παρούσα προσέγγιση στην $E(5)$ διαφέρει από την αρχική πρόταση του απείρου πηγαδιού [32], μολονότι η συμμετρία είναι η ίδια. Αυτό φαίνεται και από την [57], στην οποία ο τελεστής Casimir της $E(5)$ χαρακτηρίζει τη συμμετρία του απείρου πηγαδιού [32]. Ο ίδιος τελεστής Casimir της $E(5)$ αναδύεται εδώ στο όριο του $a = 0$ στη Χαμιλτονιανή (5.22). Η διαφορά των δύο Χαμιλτονιανών προέρχεται από την εισαγωγή του παράγοντα συμμορφοποίησης. Η Χαμιλτονιανή (5.22) αντιστοιχεί στη πλευρά $U(5) - O(6)$ του IBM προσφέροντας μια πιο ρεαλιστική συμπεριφορά για τις ροπές αδρανείας και περιέχει το τελεστή Casimir της $E(5)$ ως

υποπερίπτωσή της στο όριο $a = 0$. Αντίθετα, η Χαμιλτονιανή του Bohr με το άπειρο πηγάδι χαρακτηρίζεται μόνο από τη συμμετρία $E(5)$ [32] και δε περιέχει σημάδια της $O(6)$ του IBM που θα ενίσχυαν τη θέση της ως συμμετρία κρίσιμου σημείου για τη μετάβαση από σφαιρικούς σε ασταθείς ως προς γ πυρήνες.

Πειραματικά μέχρι σήμερα το ^{134}Ba έχει βρεθεί να εκδηλώνει τη συμμετρία της $E(5)$ [110] βάσει του φάσματος και των ρυθμών μετάβασης που προτάθηκαν στην [32]. Η ανάδυση της $E(5)$ από την Χαμιλτονιανή (5.22) συνδέεται και με τη παρουσία της $O(6)$ του IBM αλλά και με το κρίσιμο σημείο της περιοχής $U(5) - O(6)$ για τη μεταβολή φάσης 2ης τάξης όπως θα αναλυθεί στα συμπεράσματα. Δεδομένης της διαφοράς της Χαμιλτονιανής (5.22) από τη Χαμιλτονιανή της αρχικής πρότασης της $E(5)$ [32], οι προβλέψεις τους, δηλαδή το φάσμα και οι ρυθμοί μετάβασής τους, δε θα είναι αναγκαστικά ταυτόσημες. Αφενός η εμφάνιση της $E(5)$ σε ένα συγκεκριμένο όριο μιας γενικευμένης Χαμιλτονιανής όπως είναι η (5.22) απομακρύνει τη διερεύνηση της εκδήλωσής της στη πυρηνική δομή από την εξέταση του φάσματος και των ρυθμών μετάβασης της αρχικής Χαμιλτονιανής του Bohr με το άπειρο πηγάδι δυναμικού. Αφετέρου, η εισαγωγή της παράμετρου a επιφέρει αλλαγές στο φάσμα της Χαμιλτονιανής του Bohr οι οποίες δε μπορεί να αγνοηθούν σε σχέση με το φάσμα της αρχικής πρότασης της $E(5)$ [32]. Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι η προσαρμογή των λύσεων της Χαμιλτονιανής (5.22) στους πυρήνες για τους οποίους η παράμετρος $a = 0$, θα ήταν επίσης υποψήφιοι πυρήνες της $E(5)$. Πιθανές πειραματικές διαφορές των πυρήνων αυτών σε σχέση με τους γειτονικούς τους, όπως για παράδειγμα απότομες αλλαγές στους ρυθμούς μετάβασης θα μπορούσαν να σηματοδοτούν την εκδήλωση της $E(5)$ στη πυρηνική δομή.

Η εμφάνιση της $E(5)$ στο εξαδιάστατο γεωμετρικό πλαίσιο, μέσα από τη συστολή της $O(6)$ και το όριο του $a = 0$ στη Χαμιλτονιανή (5.22), υπονοεί ότι η διερεύνηση της εκδήλωσής της στους ατομικούς πυρήνες ως συμμετρία κρίσιμου σημείου χρειάζεται επιπρόσθετα πειραματικά μέτρα από ότι εκείνα που αποκομίζονται από την αρχική Χαμιλτονιανή Bohr. Για παράδειγμα στο Σχήμα 5.3 το γεγονός ότι η παράμετρος a δεν είναι μηδέν για ένα συγκεκριμένο πυρήνα αλλά για μια σειρά ισοτόπων δείχνει ότι το κρίσιμο σημείο μπορεί να μην είναι ακριβώς ένας πυρήνας, αλλά μια γραμμή ισοτόπων αντανακλώντας τη δεύτερη τάξη της μεταβολής φάσης. Βέβαια λόγω της παρουσίας του Davidson η λειτουργικότητα αυτής της πρότασης είναι εκείνη του σηματοδότη για πιθανές νέες εκδηλώσεις της $E(5)$ στη πυρηνική δομή και σε καμία περίπτωση μια πρόταση για υποψήφιους πυρήνες της $E(5)$. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η $E(5)$ ήταν ασύμβατη με τις περιοχές συμμετρίας του IBM και οι πειραματικές ενδείξεις της στηρίζονταν αποκλειστικά στην αρχική Χαμιλτονιανή του Bohr με το άπειρο πηγάδι δυναμικού [32]. Αν και το εξαδιάστατο γεωμετρικό πλαίσιο που προτάθηκε εδώ συνδέει τη συμμετρία $O(6)$ του IBM με την $E(5)$ του Bohr, αν και φανερώνει την $E(5)$ στο όριο του $a = 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο άπειρο αριθμό μποζονίων του IBM και θα αναλυθεί στα συμπεράσματα, ζητούμενο εξακολουθεί να είναι ένα γεωμετρικό όριο του IBM μέσα από τις σύμφωνες καταστάσεις της $U(6)$ που να περιλαμβάνει τη παράμετρο a . Εν κατακλείδι, η θεωρητική και πειραματική διερεύνηση της εκδήλωσης της $E(5)$ στους ατομικούς πυρήνες δε μπορεί να εξαντλείται στις προβλέψεις της αρχικής πρότασης της [32] η οποία στηρίζεται στην αρχική Χαμιλτονιανή του Bohr και αγνοεί τις επιπτώσεις της συμμετρίας $O(6)$.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Η Χαμιλτονιανή Bohr με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση είναι ακριβώς επιλύσιμη για τα δυναμικά Davidson και Kratzer. Η φαινομενολογία τους είναι αρκετά ικανοποιητική, όπως έπεται από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4.

Το δυναμικό Davidson με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση δίνει καλά αποτελέσματα για ασταθείς ως προς γ πυρήνες και αποκλίνει για εκείνους που έχουν προταθεί για το κρίσιμο σημείο της $X(5)$. Αυτό δε προκαλεί έκπληξη καθώς η συμβατότητα του δυναμικού Davidson με τη $U(5) - O(6)$ περιοχή του IBM ήταν ήδη γνωστή από τη [56, 44]. Η εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση με τη συνάρτηση $f(\beta) = 1 + a\beta^2$ ενισχύει θεωρητικά τη συμβατότητα του Davidson με τη $U(5) - O(6)$, ακριβέστερα την επεκτείνει σε περιοχές κοντά στην $O(6)$ όπως φάνηκε στο κεφάλαιο 5. Η ερμηνεία του παράγοντα συμμορφοποίησης για τη συνάρτηση $1/f^2(\beta)$, στη γεωμετρία του Bohr σχετίζει τη παράμετρο a με την ακτίνα της S_5 αναδεικνύοντας τη συμμετρία $O(6)$ και τη συστολή της στην $E(5)$ για $a = 0$.

Ειδικότερα μέσα από τη φορμαλιστική αντιστοιχία με το κοσμολογικό πρότυπο των Robertson-Walker το πρότυπο Bohr ενσωματώθηκε σε έξι διαστάσεις. Ο αρχικός χώρος Bohr τοποθετείται στο όριο της άπειρης ακτίνας μιας σφαίρας πέντε γωνιών. Η Χαμιλτονιανή Bohr επαναθεμελιώνεται πάνω στη σφαίρα των πέντε γωνιών η οποία έχει τη συμμετρία $O(6)$. Η σχέση της με το όριο $O(6)$ του IBM υποδηλώνει πως το άπειρο της σφαίρας των πέντε γωνιών αντιστοιχεί στο όριο του άπειρου αριθμού μποζονίων στο IBM.

Η σφαίρα των πέντε γωνιών με πεπερασμένη ακτίνα αντιστοιχεί σε ένα δεσμό στον τελεστή αριθμού του IBM. Ο χώρος Bohr με το παράγοντα συμμορφοποίησης συμπίπτει με τη στερεογραφική προβολή της σφαίρας των πέντε γωνιών στο επαπτόμενο επίπεδο. Η επαναθεμελίωση της Χαμιλτονιανής Bohr στο προβαλλόμενο επίπεδο προσαρμόζεται στη περιοχή $U(5) - O(6)$ του IBM. Οι συνέπειές της είναι:

- (i) Η εμφάνιση της εξάρτησης της μάζας από τη παραμόρφωση στο αρχικό πρότυπο Bohr.
- (ii) Ισοδύναμα, στο προβαλλόμενο επίπεδο οι ροπές αδρανείας εκδηλώνουν μια διαφορετική εξάρτηση ως προς τη παραμόρφωση, από ότι στο αρχικό πρότυπο Bohr. Αυτό υπονοεί την ύπαρξη συμμετρο-εξαρτημένων κανόνων για τη σχέση των ροπών αδρανείας με την εσωτερική τετραπολική ροπή.
- (iii) Στο όριο της άπειρης ακτίνας της σφαίρας των πέντε γωνιών, η αναδύεται η Χαμιλτονιανή της $E(5)$. Ο νέος τρόπος της εμφάνισης της $E(5)$ αφενός προκαλεί συζήτηση για τις πιθανές εκδηλώσεις της στους ατομικούς πυρήνες. Αφετέρου συνεισφέρει θεωρητικά στη

σύνδεση του κρίσιμου σημείου για τη μεταβολή φάσης δεύτερης τάξης του IBM με την $E(5)$.

Η μελέτη των μεταβολών φάσης στο IBM, ξεκίνησαν ως μεταβολές φάσης της βασικής κατάστασης [30, 31, 5], οι οποίες συμβαίνουν στο απόλυτο μηδέν και η παράμετρος ελέγχου εμφανίζεται στη κβαντική Χαμιλτονιανή. Σήμερα ονομάζονται κβαντικές μεταβολές φάσης και σύμφωνα με το κριτήριο του Gibbs [113] η εκδήλωση του κρίσιμου σημείου απαιτεί άπειρη έκταση, ωστόσο αυτές μελετώνται σε μεσοσκοπικά συστήματα όπως οι ατομικοί πυρήνες. Η κβαντική Χαμιλτονιανή στο IBM κατάλληλη για τη μελέτη των μεταβολών φάσης είναι η [111, 112]

$$H(\zeta, \chi) = c \left[(1 - \zeta) \hat{n}_d - \frac{\zeta}{4N} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (6.1)$$

όπου $\hat{n}_d = d^\dagger \cdot \tilde{d}$ είναι ο τελεστής πληθυσμού των μποζονίων d , $\hat{Q}^x = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s) + \chi (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός τελεστής, N είναι το πλήθος των μποζονίων και c είναι ένας παράγοντας κλίμακας. Η ανωτέρω χαμιλτονιανή περιέχει τις δύο παραμέτρους ζ και χ , με τη $\zeta \in [0, 1]$ και τη $\chi \in [0, -\sqrt{7}/2 = -1.32]$. Σε αυτή τη παραμετροποίηση το όριο της $U(5)$ ανταποκρίνεται στη $\zeta = 0$, το όριο της $O(6)$ στη $\zeta = 1$, $\chi = 0$ και το όριο της $SU(3)$ στη $\zeta = 1$, $\chi = -\sqrt{7}/2$. Στο IBM το κριτήριο του Gibbs ικανοποιείται στο όριο του μεγάλου N , τότε για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ελέγχου οι ενεργειακές επιφάνειες εκδηλώνουν μη αναλυτικότητα. Μεταξύ των δυναμικών συμμετριών $U(5)$ και $SU(3)$ η μεταβολή φάσης βρέθηκε να είναι 1ης τάξης (σύμφωνα με τη ταξινόμηση κατά Ehrenfest), ενώ μεταξύ των δυναμικών συμμετριών $U(5)$ και $O(6)$ η μεταβολή φάσης αναφέρεται ως 2ας τάξεως [5].

Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου (Critical Point Symmetries) από την άλλη [32, 33], προτάθηκαν ως απλές λύσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr που εκδηλώνουν δυναμική συμμετρία πάνω στο κρίσιμο σημείο για τη μεταβολή σχήματος/φάσης. Η σχέση τους με τις κβαντικές μεταβολές φάσης είναι ένα ανοιχτό ζήτημα. Τα αποτελέσματα των εδαφίων 5.3, 5.4 και 5.5, αποκαλύπτουν τη συμμετρία $E(5)$ ως εκείνη που εκδηλώνεται στο όριο του μεγάλου N στη πλευρά $U(5) - O(6)$ του IBM, υποστηρίζοντας επιπλέον το επιχείρημα ότι αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο για τη μεταβολή φάσης 2ης τάξης του IBM λόγω του κριτηρίου του Gibbs [113]. Από την άλλη η γεωμετρική εμφάνιση της συμμετρίας $O(6)$ του IBM επανατοποθετεί τη σχέση του κλασσικού του ορίου με τη Χαμιλτονιανή του Bohr.

Το κλασσικό όριο του IBM, [26] λαμβάνεται από ένα γεωμετρικό δεσμό σε 5+1 διαστάσεις, τη στερεογραφική προβολή στις σύμφωνες καταστάσεις της $U(6)$ οι οποίες είναι συναρτήσεις των μποζονίων s και \mathbf{d} . Ο δεσμός αντανάκλα την απόρριψη των αντι-συμμετρικών αναπαραστάσεων της $U(6)$ αφήνοντας 5 βαθμούς ελευθερίας. Με αυτό το τρόπο αποκομίζονται οι 5 μεταβλητές σχήματος του Bohr και δε χρησιμοποιούνται πλέον ab initio, όπως επισήμαναν οι Van Isacker και Chen [28], στη κατασκευή Χαμιλτονιανών που περιγράφουν τα πυρηνικά σχήματα.

Ο παράγοντας συμμορφοποίησης ενσωματώνει τη γεωμετρία του Bohr σε έξι διαστάσεις και εισάγει μια κοινή εξαδιάστατη γεωμετρία για τη σχέση του κλασσικού ορίου του IBM και του προτύπου του Bohr. Οι πεντα-διάστατες υπερεπιφάνειες Bohr αντανάκλουν τουλάχιστον τις συμμετρίες του IBM οι οποίες είναι απύσες στην αρχική Χαμιλτονιανή του Bohr. Για παράδειγμα η S_5 αποκαλύπτει την $O(6)$. Υπονοείται έτσι και η πιθανότητα εκδήλωσης της $SU(3)$ του IBM, μέσα από ένα διαφορετικό σχήμα της πενταδιάστατης υπερεπιφάνειας Bohr. Η εκδήλωση των συμμετριών του IBM, και ειδικά της $O(6)$, πρέπει να εξυπηρετήσουν την εμφανή

σύγκριση των συλλογικών νουκλεονικών κινήσεων με τις ταλαντώσεις του πυρηνικού ρευστού το οποίο τοποθετείται στο άπειρο για $a = 0$. Η υπόνοια αυτή δεν ακυρώνεται από την απουσία σαφούς απόδειξης ότι, για παράδειγμα, η Χαμιλτονιανή του Bohr με τη παράμετρο a όντως αναδεικνύει φαινόμενα πεπερασμένου αριθμού συζευγμένων νουκλεονίων σθένους στο πρότυπο της υγρής σταγόνας. Η συμμετρία $O(6)$ στο IBM φανερώνει την αλληλεπίδραση ζευγών [5] και η συσχέτισή της με την S_5 , όπως συζητήθηκε στα εδάφια 5.3 και 5.4, επιτυγχάνεται μέσα από την αντιστοιχία της ακτίνας της σφαίρας S_5 με τον αριθμό μποζονίων N του IBM. Έτσι η εξαδιάστατη γεωμετρία συνεισφέρει στην εκδήλωση των φαινομένων πεπερασμένου αριθμού σωματιδίων (finite N effects) σε Χαμιλτονιανές τύπου Bohr.

Τώρα, η εισαγωγή του παράγοντα συμμορφοποίησης στο πρότυπο Bohr ορίζει το "χώρο Bohr" ως τη 5-διάστατη γεωμετρία που τοποθετείται στο σύνορο στο άπειρο του χώρου των εξι διαστάσεων. Η $O(6)$ φανερώνεται μέσα από τη στερεογραφική προβολή της S_5 στο εφαπτόμενο επίπεδο η οποία όμως δεν είναι ίδια με εκείνη των Dieperink, Scholten, Iachello [26] που δεσμεύει τις αντισυμμετρικές αναπαραστάσεις της $U(6)$. Η στερεογραφική προβολή [107] των εδαφίων 5.2 από την S_5 πρέπει να ανταποκρίνεται στο κλασσικό όριο της δυναμικής συμμετρίας $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$ του IBM. Η προτεινόμενη γεωμετρία [107] στο εδάφιο 5.2 δεν αναφέρεται στην ολότητα του κλασσικού ορίου του IBM, δηλαδή στις σύμφωνες καταστάσεις της $U(6)$. Ωστόσο, τα αποτελέσματα των εδαφίων 5.3 και 5.4 δείχνουν ότι το κενό της σύνδεσης του κλασσικού ορίου του IBM με τη Χαμιλτονιανή του Bohr μπορεί να καλυφθεί από σύμμορφους μετασχηματισμούς στη γεωμετρία του Bohr.

Αφετέρου, η γεωμετρική προσέγγιση στη σύνδεση του κλασσικού ορίου του IBM με τη Χαμιλτονιανή του Bohr, επανεξετάζει τις αρχικές αντιφάσεις του προτύπου Bohr σχετικά με τη σύγκριση των συλλογικών νουκλεονικών κινήσεων με τις ταλαντώσεις του πυρηνικού ρευστού. Το ρευστό συντίθεται από πυρηνική ύλη (nuclear matter) η οποία εξ' ορισμού επιτυγχάνεται από άπειρο αριθμό νουκλεονίων [9]. Ο χώρος Bohr είναι μια 5-διάστατη γεωμετρία στην οποία η μη περιστρεφόμενη ροή της πυρηνικής ύλης [1] αντανακλάται στη παράμετρο μάζας του Bohr. Σχήματα των πεπερασμένων ατομικών πυρήνων εκφράζονται μέσα από συγκεκριμένους δεσμούς στις μεταβλητές σχήματος, ή τις συντεταγμένες του χώρου Bohr, αλλά η αρχική αναφορά στον άπειρο αριθμό σωματιδίων είναι γεωμετρικά απύουσα. Η τοποθέτηση του χώρου Bohr στο άπειρο αποσκοπεί στη πρόταση γεωμετρικής αντιστοιχίας για τον άπειρο αριθμό πυρηνικών σωματιδίων. Οι αντιστοιχίες στο εδάφιο 5.3, δείχνουν ότι το άπειρο της S_5 συμπίπτει με το όριο του μεγάλου N στο IBM.

Όλα τα παραπάνω ήταν τα αποτελέσματα της S_5 , η οποία κατασκευάστηκε στο κεφάλαιο 5 και αποκαλύφθηκε από τη προβολή της στο εφαπτόμενο επίπεδο μέσω του παράγοντα συμμορφοποίησης που γεννάται από τη συνάρτηση $f(\beta) = 1 + a\beta^2$. Η συνάρτηση αυτή προέκυψε από το αναλλοίωτο μορφής (Shape Invariance) του ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή. Στη Χαμιλτονιανή του Bohr εφαρμόστηκε με το δυναμικό Davidson, αν και τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 5 δεν κάνουν καμία αναφορά σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή.

Ποιες θα μπορούσαν να είναι οι ενδείξεις του παράγοντα συμμορφοποίησης που γεννάται από τη συνάρτηση $f(\beta) = 1 + a\beta$; Αποκομίστηκε από το αναλλοίωτο μορφής για τη κίνηση Kepler, η οποία στη Χαμιλτονιανή του Bohr αντιστοιχεί στο δυναμικό Kratzer. Δεδομένων των καλών αποτελεσμάτων του Kratzer για τους αξονικά συμμετρικούς πυρήνες και ιδίως τους πυρήνες της $X(5)$, όπως φαίνεται στο κεφάλαιο 4, η αντίστοιχη περιοχή συμμετρίας του IBM

για τη Χαμιλτονιανή Bohr με τη συνάρτηση $f(\beta) = 1 + a\beta$, πρέπει να είναι η $U(5) - SU(3)$. Ειδικότερα, μπορεί να γίνει νύξη σχετικά με το κρίσιμο σημείο της $X(5)$ [33], κατά αναλογία με τη συστολή της $O(6)$ στην $E(5)$. Η συμμετρία κρίσιμου σημείου $E(5)$ προτάθηκε ως μια ειδική λύση της Χαμιλτονιανής του Bohr για τους ασταθείς ως προς γ πυρήνες και αντιστοιχεί στο άπειρο πηγάδι κατά την [32]. Η Χαμιλτονιανή της αποκομίστηκε γεωμετρικά [107] και στο κεφάλαιο 5 της παρούσας διατριβής μέσω της συστολής από την $O(6)$, ανταποκρινόμενη στο όριο του μεγάλου N στη πλευρά $U(5) - O(6)$ του IBM.

Από την άλλη, η $X(5)$ προτάθηκε ως μια ειδική λύση της Χαμιλτονιανής του Bohr για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες και αντιστοιχεί και αυτή στο άπειρο πηγάδι δυναμικού [33]. Η αντίστοιχη μεταβατική περιοχή του IBM είναι η $U(5) - SU(3)$. Είναι γνωστό ότι η συμμετρία $SU(3)$ συστέλεται στην $[R^5]SO(3)$ [114]. Η $[R^5]SO(3)$ διαφέρει από την $E(5)$ στο ότι δεν ικανοποιεί το αναλλοίωτο της $SO(5)$ αλλά μονάχα της $SO(3)$. Στη Χαμιλτονιανή του Bohr η $SO(5)$ περιέχει τις τρεις γωνίες *Euler* και τη γωνία γ , ενώ η $SO(3)$ μονάχα τις τρεις γωνίες *Euler*. Στους ασταθείς ως προς γ πυρήνες ο διαχωρισμός των μεταβλητών σέβεται το αναλλοίωτο της $SO(5)$, η οποία είναι υποομάδα της $E(5)$. Από την άλλη η συμμετρία $[R^5]SO(3)$ θυμίζει το χωρισμό των μεταβλητών στους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες όπου οι γωνίες *Euler* διαχωρίζονται από τη γωνία γ και έχει ως υποομάδα την $SO(3)$. Η συστολή της $SU(3)$ στην $[R^5]SO(3)$ κάνει μια νύξη πως η $X(5)$ ίσως σχετίζεται με τη συμμετρία $[R^5]SO(3)$. Απαιτείται λεπτομερέστερη ανάλυση σχετικά με τη περιοχή συμμετριών που εισάγει η συνάρτηση $f(\beta) = 1 + a\beta$ στη Χαμιλτονιανή Bohr και ειδικότερα, το όριό της για $a = 0$.

Παράρτημα Α΄

Γενίκευση της ταυτότητας της Quesne

Για ό,τι ακολουθεί, αξίζει να αναφερθεί περιεκτικά η άλγεβρα της ταυτότητας της Quesne που εκφράζει τη ποσότητα $f^\delta \nabla f^\kappa \nabla f^\lambda$ μέσω της $\sqrt{f} \nabla \sqrt{f}$. Λόγω του περιορισμού $\kappa + \delta + \lambda = 2$, έχουμε

$$f^\delta \nabla f^\kappa \nabla f^\lambda = f^\delta \nabla f^{\frac{1}{2}-\delta} f f^{\frac{1}{2}-\lambda} \nabla f^\lambda, \quad (\text{A'.1})$$

που είναι

$$[f^{1/2} \nabla + (\frac{1}{2} - \delta) f^{-1/2} (\nabla f)] f [\nabla f^{1/2} - (\frac{1}{2} - \lambda) f^{-1/2} (\nabla f)]. \quad (\text{A'.2})$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f^\delta \nabla f^\kappa \nabla f^\lambda &= \sqrt{f} \nabla f \nabla \sqrt{f} + (\lambda - \delta) \sqrt{f} (\nabla f) \nabla \sqrt{f} \\ &\quad - (\frac{1}{2} - \lambda) f \nabla [(\nabla f)] - (\frac{1}{2} - \delta) (\frac{1}{2} - \lambda) (\nabla f) (\nabla f), \end{aligned} \quad (\text{A'.3})$$

άρα και

$$\begin{aligned} f^\lambda \nabla f^\kappa \nabla f^\delta &= \sqrt{f} \nabla f \nabla \sqrt{f} + (\delta - \lambda) \sqrt{f} (\nabla f) \nabla \sqrt{f} \\ &\quad - (\frac{1}{2} - \delta) f \nabla [(\nabla f)] - (\frac{1}{2} - \lambda) (\frac{1}{2} - \delta) (\nabla f) (\nabla f). \end{aligned} \quad (\text{A'.4})$$

A'.1 Εξίσωση Schroedinger με μάζα εξαρτημένη από τη θέση σε σφαιρικές συντεταγμένες

Ο χώρος Bohr έχει τη γεωμετρία $R^5 \sim R_+ \times S_4$. Η λαπλασιανή σε αυτή τη γεωμετρία με όρους μάζας εξαρτημένους από τη θέση, όπου εδώ θα εξαρτάται από την ακτινική συντεταγμένη β , απαιτεί πρωτίστως τη γραφή της σε σφαιρικές συντεταγμένες. Η χρησιμότητα της γενίκευσης της λαπλασιανής σε σφαιρικές συντεταγμένες με όρους μάζας εξαρτημένους από την ακτινική συντεταγμένη β θα φανεί και από τη σύνδεσή της με την ενσωμάτωση του χώρου σε ανώτερες διαστάσεις μέσω του παράγοντα συμμορφοποίησης (conformal factor).

Χρειαζόμαστε αρχικά τη γενίκευση της ταυτότητας της Quesne (A'.3) για τη περίπτωση $\frac{f^\delta}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^\kappa \partial_\beta f^\lambda$.

Για $\kappa = 2 - \lambda - \delta$ έχουμε

$$\frac{f^\delta}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^\kappa \partial_\beta f^\lambda = \frac{f^\delta}{\beta^{n-1}} \partial_\beta f^{\frac{1}{2}-\delta} \beta^{n-1} f f^{\frac{1}{2}-\lambda} \partial_\beta f^\lambda, \quad (A'.5)$$

που γίνεται

$$\left[\frac{f^{1/2}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{f^{-1/2}}{\beta^{n-1}} (\partial_\beta f) \right] \beta^{n-1} f \left[\partial_\beta f^{1/2} - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) f^{-1/2} (\partial_\beta f) \right]. \quad (A'.6)$$

Η τελευταία έκφραση σπάει σε τέσσερις όρους $A + B + C + D$, που είναι οι ακόλουθοι.

Ο πρώτος όρος είναι γνωστός $A = \frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f \partial_\beta \sqrt{f}$. Ο δεύτερος όρος είναι $B = -\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f f^{-1/2} (\partial_\beta f)$. Ακολουθώντας τα βήματα της Quesne

$$B = -\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} (\partial_\beta f) \sqrt{f}. \quad (A'.7)$$

τώρα

$$B = -\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \frac{\sqrt{f} (n-1) \beta^{n-2}}{\beta^{n-1}} (\partial_\beta f) \sqrt{f} - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \sqrt{f} \partial_\beta [(\partial_\beta f)] \sqrt{f} - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \sqrt{f} (\partial_\beta f) \partial_\beta \sqrt{f}. \quad (A'.8)$$

Τελικά το B είναι

$$B = -\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \frac{(n-1)}{\beta} f (\partial_\beta f) - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) f \partial_\beta [(\partial_\beta f)] - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \sqrt{f} (\partial_\beta f) \partial_\beta \sqrt{f}. \quad (A'.9)$$

Ο τρίτος όρος C , από την Εξ. (A'.6) είναι

$$C = \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{f^{-1/2}}{\beta^{n-1}} (\partial_\beta f) \beta^{n-1} f \partial_\beta \sqrt{f} = \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \sqrt{f} (\partial_\beta f) \partial_\beta \sqrt{f}. \quad (A'.10)$$

Ο τέταρτος όρος D , από την Εξ. (A'.6) είναι

$$D = -\left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\partial_\beta f) (\partial_\beta f). \quad (A'.11)$$

Άρα η ταυτότητα της Quesne σε σφαιρικές συντεταγμένες σε n διάστατο χώρο, αποκομίζεται από την έκφραση $\frac{f^\delta}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^\kappa \partial_\beta f^\lambda = A + B + C + D$, που είναι

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f \partial_\beta \sqrt{f} \\ & - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \frac{(n-1)}{\beta} f (\partial_\beta f) - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) f \partial_\beta [(\partial_\beta f)] - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \sqrt{f} (\partial_\beta f) \partial_\beta \sqrt{f} \\ & + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \sqrt{f} (\partial_\beta f) \partial_\beta \sqrt{f} \\ & - \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\partial_\beta f) (\partial_\beta f). \end{aligned} \quad (A'.12)$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \frac{f^\delta}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^\kappa \partial_\beta f^\lambda &= \frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f \partial_\beta \sqrt{f} - \\ & \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left\{ \frac{(n-1)}{\beta} f (\partial_\beta f) + f \partial_\beta [(\partial_\beta f)] \right\} \\ & + (\lambda - \delta) \sqrt{f} (\partial_\beta f) \partial_\beta \sqrt{f} - \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) (\partial_\beta f) (\partial_\beta f). \end{aligned} \quad (A'.13)$$

Α'.2 Εξίσωση του Schroedinger σε σύμμορφες συντεταγμένες

Θα αποδειχτεί ότι η τελευταία εξίσωση μπορεί να γενικευθεί σε ένα σύμμορφο μετασχηματισμό της μετρικής

$$g_{ij} \rightarrow \tilde{g}_{ij} = \frac{g_{ij}}{f^2(\beta)}. \quad (A'.14)$$

Αυτή η γενίκευση, πέρα από την αναδυόμενη απλότητα στη κατανόηση πολύπλοκων υπολογισμών με μάζες εξαρτημένες από τη θέση, παράγει επίσης τη λογική σύνδεση με τις γενικευμένες κανονικές σχέσεις μετάθεσης. Προκύπτει ότι τέτοιου είδους σχέσεις μετάθεσης έχουν γεωμετρικό ανάλογο σε σύμμορφες συντεταγμένες όπου η μετρική του χώρου επηρεάζεται από ένα παράγοντα συμμορφοποίησης (conformal factor).

Για χώρο n διαστάσεων ο παράγοντας συμμορφοποίησης επιδρά στην ορίζουσα της μετρικής σαν $\tilde{g} = \frac{g}{f^{2n}(\beta)}$. Άρα η λαπλασιανή παίρνει τη μορφή

$$\nabla^2 = \frac{f^n}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} f^{2-n} g^{ij} \partial_j. \quad (A'.15)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, για $f = f(\beta)$ και $i, j \neq \beta$, η τελευταία έκφραση σπάει σε δύο όρους

$$\nabla^2 = \frac{f^n}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^{2-n} \partial_\beta + \frac{f^2}{\beta^{n-1}} \partial_i \beta^{n-1} g^{ij} \partial_j. \quad (A'.16)$$

Οι δύο αυτοί όροι είναι οικείοι από τους υπολογισμούς του προηγούμενου εδαφίου. Ο δεύτερος ξαναδίνει το γωνιακό μέρος της χαμιλτονιανής ως τον δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της ομάδας συμμετρίας $SO(n)$. Η εξίσωση του Schrodinger $H\Psi = E\Psi$ για αυτή τη λαπλασιανή παίρνει την ισοδύναμη ως προς τη μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση για κυματοσυναρτήσεις

$$\tilde{\Psi} = f^{\frac{n}{2}} \Psi. \quad (A'.17)$$

Δηλαδή

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + v\right) f^{\frac{n}{2}} \Psi = E f^{\frac{n}{2}} \Psi \Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} f^{-\frac{n}{2}} \nabla^2 f^{\frac{n}{2}} + v\right) \Psi = E \Psi. \quad (A'.18)$$

Τότε στη τελευταία έκφραση ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους, πετώντας τον $-\frac{\hbar^2}{2m}$ και κρατώντας μονάχα το πρώτο όρο από τη (A'.16), παίρνει τη μορφή

$$\frac{f^{\frac{n}{2}}}{\beta^{n-1}} \partial_\beta \beta^{n-1} f^{2-n} \partial_\beta f^{\frac{n}{2}}. \quad (A'.19)$$

Τούτος αναγνωρίζεται ως μια ειδική μορφή της ταυτότητας της Quesne (Α'.13) σε σφαιρικές συντεταγμένες με $\delta = n/2$, $\kappa = 2 - n$, $\lambda = n/2$.

Από την Εξ. (Α'.13) το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} \frac{f^{\frac{n}{2}}}{\beta^{n-1}} \partial_{\beta} \beta^{n-1} f^{2-n} \partial_{\beta} f^{\frac{n}{2}} &= \frac{\sqrt{f}}{\beta^{n-1}} \partial_{\beta} \beta^{n-1} f \partial_{\beta} \sqrt{f} \\ &- \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) \frac{(n-1)}{\beta} f(\partial_{\beta} f) - \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) f \partial_{\beta} [(\partial_{\beta} f)] \\ &+ \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right) \sqrt{f}(\partial_{\beta} f) \partial_{\beta} \sqrt{f} - \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) (\partial_{\beta} f)(\partial_{\beta} f). \end{aligned} \quad (\text{A'.20})$$

Πολλαπλασιασμένο με $-1/2$ δίνει

$$-\frac{\sqrt{f}}{2\beta^{n-1}} \partial_{\beta} \beta^{n-1} f \partial_{\beta} \sqrt{f} + \frac{1}{4}(1-n) \left\{ \frac{(n-1)}{\beta} f(\partial_{\beta} f) + f \partial_{\beta} [(\partial_{\beta} f)] \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) (\partial_{\beta} f)(\partial_{\beta} f). \quad (\text{A'.21})$$

Ευθέως μπορεί να δηλωθεί ότι εξίσωση Schroedinger με μάζα εξαρτημένη από τη θέση [64] για $\delta = n/2$, $\kappa = 2 - n$, $\lambda = n/2$ είναι ίδιας μορφής με μια εξίσωση Schrodinger σε χώρο n διαστάσεων δομημένο από σύμμορφη μετρική $\frac{g_{ij}}{f^2}$ για κυματοσυναρτήσεις πολλαπλασιασμένες από το παράγοντα $f^{n/2}$.

Κατ' αρχήν το γεγονός ότι ειδικές τιμές των παραμέτρων δ, λ , με το περιορισμό $\kappa + \delta + \lambda = 2$, δίνουν εξίσωση Schroedinger ισοδύναμου φυσικού συστήματος δε πρέπει να προκαλεί έκπληξη. Ο Von Roos στη [63] πρότεινε το φορμαλισμό με τις παραμέτρους "αμφιβολίας" κ, δ, λ όπως τις όρισε, ως τη πιο γενική μορφή ερμιτιανού τελεστή. Τώρα, ειδικές τιμές των παραμέτρων αμφιβολίας αναπαράγουν άλλους φορμαλισμούς [3], όπως για παράδειγμα εκείνον των BenDaniel και Duke [76] για $\delta = \lambda = 0$, εκείνον του Bastard [78] για $\lambda = 2, \delta = 0$, εκείνο των Zhu και Kroemer [79] για $\lambda = \delta = 1$ ή των Li και Kuhn [99] για $\lambda = 0, \delta = 1$. Από την άλλη ήδη οι Quesne και Tkachuk στη [2] είχαν αποδείξει ότι γενικευμένοι τελεστές της ορμής εμφανίζονται και σε καμπύλο χώρο. Ωστόσο, ο σύμμορφος μετασχηματισμός δε πρέπει να συγχέεται με τη καμπυλότητα καθώς, αφενός είναι πιο γενικός (τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν και για μη διαγώνιες μήτρες σε αντίθεση με εκείνα της [2]) αφετέρου προσφέρει τη κατηγοριοποίηση ενός νέου φυσικού συστήματος το οποίο αναδύεται μέσα από τις ειδικές τιμές των παραμέτρων κ, δ, λ . Η εξίσωση Schroedinger για πρόβλημα με μάζα εξαρτημένη από τη θέση, όπως αυτό ορίζεται από τις μελέτες των Von Roos και Quesne και Tkachuk, για $\delta = n/2, \lambda = n/2, \kappa = 2 - n$, όπου n η διάσταση του χώρου, έχει ίδια μορφή με την αντίστοιχη εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες για χώρο n διαστάσεων με μετρική υποβαλλόμενη σε σύμμορφο μετασχηματισμό $\frac{g_{ij}}{f^2}$ και κυματοσυναρτήσεις πολλαπλασιασμένες από το παράγοντα $f^{n/2}$.

Για τη χαμιλτονιανή του Bohr $n = 5$. Άρα το ακτινικό κομμάτι της χαμιλτονιανής είναι

$$\begin{aligned} &-\frac{\sqrt{f}}{2\beta^4} \partial_{\beta} \beta^4 f \partial_{\beta} \sqrt{f} + \frac{1}{4}(-4) \left\{ \frac{4}{\beta} f(\partial_{\beta} f) + f \partial_{\beta} [(\partial_{\beta} f)] \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) (\partial_{\beta} f)(\partial_{\beta} f) = \\ &-\frac{\sqrt{f}}{2\beta^4} \partial_{\beta} \beta^4 f \partial_{\beta} \sqrt{f} - \left\{ \frac{4}{\beta} f(\partial_{\beta} f) + f \partial_{\beta} [(\partial_{\beta} f)] \right\} + 2(\partial_{\beta} f)(\partial_{\beta} f). \end{aligned} \quad (\text{A'.22})$$

Άρα σε αυτή τη περίπτωση το ενεργό δυναμικό θα πρέπει να οριστεί ως

$$v_{eff} = -\left\{\frac{4}{\beta}f(\partial_{\beta}f) + f\partial_{\beta}[(\partial_{\beta}f)]\right\} + 2(\partial_{\beta}f)(\partial_{\beta}f). \quad (A'.23)$$

Είναι ευρέως γνωστό ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες, ακριβείς λύσεις αποκομίζονται για κυματοσυναρτήσεις πολλαπλασιαζόμενες από το παράγοντα $\frac{1}{\beta}$ για $n = 3$ (δηλώνοντας ένα σφαιρικό κύμα) ή από το παράγοντα $\frac{1}{\beta^2}$ για $n = 5$. Ακριβείς λύσεις στις σύμμορφες συντεταγμένες θα αποκομίζονται για κυματοσυναρτήσεις πολλαπλασιαζόμενες από το παράγοντα $\frac{f^{n/2}}{\beta^l}$, με l το δείκτη της ακριβούς διαχωρισιμότητας κάθε φορά. Όπως και στη [2], η διατήρηση της πιθανότητας επιβάλλει παράλληλα με το σύμμορφο μετασχηματισμό και το μετασχηματισμό των συντεταγμένων, το μετασχηματισμό του στοιχείου όγκου κατά $dV \rightarrow dV' = \frac{dV}{f^n}$.

Παράρτημα Β'

Υπολογισμοί στο Kratzer

Β'.1 Οι παράμετροι του Kratzer

Στη παρούσα δουλειά το δυναμικό Kratzer έχει χρησιμοποιηθεί στη μορφή της (3.92), όπου καμία ελεύθερη παράμετρος δεν εμφανίζεται στο πρώτο όρο. Αυτή η επιλογή δεν αλλάζει ούτε τους λόγους των ενεργειών, στους οποίους προσαρμόζονται οι παράμετροι \tilde{B} , a (και c για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήχεις), ούτε τους λόγους των ρυθμών μετάβασης B(E2). Αν ωστόσο αναπαρασταθούν γραφικά τα ενεργά δυναμικά για διαφορετικούς πυρήνες γίνεται αναγκαία μία επιπλέον παράμετρος η οποία καθορίζεται ξεχωριστά για κάθε πυρήνα.

Φάσματα

Η έξτρα παράμετρος στον όρο Coulomb μπορεί να εμφανιστεί θεωρώντας ότι καθορίζει τη κλίμακα τιμών του β , δηλαδή

$$\beta = \frac{\tilde{\beta}}{A}, \quad (\text{B'.1})$$

δίνοντας

$$u(\tilde{\beta}) = -\frac{A}{\tilde{\beta}} + \frac{\tilde{B}_r}{\tilde{\beta}^2}, \quad \tilde{B}_r = A^2 \tilde{B}. \quad (\text{B'.2})$$

Σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιηθεί ο δείκτης r ως ενδεικτικός των ποσοτήτων που επηρεάζονται από το μετασχηματισμό (B'.1). Η Χαμιλτονιανή του Bohr επηρεάζεται ως

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2B_r} \left[\frac{1}{\tilde{\beta}^4} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \tilde{\beta}^4 \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\tilde{\beta}^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (\text{B'.3})$$

με

$$B_r = \frac{B}{A^2}. \quad (\text{B'.4})$$

Η εξάρτηση της μάζας από τη παραμόρφωση γίνεται

$$B_r(\tilde{\beta}) = \frac{B_{0r}}{(f(\tilde{\beta}))^2}, \quad B_{0r} = \frac{B_0}{A^2}, \quad (\text{B'.5})$$

με

$$f(\tilde{\beta}) = 1 + a_r \tilde{\beta}, \quad a_r = \frac{a}{A}. \quad (\text{B'.6})$$

Από την (B'.4) είναι ξεκάθαρο ότι οι ανηγμένες ενέργειες ($\epsilon = B_0 E/\hbar^2$), γίνονται

$$\epsilon_r = B_{0r} E/\hbar^2 = \frac{\epsilon}{A^2}. \quad (\text{B'.7})$$

Τότε

$$\epsilon = A^2 \epsilon_r, \quad (\text{B'.8})$$

σε συμφωνία με την εξίσωση (11) της [46] και την (10) της [47], δείχνοντας ότι τα ενεργειακά επίπεδα αλλάζουν μέσω του παράγοντα A^2 . Άρα οι ενεργειακοί λόγοι δεν επηρεάζονται από τη παράμετρο A . Με τον ίδιο τρόπο τα ανηγμένα δυναμικά ($v = B_0 V/\hbar^2$) τώρα γίνονται

$$v_r = B_{0r} V/\hbar^2 = \frac{v}{A^2}, \quad (\text{B'.9})$$

υπονοώντας ότι

$$v = A^2 v_r. \quad (\text{B'.10})$$

Στους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες [δείτε το εδάφιο 2.2.2] κανείς λαμβάνει

$$v(\tilde{\beta}, \gamma) = u(\tilde{\beta}) + \frac{f^2}{\tilde{\beta}^2} w_r(\gamma), \quad w_r(\gamma) = A^2 w(\gamma), \quad (\text{B'.11})$$

με

$$w_r(\gamma) = \frac{1}{2} (3c_r)^2 \gamma^2, \quad c_r = A c. \quad (\text{B'.12})$$

Ομοίως στους τριαξονικούς πυρήνες με $\gamma \approx \pi/6$ [δείτε το εδάφιο 2.2.3], λαμβάνουμε

$$w_r(\gamma) = \frac{1}{4} c_r \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2, \quad c_r = A^2 c. \quad (\text{B'.13})$$

Το ενεργό δυναμικό για το Kratzer [δείτε το εδάφιο 3.6], όπου η $f(\beta) = 1 + a\beta^2$ και

$$f' = a, \quad f'' = 0, \quad (\text{B'.14})$$

παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} u_{eff} = & -\frac{1}{\beta} + \frac{\tilde{B}}{\beta^2} + (1 - \delta - \lambda) f \frac{a}{\beta} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) a^2 \\ & + \frac{f^2 + a\beta f}{\beta^2} + \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda, \end{aligned} \quad (\text{B'.15})$$

το οποίο γράφεται και ως

$$u_{eff} = -\frac{A}{\tilde{\beta}} + \frac{\tilde{B}_r}{\tilde{\beta}^2} + (1 - \delta - \lambda)f\frac{a_r}{\tilde{\beta}}A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \delta\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)a_r^2A^2 + \frac{f^2 + a_r\tilde{\beta}f}{\tilde{\beta}^2}A^2 + \frac{f^2}{2\tilde{\beta}^2}A^2\Lambda, \quad (B'.16)$$

με

$$f(\tilde{\beta}) = 1 + a_r\tilde{\beta}. \quad (B'.17)$$

Θέση ελαχίστου του δυναμικού

Θα μελετήσουμε τη θέση, β_0 , του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού (3.49). Εξισώνοντας τη παράγωγο του ενεργού δυναμικού με μηδέν βρίσκουμε εύκολα για $\delta = \lambda = 0$

$$\beta_0 = -2\frac{k_{-2}}{k_{-1}} = \frac{2 + \Lambda + 2\tilde{B}}{1 - 4a - a\Lambda}. \quad (B'.18)$$

Στη περίπτωση των ασταθών ως προς γ πυρήνων για τη βασική κατάσταση ($\tau = 0$, $L = 0$) παίρνουμε

$$\beta_0 = \frac{2 + 2\tilde{B}}{1 - 4a}. \quad (B'.19)$$

Χρησιμοποιώντας την (B'.1)

$$A = \frac{1 - 4a}{2 + 2\tilde{B}}\tilde{\beta}_0. \quad (B'.20)$$

Για τους επιμήκεις, ($L = 0$, $n_\gamma = 0$), λαμβάνουμε

$$\beta_0 = \frac{2 + 6c + 2\tilde{B}}{1 - 4a - 6ac}. \quad (B'.21)$$

Χρησιμοποιώντας την (B'.1)

$$A = \frac{1 - 4a - 6ac}{2 + 6c + 2\tilde{B}}\tilde{\beta}_0. \quad (B'.22)$$

Βάθος του ενεργού δυναμικού

Ως βάθος του ενεργού δυναμικού ορίζεται η τιμή του στη θέση του ελαχίστου του. Αντικαθιστώντας την (B'.18) στην (3.49) λαμβάνουμε

$$u_{eff}(\beta_0) = \frac{k_0}{2} - \frac{k_{-1}^2}{8k_{-2}}. \quad (B'.23)$$

Για $\delta = \lambda = 0$ παίρνει τη μορφή

$$u_{eff}(\beta_0) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{25}{4} + \Lambda\right) - \frac{(1 - 4a - a\Lambda)^2}{4 + 2\Lambda + 4\tilde{B}}. \quad (B'.24)$$

Σύγκριση με το συνήθες Kratzer

Το Kratzer σταθερής μάζας με τη παράμετρο A δίνεται στη (B'.2). Εξισώνοντας τη παράγωγο του ενεργού δυναμικού με μηδέν βρίσκουμε εύκολα τη θέση, $\tilde{\beta}_0$, του ελαχίστου του δυναμικού

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{2\tilde{B}_r}{A}, \quad (\text{B'.25})$$

το οποίο χωρίς την A παίρνει τη μορφή

$$\beta_0 = 2\tilde{B}, \quad (\text{B'.26})$$

όπου έγινε χρήση των (B'.1) και (B'.2). Βλέπουμε ότι η τελευταία έκφραση είναι σε συμφωνία με την εξίσωση (B'.18) στη περίπτωση του $a = 0$ και $\tilde{B} \gg 1$. Από το βάθος του δυναμικού

$$u(\tilde{\beta}_0) = -\frac{A^2}{4\tilde{B}_r}, \quad (\text{B'.27})$$

που απουσία του A γίνεται

$$u(\beta_0) = -\frac{1}{4\tilde{B}}, \quad (\text{B'.28})$$

με τη χρήση των εξισώσεων (B'.1) και (B'.2).

Βλέπουμε ότι αυτή η έκφραση είναι σε συμφωνία με την εξίσωση (B'.24) στη περίπτωση του $a = 0$ και $\tilde{B} \gg 1$.

Κυματοσυναρτήσεις

Οι κυματοσυναρτήσεις $\xi(\beta)$ κανονικοποιούνται μέσω της

$$\int_0^\infty \beta^4 |\xi(\beta)|^2 d\beta = 1, \quad (\text{B'.29})$$

ενώ παρουσία του A οι $\xi_r(\tilde{\beta})$ κανονικοποιούνται μέσω

$$\int_0^\infty \tilde{\beta}^4 |\xi_r(\tilde{\beta})|^2 d\tilde{\beta} = 1. \quad (\text{B'.30})$$

Από αυτές τις σχέσεις κανείς παίρνει

$$\xi_r(\tilde{\beta}) = \frac{\xi(\beta)}{A^{5/2}}. \quad (\text{B'.31})$$

Οι κυματοσυναρτήσεις $R(\beta)$ κανονικοποιούνται μέσω

$$\int_0^\infty |R(\beta)|^2 d\beta = 1, \quad (\text{B'.32})$$

ενώ οι $R_r(\tilde{\beta})$ κανονικοποιούνται μέσω της

$$\int_0^\infty |R_r(\tilde{\beta})|^2 d\tilde{\beta} = 1. \quad (\text{B'.33})$$

Από αυτές τις σχέσεις, κανείς λαμβάνει

$$R_r(\tilde{\beta}) = \frac{R(\beta)}{A^{1/2}}. \quad (\text{B'.34})$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι συμβατά με τη $\xi(\beta) = R(\beta)/\beta^2$, και τελικά δίνουν

$$\xi_r(\tilde{\beta}) = \frac{R_r(\tilde{\beta})}{\tilde{\beta}^2}. \quad (\text{B'.35})$$

Στην εξίσωση (3.113) βλέπουμε ότι η $R_0(\beta)$ συναρτάται από το $N_0\beta^{-\mu}$, ενώ από τη (3.132) βλέπουμε ότι το N_0 συναρτάται από το $a^{-\mu+\frac{1}{2}}$. Άρα

$$R_0(\beta) \propto a^{-\mu+\frac{1}{2}}\beta^{-\mu}, \quad (\text{B'.36})$$

και

$$\begin{aligned} R_{0,r}(\tilde{\beta}) \propto a_r^{-\mu+\frac{1}{2}}\tilde{\beta}^{-\mu} &= \left(\frac{a}{A}\right)^{-\mu+\frac{1}{2}} (A\beta)^{-\mu} \\ &\propto A^{-1/2}R_0(\beta), \end{aligned} \quad (\text{B'.37})$$

σε συμφωνία με τη (B'.34).

Ομοίως στη (3.7) βλέπουμε ότι η $R_n(\beta)$ συναρτάται από το $N_n\beta^{-\mu_n}$, ενώ από τη (3.133) βλέπουμε ότι η N_n συναρτάται από το $a^{-\mu_n+\frac{1}{2}}$. Άρα

$$R_n(\beta) \propto a^{-\mu_n+\frac{1}{2}}\beta^{-\mu_n}, \quad (\text{B'.38})$$

και τότε

$$\begin{aligned} R_{n,r}(\tilde{\beta}) \propto a_r^{-\mu_n+\frac{1}{2}}\tilde{\beta}^{-\mu_n} &= \left(\frac{a}{A}\right)^{-\mu_n+\frac{1}{2}} (A\beta)^{-\mu_n} \\ &\propto A^{-1/2}R_n(\beta), \end{aligned} \quad (\text{B'.39})$$

σε συμφωνία με την εξίσωση (B'.34).

Ρυθμοί Μετάβασης $B(E2)$

Οι ρυθμοί μετάβασης $B(E2)$ δίνονται από την εξίσωση (B4) της [45], στην οποία εμφανίζεται το τετράγωνο της ακτινικής ολοκλήρωσης. Το ακτινικό ολοκλήρωμα για τους ασταθείς ως προς γ πυρήνες δίνεται στην εξίσωση (116) της [40]

$$\begin{aligned} I_{n',\tau+1;n,\tau} &= \int_0^\infty \beta \xi_{n',\tau+1}(\beta) \xi_{n,\tau}(\beta) \beta^4 d\beta \\ &= \int_0^\infty \beta R_{n',\tau+1}(\beta) R_{n,\tau}(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (\text{B'.40})$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι με τη παράμετρο A το ακτινικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_r = AI. \quad (B'.41)$$

Άρα

$$B(E2)_r = A^2 B(E2). \quad (B'.42)$$

Τα ίδια προφανώς ισχύουν και για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες.

Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα στα φάσματα, που παρουσιάζονται στο εδάφιο 4.5, δεν επηρεάζονται από τη παράμετρο A , καθώς η τελευταία ακυρώνεται στον υπολογισμό των ενεργειακών λόγων, όπως δείχνει άλλωστε και η εξίσωση (B'.8), όπου όλες οι ενέργειες κλιμακώνονται από το παράγοντα A^2 . Επιπροσθέτως, τα αριθμητικά αποτελέσματα στους ρυθμούς μετάβασης $B(E2)$, που παρουσιάζονται στο εδάφιο 4.5 επίσης δεν επηρεάζονται από τη παράμετρο A όπως φάνηκε και από τη παραπάνω συζήτηση.

Η επίδραση της παραμέτρου A ωστόσο γίνεται φανερή στις εικόνες των ενεργών δυναμικών του Kratzer. Από τις εξισώσεις (B'.15) και (B'.16) είναι φανερό ότι οι αριθμητικές τιμές των ενεργών δυναμικών παραμένουν ίδιες, ασχέτως της παρουσίας της A . Τελικά, όπως φαίνεται από τη (B'.10) παραμένει ο παράγοντας A^2 .

Χωρίς τη παρουσία του A , οι τιμές της β γίνονται ανεξέλεγκτα μεγάλες δίχως να ανταποκρίνονται στις συνήθεις τιμές της. Ένας τρόπος να αποκομιστούν τιμές για τη παράμετρο A για κάθε πυρήνα είναι ο εξής. Η τιμή του A θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού να συμπίπτει με τη τιμή του β που ανταποκρίνεται στη τετραπολική παραμόρφωση του εκάστοτε πυρήνα, όπως αυτή εκδηλώνεται στο ρυθμό μετάβασης $B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+)$, από τη βασική στη πρώτη διεγερμένη κατάσταση [96]. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την εξίσωση (B'.20) για τους ασταθείς ως προς γ , ή την (B'.22) για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις.

Αριθμητικές τιμές για την A για τους ασταθείς ως προς γ πυρήνες, που φαίνονται στα σχήματα 4.9 και 4.10, παρουσιάζονται στο Πίνακα B'.1. Αντίστοιχα, αριθμητικές τιμές της A για τους επιμήκεις παραμορφωμένους πυρήνες που φαίνονται στις εικόνες 4.11, 4.12 και 4.13 παρουσιάζονται στο Πίνακα B'.2. Τα σχήματα 4.9-4.13 σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές του A . Οι τιμές του δυναμικού έχουν διαιρεθεί με το A^2 , όπως υποδεικνύεται από την εξίσωση (B'.10), ενώ η β πολλαπλασιάζεται με το A , σύμφωνα με την εξίσωση (B'.1).

Σαν ένας επιπλέον ποιοτικός έλεγχος, το βάθος κάθε δυναμικού, το οποίο απουσία της A θα επρεπε να είναι προσεγγιστικά ίσο με $-1/(4\bar{B})$ στα εν λόγω σχήματα, όπως έχει συζητηθεί παραπάνω, πρέπει να γίνει $-A^2/(4\bar{B})$. Για καλύτερη ακρίβεια, η εξίσωση (B'.24) θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί.

Τέλος ενδεικτικά σημειώνονται τα εξής για πιθανούς τρόπους προσδιορισμού της A :

1) Εφόσον τα ενεργειακά επίπεδα επηρεάζονται από το παράγοντα A^2 , όπως φαίνεται στη (B'.8), ένας τρόπος καθορισμού της A θα ήταν από τη προσαρμογή της στη πρώτη διεγερμένη κατάσταση, $E(2_1^+)$, η οποία πειραματικά είναι διαθέσιμη για πολλούς πυρήνες [97].

2) Εφόσον οι ρυθμοί μετάβασης $B(E2)$ επίσης επηρεάζονται από το παράγοντα A^2 , όπως φαίνεται στη (B'.42), ένας άλλος τρόπος καθορισμού της A θα ήταν η προσαρμογή της στο

ρυθμό μετάβασης από της βασική στη πρώτη διεγερμένη κατάσταση, $B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+)$, η οποία είναι επίσης διαθέσιμη για πληθώρα πυρήνων [96].

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται εδώ, έχει το πλεονέκτημα ότι αποφεύγει τις μονάδες, αφού η β είναι μια αδιάστατη ποσότητα.

Πίνακας B'.1: Αριθμητικές τιμές της A για τους ασταθείς ως προς γ πυρήνες των σχημάτων 4.9 και 4.10. Το β_0 είναι η θέση του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού, που υπολογίζεται από την (B'.19). Η β_{exp} είναι η τιμή της τετραπολικής παραμόρφωσης που δίνεται από τη πειραματική τιμή της $B(E2; 0_1 \rightarrow 2_1)$ [96], ενώ το A υπολογίζεται από την εξίσωση (B'.20).

Πυρήνας	β_0	β_{exp}	$10^3 A$
^{126}Xe	123.73	0.1881	1.520
^{128}Xe	66.00	0.1836	2.782
^{130}Xe	60.17	0.169	2.809
^{132}Xe	20.00	0.1409	7.045
^{134}Xe	12.00	0.119	9.917
^{130}Ba	286.86	0.2183	0.761
^{132}Ba	103.53	0.186	1.797
^{134}Ba	38.00	0.1609	4.234
^{136}Ba	18.01	0.1258	6.983

Πίνακας Β'.2: Αριθμητικές τιμές της A για τους αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες των σχημάτων 4.11, 4.12 και 4.13. Το β_0 είναι η θέση του ελαχίστου του ενεργού δυναμικού που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (Β'.21), β_{exp} είναι η τιμή της τετραπολικής παραμόρφωσης που δίνεται από τη πειραματική τιμή της $B(E2; 0_1 \rightarrow 2_1)$ [96], ενώ το A υπολογίζεται από την εξίσωση (Β'.22).

Πυρήνας	β_0	β_{exp}	$10^3 A$
^{150}Nd	90.94	0.2853	3.137
^{152}Sm	139.49	0.3064	2.197
^{154}Gd	164.23	0.3120	1.900
^{156}Gd	365.59	0.3378	0.924
^{158}Gd	449.05	0.3484	0.776
^{160}Gd	611.70	0.3534	0.578
^{156}Dy	131.89	0.2929	2.221
^{158}Dy	260.05	0.3255	1.252
^{160}Dy	383.71	0.3387	0.883
^{162}Dy	527.88	0.3430	0.650
^{164}Dy	584.40	0.3481	0.596

Β'.2 Κυματοσυναρτήσεις στο όριο $a \rightarrow 0$

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζεται το όριο των λύσεων του Kratzer με μάζα εξαρτημένη από τη παραμόρφωση όταν η παράμετρος a τείνει στο μηδέν. Οι σχετικές με το Kratzer ποσότητες k_i που επηρεάζονται για $a \rightarrow 0$ είναι οι

$$k_0 = 0, \quad k_{-1} = -2, \quad (\text{B'.43})$$

όπως επίσης και

$$\bar{K} = k_{-2} + \frac{2}{a}, \quad t = 1 + \frac{2}{a\beta}. \quad (\text{B'.44})$$

Ο τελευταίες δύο γίνονται άπειρες στο όριο $a \rightarrow 0$.

Στο πολυώνυμο Jacobi η μεταβλητή β εμφανίζεται στον παρονομαστή, $t = 1 + \frac{2}{a\beta}$, ενώ στα πολυώνυμα Lagguere της συνήθους λύσης εμφανίζεται στον αριθμητή. Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθεί τη ταυτότητα (22.5.43 της [84])

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{2n + \alpha + \beta}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, -n - \alpha; -2n - \alpha - \beta; \frac{2}{1-x}\right), \quad (\text{B'.45})$$

η οποία στη παρούσα περίπτωση δίνει

$$P_n^{(\mu_n - \frac{\bar{K}}{\mu_n}, \mu_n + \frac{\bar{K}}{\mu_n})}(t) = \binom{2\mu}{n} \frac{1}{(a\beta)^n} {}_2F_1\left(-n, \frac{\bar{K}}{\mu - n} - \mu; -2\mu; -a\beta\right). \quad (\text{B'.46})$$

Κανείς τώρα πρέπει να πραγματοποιήσει τη σύνδεση μεταξύ των υπεργεωμετρικών και των συμφυών υπεργεωμετρικών συναρτήσεων. Οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις ${}_2F_1(a, b; c; z)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (σελ. 146 της [100])

$$z(1-z)\frac{d^2\phi}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d\phi}{dz} - ab\phi = 0. \quad (B'.47)$$

Ο γραμμικός μετασχηματισμός $x = bz$ δίνει (σελ. 148 της [9])

$$x\left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left[c - (a+1)\frac{x}{b} - x\right]\frac{d\phi}{dx} - a\phi = 0. \quad (B'.48)$$

Στο όριο $b \rightarrow \infty$ δίνει την εξίσωση

$$x\frac{d^2\phi}{dx^2} + (c-x)\frac{d\phi}{dx} - a\phi = 0, \quad (B'.49)$$

που έχει λύσεις τις συμφυές υπεργεωμετρικές συναρτήσεις ${}_1F_1(a; c; x)$. Ως αποτέλεσμα, στο όριο $b \rightarrow \infty$, η υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_2F_1(a, b; c; z)$ ανάγεται στη συμφυή υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_1F_1(a; c; x)$, όπου $x = bz$.

Στη παρούσα περίπτωση εξετάζουμε την υπεργεωμετρική συνάρτηση

$${}_2F_1\left(-n, \frac{\bar{K}}{\mu-n} - \mu; -2\mu; -a\beta\right). \quad (B'.50)$$

Όπως προαναφέρθηκε στο όριο $a \rightarrow 0$ ο όρος \bar{K} γίνεται άπειρος. Τότε εφαρμόζεται η συνθήκη για τη μετάβαση από την ${}_2F_1(a, b; c; z)$ στην ${}_1F_1(a; c; x)$, δίνοντας τη

$${}_1F_1\left(-n; -2\mu; -\left(\frac{\bar{K}}{\mu-n} - \mu\right)a\beta\right) = {}_1F_1\left(-n; \Delta + 1; -\left(\frac{\bar{K}}{\mu-n} - \mu\right)a\beta\right). \quad (B'.51)$$

Μπορεί κανείς τώρα να χρησιμοποιήσει τη σχέση μεταξύ των συμφυών υπεργεωμετρικών συναρτήσεων και των πολυωνύμων Laguerre (σελ 149 της [100])

$${}_1F_1(-n; m+1; z) = \frac{n!m!}{(n+m)!}L_n^{(m)}(z), \quad (B'.52)$$

που στη παρούσα περίπτωση δίνει

$${}_1F_1\left(-n; \Delta + 1; -\left(\frac{\bar{K}}{\mu-n} - \mu\right)a\beta\right) = \frac{n!\Delta!}{(n+\Delta)!}L_n^{(\Delta)}\left(-\left(\frac{\bar{K}}{\mu-n} - \mu\right)a\beta\right). \quad (B'.53)$$

Τα n και $\mu = -\frac{1}{2}(1 + \Delta)$ παραμένουν πεπερασμένα, ενώ το $\bar{K} = k_{-2} + \frac{2}{a}$ απειρίζεται εξαιτίας του όρου $1/a$, με το k_{-2} να παραμένει πεπερασμένο. Άρα, στο όρισμα των πολυωνύμων Laguerre μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο μ ως πολύ μικρότερο από εκείνο που περιέχει το \bar{K} , ενώ μέσα στο \bar{K} μπορούμε να αγνοήσουμε το πεπερασμένο όρο k_{-2} σε σύγκριση με τον $1/a$, παίρνοντας

$${}_1F_1\left(-n; \Delta + 1; \frac{2\beta}{\frac{1}{2}(1 + \Delta) + n}\right) = \frac{n!\Delta!}{(n+\Delta)!}L_n^{(\Delta)}\left(\frac{2\beta}{\frac{1}{2}(1 + \Delta) + n}\right). \quad (B'.54)$$

Όσον αφορά το παράγοντα $f^{\frac{1}{2}(\mu_n + \frac{\bar{K}}{\mu_n} - 1)}$ στην (3.7), αξίζει να σημειωθεί ότι στο όριο $a \rightarrow 0$ ο όρος \bar{K} πάει στο άπειρο, ενώ ο άλλος όχι. Από την (B'.44) είναι πλέον φανερό ότι σε αυτό το όριο το \bar{K} μπορεί να αντικατασταθεί από το $2/a$. Άρα κανείς μπορεί να γράψει

$$F = f^{\frac{1}{2}(\mu_n + \frac{\bar{K}}{\mu_n} - 1)} \rightarrow f^{\frac{1}{a(\mu-n)}} = \left(\left(1 + \frac{\beta}{a-1} \right)^{a-1} \right)^{\frac{1}{\mu-n}}. \quad (\text{B'.55})$$

Εκμεταλευόμενοι την εξίσωση (4.2.21) της [84]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{m} \right)^m = e^z, \quad (\text{B'.56})$$

ο παραπάνω παράγοντας γίνεται

$$F = (e^\beta)^{\frac{1}{\mu-n}} = \exp \left(-\frac{\beta}{n + \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2}} \right). \quad (\text{B'.57})$$

Ασταθείς ως προς γ

Στο Kratzer σταθερής μάζας, οι κυματοσυναρτήσεις για τους ασταθείς ως προς γ -πυρήνες δίνονται [46] (μη κανονικοποιημένες) και στην [101] (κανονικοποιημένες). Με το συμβολισμό της [46] οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις γίνονται

$$\chi(x)_{\tau,n} = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+2\mu+1)}} x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-x/2} L_n^{(2\mu)}(x), \quad (\text{B'.58})$$

όπου

$$x = 2\beta\sqrt{\epsilon}, \quad \mu = \sqrt{\left(\tau + \frac{3}{2}\right)^2 + D\beta_0^2}, \quad \sqrt{\epsilon} = \frac{D\beta_0}{\mu + n + \frac{1}{2}}, \quad (\text{B'.59})$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι στη [46], η δύναμη του x εμφανίζεται ως $2\mu+1$ αντί για $\mu + \frac{1}{2}$.

Στο Kratzer με μάζα εξαρτημένη (DDM Kratzer) από τη παραμόρφωση

$$\Lambda = \tau(\tau+3) = \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} + 3 \right) = \frac{1}{4} L(L+6), \quad (\text{B'.60})$$

άρα

$$k_{-2} = 2 + \tau(\tau+3) + 2\tilde{B}, \quad \Delta = 2\sqrt{\left(\tau + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\tilde{B}}, \quad (\text{B'.61})$$

οδηγώντας στην (B'.58) το πολυώνυμο Laguerre να παίρνει τη μορφή

$$L_n^{\left(2\sqrt{\left(\tau+\frac{3}{2}\right)^2+2\tilde{B}}\right)} \left(\frac{2\beta}{\sqrt{\left(\tau+\frac{3}{2}\right)^2+2\tilde{B}+\frac{1}{2}+n}} \right). \quad (\text{B'.62})$$

Βλέπουμε ότι με την αντιστοιχία των παραμέτρων μεταξύ του DDM Kratzer και της σταθερής μάζας στην [46]

$$2\tilde{B} \rightarrow \beta_0, \quad 1 \rightarrow D\beta_0, \quad (\text{B'.63})$$

τα πολυώνυμα Laguerre στις δύο εκφράσεις είναι ταυτόσημα. Το εκθετικό της (B'.58) είναι επίσης ταυτό με εκείνο της (B'.57).

Γραμμένη στη παραμετροποίηση του DDM Kratzer η κυματοσυνάρτηση της [46] γίνεται

$$\chi(\beta)_{\tau,n} = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+2\mu+1)}} \left(\frac{2\beta}{\mu+\frac{1}{2}+n}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\beta}{\mu+\frac{1}{2}+n}\right) L_n^{(2\mu)}\left(\frac{2\beta}{\mu+\frac{1}{2}+n}\right), \quad (\text{B'.64})$$

όπου

$$\mu = \sqrt{\left(\tau + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\tilde{B}}. \quad (\text{B'.65})$$

Αξονικά συμμετρικοί επιμήχεις

Στο Kratzer σταθερής μάζας, οι κυματοσυναρτήσεις των αξονικά συμμετρικών επιμηκών πυρήνων δίνονται στην [47] (μη κανονικοποιημένες) και στη [101] (κανονικοποιημένες). Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της [47] οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις παίρνουν ξανά τη μορφή της (B'.58), αλλά με

$$x = 2\beta\sqrt{\epsilon}, \quad \mu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} + B}, \quad \sqrt{\epsilon} = \frac{A/2}{\mu + n + \frac{1}{2}}. \quad (\text{B'.66})$$

Στο DDM Kratzer έχουμε

$$\Lambda = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 6c(n_\gamma + 1), \quad c = \frac{C}{2}. \quad (\text{B'.67})$$

Αφού στην [47] χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός διαχωρισμός των μεταβλητών που εισήχθησαν στη $\Xi(5)$, θέτουμε $c = 0$. Για τη βασική ζώνη και τις ζώνες β κανείς επίσης έχει $K = 0$. Ως αποτέλεσμα λαμβάνουμε

$$k_{-2} = 2 + \frac{L(L+1)}{3} + 2\tilde{B}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3} + 2\tilde{B}}, \quad (\text{B'.68})$$

οδηγώντας στη (B'.58) το πολυώνυμο Laguerre στη μορφή

$$L_n^{\left(2\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3} + 2\tilde{B}}\right)} \left(\frac{2\beta}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3} + 2\tilde{B}} + \frac{1}{2} + n}\right). \quad (\text{B'.69})$$

Βλέπουμε ότι με την αντιστοιχία των παραμέτρων μεταξύ του DDM Kratzer και της [47]

$$2\tilde{B} \rightarrow B, \quad 2 \rightarrow A, \quad (\text{B'.70})$$

τα πολυώνυμα Laguerre στις δύο εκφράσεις γίνονται ταυτόσημα. Το εκθετικό της (B'.58) είναι επίσης ταυτόσημο με εκείνο της (B'.57).

Γραμμένες στη παραμετροποίηση του DDM οι κυματοσυναρτήσεις της [47] γίνονται ξανά όπως η (B'.64), αλλά με

$$\mu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} + 2\tilde{B}}. \quad (\text{B'.71})$$

Βιβλιογραφία

- [1] A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd. **26**, (1952), 14.
- [2] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 4267 (2004).
- [3] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, and V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 2929 (2005).
- [4] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [5] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [6] N. Bohr and J.A. Wheeler, Phys. Rev. **56**, 426, (1939).
- [7] A. Bohr and B.R. Mottelson, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, (1955), 1.
- [8] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. II: Nuclear Deformations* (Benjamin, New York, 1975).
- [9] W. Greiner and J.A. Maruhn, *Nuclear Models*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [10] J.J. Griffin and J.A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 2, (1957), 311.
- [11] B.Banerjee and D.M. Brink, Z.Physik 258, 46-55 (1973).
- [12] J. Libert, M.Girod and J.-P. Delaroche, Phys. Rev. C, **60**, 054301, (1999).
- [13] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear Theory Vol.I: Nuclear Models* (North-Holland, Amsterdam, 1975).
- [14] R. V. Jolos and P. von Brentano, Phys. Rev. C **76**, 024309 (2007).
- [15] R. V. Jolos and P. von Brentano, Phys. Rev. C **77**, 064317 (2008).
- [16] R. V. Jolos and P. von Brentano, Phys. Rev. C **78**, 064309 (2008).
- [17] R. V. Jolos and P. von Brentano, Phys. Rev. C **79**, 044310 (2009).
- [18] R. V. Jolos and P. von Brentano, Phys. Rev. C **80**, 034308 (2009).

- [19] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, Berlin, 1980).
- [20] G. Scharff-Goldhaber, C.B. Dover and A.L. Goodman, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **26**, (1976) 239-317.
- [21] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **35**, (1975), 1069-1072.
- [22] A. Arima and F. Iachello, *Annals Phys.* **99**, (1976), 253-317.
- [23] A. Arima and F. Iachello, *Annals Phys.* **111**, (1978), 201-238.
- [24] O.Scholten, F. Iachello and A. Arima, *Annals Phys.* **115**, (1978), 325-366.
- [25] A. Arima and F. Iachello, *Annals Phys.* **123**, (1979), 468.
- [26] A.E.L. Dieperink, O. Scholten and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **44**, (1980), 1747.
- [27] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, *Phys. Rev. Lett.* **44**, (1980), 1744.
- [28] P. Van Isacker and Jin-Quan Chen, *Phys. Rev. C* **24**, (1981), 684.
- [29] O. S. Van Roosmalen, Ph.D. thesis, U. Groningen, 1982.
- [30] R. Gilmore and D.H. Feng, *Phys. Lett.* **B76**,26 (1978).
- [31] D.H. Feng, R. Gilmore, and L. M. Narducci, *Phys. Rev. C* **19**, 1119, (1979).
- [32] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 17, (2000).
- [33] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052502 (2001).
- [34] Π. Ε. Γεωργουδής, MSc. Thesis, EMII, 2011.
- [35] Piet Van Isacker and Kristiaan Heyde (2014), *Exactly solvable models of nuclei*. Scholarpedia, 9(2):31279.
- [36] Subir Sachdev, *Quantum Phase Transitions* , (Cambridge University Press, New York, 2011).
- [37] P. Cejnar, J. Jolie and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.*, **82**, (2010).
- [38] R.L. Hatch and S. Levit, *Phys. Rev. C* **25**, 1, 614, (1982).
- [39] D. Bonatsos, P. Georgoudis, D. Lenis, N. Minkov and C. Quesne, *Phys. Lett. B* **683** (2010) 264.
- [40] D. Bonatsos, P.E. Georgoudis, D.Lenis, N.Minkov, and C.Quesne, *Phys. Rev. C* **83**, (2011), 044321.
- [41] D. Bonatsos, P.E. Georgoudis, N.Minkov, D. Petrellis and C. Quesne , *Phys. Rev. C* **88**, (2013), 034316.

- [42] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1999.
- [43] H.P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.* **5**, 62, (1933).
- [44] D.J. Rowe, T.A. Welsh and M.A. Caprio, *Phys. Rev. C* **79**, (2009), 054304. David J.Rowe and John L.Wood, *Fundamentals of Nuclear Models* World scientific, London, 2009.
- [45] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis, I. Yigitoglu, *Phys. Rev. C* **76**, 064312 (2007).
- [46] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **29**, 1341 (2003).
- [47] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **30**, 627 (2004).
- [48] A. G. Sitenko and V.K. Tartakovskii, *Lectures on the Theory of the Nucleus* , Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [49] B. Podolsky, *Phys. Rev.* **32**, 812 (1928).
- [50] Marcos Moshinsky and Yuri F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, harwood academic publishers, Amsterdam, 1996.
- [51] L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev.* **102**, 788 (1956).
- [52] D. R. Bès, *Nucl. Phys.* **10**, 373 (1959).
- [53] E. Chacon, M. Moshinsky and R.T. Sharp, *J. Math. Phys.* **17**, 668 (1976).
- [54] J. P. Elliott, J. A. Evans and P. Park, *Phys. Lett. B*, **169**, 309 (1986).
- [55] P. M. Davidson, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **135**, 459 (1932).
- [56] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P.P. Raychev and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584**, (2004), 40-47.
- [57] M.A. Caprio and F. Iachello, *Nucl. Phys. A***781**, (2007), 26.
- [58] J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249**, 111 (1975).
- [59] A. S. Davydov and G. F. Filippov, *Nucl. Phys.* **8**, 237 (1958).
- [60] A. S. Davydov and V. S. Rostovsky, *Nucl. Phys.* **12**, 58 (1959).
- [61] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, 172 (2004).
- [62] K. Kumar and M. Baranger, *Nucl. Phys. A* **92**, 608 (1967).
- [63] O. von Roos, *Phys. Rev. B* **27**, 7547 (1983).

- [64] C. Quesne and V.M. Tkachuk, J.Phys.A: Math. Gen. 36 (2003) 10373-10389.
- [65] G. Veneziano, Europhys. Lett. **2** (3), 199-204 (1986).
- [66] A. Kempf 1997 J.Phys. A. Math. Gen. **30** 2093
- [67] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [68] E. Schrodinger, Proceedings of the Royal Irish Academy A: Math. and Phys. Sci, 46 (1940/41), pp. 9-16.
- [69] L. Infeld and T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
- [70] Edward Witten, Nucl. Phys. B185 (1981) 513-554.
- [71] L. E. Gendenshtein, JETP Lett, Vol 38, No 6, 25 September 1983.
- [72] C. V. Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen. 18, (1985) L57-L61.
- [73] A. B. Balantekin, Phys. Rev. A **57**, 4188 (1998).
- [74] M. Znojil, Phys. Rev. A **61**, 066101 (2000)
- [75] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue, Report No 94-05, Delft University of Technology (1994); E-Print Archive: math.CA/9602214.
- [76] D. J. BenDaniel and C. B. Duke, Phys. Rev. **152**, 683 (1966).
- [77] T. Gora and F. Williams, Phys. Rev. **177**, 1179 (1969).
- [78] G. Bastard, Phys. Rev. B **24**, 5693 (1981).
- [79] Q.-G. Zhu and H. Kroemer, Phys. Rev. B **27**, 3519 (1983).
- [80] A. Kratzer, Z. Phys. **3**, 289 (1920).
- [81] R. F. Casten and E. A. McCutchan, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34**, R285 (2007).
- [82] P. Cejnar, J. Jolie, and R. F. Casten, Rev. Mod. Phys. **82**, 2155 (2010).
- [83] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, and P. A. Terziev, Phys. Lett. B **588**, 172 (2004).
- [84] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [85] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. C **69**, 044316 (2004).
- [86] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. C **69**, 014302 (2004).

- [87] Nuclear Data Sheets, as of December 2005.
- [88] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective* (Oxford University Press, Oxford, 1990).
- [89] M. A. Caprio, Phys. Rev. C **65**, 031304(R) (2002).
- [90] P. M. Morse, Phys. Rev. **34**, 57 (1929).
- [91] I. Boztosun, D. Bonatsos, I. Inci, Phys. Rev. C **77**, 044302 (2008).
- [92] I. Inci, D. Bonatsos, I. Boztosun, Phys. Rev. C **84**, 024309 (2011).
- [93] R. Bijker, R. F. Casten, N. V. Zamfir, and E. A. McCutchan, Phys. Rev. C **68**, 064304 (2003).
- [94] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series, and Products* (Academic, New York, 1980).
- [95] M. Moshinsky, T. H. Seligman, and K. B. Wolf, J. Math. Phys. **13**, 901 (1972).
- [96] S. Raman, C. W. Nestor, Jr., and P. Tikkanen, At. Data Nucl. Data Tables **78**, 1 (2001).
- [97] Brookhaven National Laboratory, National Nuclear Data Center, <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.
- [98] R.F. Casten and N.V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **87**, 052503, (2001).
- [99] T. L. Li and K. J. Kuhn Phys. Rev. B, **47**, 12760, (1993).
- [100] W. Greiner, *Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1989).
- [101] M. Moshinsky, T. H. Seligman, and K. B. Wolf, J. Math. Phys. **13**, 901 (1972).
- [102] E. Chacon, M. Moshinsky and R.T. Sharp J. Math. Phys. **17**, 1976, 668.
- [103] M.A Caprio, Phys. Rev. C **72**, 054323, (2005).
- [104] M.A Caprio, Phys. Rev. C **83**, 064309, (2011).
- [105] D. Bonatsos, *Interacting Boson Models of Nuclear Structure*, Oxford University Press, Oxford, 1988.
- [106] P.E Garrett, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys **27** (2001) R1-R22.
- [107] P.E. Georgoudis, Phys. Lett. **B731**, (2014), 122-125.
- [108] O. Castanos, E. Chacon, A. Frank and M. Moshinsky, J. Math. Phys. **20**, (1979), 1.

- [109] Robert Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [110] R. F. Casten and V. N. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **85**, 3584 (2000).
- [111] N. V. Zamfir, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie, Phys. Rev. **C 66**, 021304 (2002).
- [112] V. Werner, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie, Phys. Lett. **B 527**, 55–61 (2002).
- [113] Leo P Kadanoff, *Statistical Physics: statics, dynamics and renormalization*, World Scientific, 2000.
- [114] J. Carvalho, R. Le Blanc, M. Vassanji and D.J. Rowe, Nucl. Phys. **A452**,(1986), 240-262.